

波動方程式の係数同定問題に対する H^2 勾配法のパラメータ選択について

Parameter choice of H^2 gradient method
to the coefficient identification problem in linear wave equation.

代田健二¹⁾
Kenji Shirota

¹⁾博 (理) 愛知県立大学 情報科学部 教授 (〒 480-1198 愛知県長久手市茨ヶ廻間 1522-3, E-mail: shirota@ist.aichi-pu.ac.jp)

The purpose of this research is to produce the numerical method based on the H^1 gradient method for the problem of Lamé coefficients identification in a linear elastic wave equation. Our inverse problem is to identify the unknown Lamé coefficients from the measured displacement and strain on inner domain of the elastic body. In order to solve numerically our inverse problem, we propose the iteration method based on topology optimization of a density type. The direct and inverse problem of the density type are introduced by using the density type Lamé coefficients which are defined as the composition of the given sigmoid and unknown control functions. The unknown coefficients are identified approximately by finding the control functions. We introduce a cost functional with control functions by using given measured data, and then, a unconstrained minimizing problem is produced. We apply the H^2 gradient method with two parameters to solving our minimizing problem. By numerical experiments, we investigate the influence of the choice of two parameters in our method on the identified coefficients.

Key Words : Coefficients identification, Linear elastic wave equation, Toplogy optimization, H^2 gradient method

1. はじめに

本研究では、波動方程式の係数同定問題に対する数値解法について考察する。著者は、スカラー波動方程式、線形弾性波動方程式の係数同定問題 [1,2]、そして実用問題である鉄とコンクリートの合成梁に対する欠陥同定問題 [3] に対して、一定精度で同定可能な数値解法を研究・開発してきた。これらの研究では、変分法的定式化により元の係数同定問題を観測データを用いた制約条件付き最小化問題へと変換し、その問題を数値的に解くための射影勾配法を用いたアルゴリズムを導出、そして数値実験により一定精度で同定可能であることを示した。一方、観測データに確率的な誤差が含まれている場合やモデル化誤差が含まれる実測データに対しては、安定かつ一定精度の数値解を得ることができず、実用問題への適用に課題を残す結果となった。

一方、著者は、機械部品等の数理的設計分野で近年盛んに研究されている密度型位相最適化問題 [4] に対して研究を実施し、高精度解法と多倍長計算環境の組み合わせによる高精度手法を提案した [5]。密度型位相最適化問題の数理モデルは、適当に滑らかな関数を係数とする偏微分方程式に対する係数同定問題として表される。そのため、離散化・丸め誤差の影響により、最急降下法などの非線形計画法を適用すると数値不安定現象が発生する。この問題に対して畔上は、数値的に安定かつ理論的にも一定の裏付けを持った H^1 勾配法を開発した [6]。そこで著者は、1 次元波動型方程式の係数同定問題に対して H^1 勾配法を拡張した H^2 勾配法を開発し、確率的な観測誤差が含まれる場合についても、安定

かつ一定精度で同定可能なことを示した [7]。さらに開発手法を、スカラー波動方程式の係数同定問題、内部変位データを伴った線形弾性波動方程式のラメ係数同定問題へ応用し、一定の成果を得ることができた [8,9]。しかし、内部変位データのみでは、境界観測データを加えた場合でも、係数関数によっては十分な精度が得られないことも明らかとなった [10]。

そこで本研究では、内部変位データとともに内部歪みデータが与えられた場合の線形弾性波動方程式に対するラメ係数同定問題について考察する。ここで弾性体 Ω は、線形かつ等方的であると仮定する。さらに、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) を有界なリプシッツ領域 [11] とする。 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$ を変位ベクトル、 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij})$ をひずみテンソル、 $\boldsymbol{\sigma}_{\lambda,\mu}(\mathbf{u}) = (\sigma_{ij})$ を応力テンソルする。変位-ひずみの関係式、応力-ひずみの関係式は、それぞれ次が成り立っているとする。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \\ \boldsymbol{\sigma}_{\lambda,\mu}(\mathbf{u}) &= 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{I}_n.\end{aligned}$$

ここで、 $\nabla \mathbf{u} = (u_{i,j})$ 、 $‘j’$ は $\partial/\partial x_j$ 、 $‘\operatorname{tr}’$ は行列のトレース、 \mathbf{I}_n は n 次単位行列であり、 λ, μ はラメの弾性係数である。このとき、支配方程式および初期値・境界値は、次のとおりに与えられていると仮定する。

$$\begin{cases} \rho \partial_t^2 \mathbf{u} &= \nabla^T \boldsymbol{\sigma}_{\lambda,\mu}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0, \partial_t \mathbf{u}(0) = \mathbf{v}_0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g} & \text{on } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (1)$$

ここで $\partial_t := \partial/\partial t$ である．また， $\mathbf{u}_0 \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ， $\mathbf{v}_0 \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ， $\mathbf{g} \in C([0, T]; H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^n))$ ， $\mathbf{f} \in C([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n))$ は与えられた関数である．また， $\rho \in L^\infty(\Omega)$ は密度， $T > 0$ は観測時間の長さである．ラメの弾性係数 $\lambda, \mu \in L^\infty(\Omega)$ は，場所にのみ依存するとし，

$$0 < C_\lambda^{(1)} \leq \lambda(\mathbf{x}) \leq C_\lambda^{(2)}, \quad 0 < C_\mu^{(1)} \leq \mu(\mathbf{x}) \leq C_\mu^{(2)} \quad (2)$$

を満たすものとする．ただし， $C_\lambda^{(\ell)}, C_\mu^{(\ell)}$ ($\ell = 1, 2$) は与えられた正定数である．このとき，与えられた関数に対して境界付近に一定の状況を課し，領域および境界に関しても制約を課すことで，(1) の適切性は理論的に保証される．

弾性波動場における逆問題については，様々な問題が考察されており，それらに対する数値解法についても研究されている [12, 13]．本研究では，次のような内部観測データが与えられているラメ係数同定問題を対象とする． $\omega \subseteq \Omega$ を与えられた部分領域とし，内部観測 $\bar{\mathbf{u}} \in C([0, T]; H^1(\omega; \mathbb{R}^n))$ が，関数値だけではなく $\nabla \mathbf{u}$ も含めて与えられているとする．このとき，次の係数同定問題を考察する．

ラメ係数同定問題

内部観測 $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}|_{\omega \times (0, T)}$ ， $\nabla \bar{\mathbf{u}} = \nabla \mathbf{u}|_{\omega \times (0, T)}$ よりラメ弾性係数関数 $\lambda(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x})$ を同定せよ．

内部変位データによるラメ係数同定問題に対する数値解法として，著者は H^1 型解法を応用した H^2 勾配法を開発した [14]．その H^2 勾配法では， H^2 内積を基礎としたパラメータ付きの双一次形式を用いた方程式を解くことで探索方向を決定している．本研究では，そのパラメータ選択の影響について数値実験により検証し，計算手法の高精度化および高速化の可能性について考察する．

2. H^2 勾配法によるラメ係数同定

本研究で用いる密度型位相最適化は，完備な内積空間，すなわちヒルベルト空間上での勾配法を基礎としていることが多い．また密度型位相最適化では，材料分布を表す係数関数そのものを用いて最適化するのではなく，ヒルベルト空間に属する関数により制御される係数関数を定義し，制御関数を最適化することで材料分布を求めている．そこで本研究における係数関数は，ヒルベルト空間 $H^2(\Omega)$ に属する制御関数を用いて密度型係数関数を定義し，制御関数に対する最小化問題を解くことにより，係数関数の近似を得ることを考える．なお $H^2(\Omega)$ は，連続関数空間 $C^0(\bar{\Omega})$ に連続的に埋め込まれるソボレフ空間である [15]．また密度型位相最適化では，制御関数は設計変数と呼ばれることが多いため，本論文でもその表現を用いる．

$$\phi_\lambda, \phi_\mu \in C_B^1(\mathbb{R}) \text{ を}$$

$$0 \leq \phi_\lambda(\xi) \leq 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \phi_\mu(\zeta) \leq 1, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}$$

を満たす関数とする．ここで， $C_B^1(\mathbb{R})$ は， \mathbb{R} を定義域とする 1 階導関数まで連続かつ有界な関数全体の集合である．このとき，設計変数関数 $\theta, \zeta \in H^2(\Omega)$ を用いて，

密度型ラメ係数関数を次のとおりに定義する．

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\theta) &= (C_\lambda^{(2)} - C_\lambda^{(1)})\phi_\lambda(\theta(\mathbf{x})) + C_\lambda^{(1)}, \\ \bar{\mu}(\zeta) &= (C_\mu^{(2)} - C_\mu^{(1)})\phi_\mu(\zeta(\mathbf{x})) + C_\mu^{(1)}. \end{aligned}$$

導入された密度型ラメ係数は， $\bar{\lambda}, \bar{\mu} \in C^0(\bar{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega)$ であり，制約条件 (2) を満たす．

密度型ラメ係数関数を用いて，元の係数同定問題を次のとおりに密度型へと変換する．

密度型ラメ係数同定問題

内部観測 $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}|_{\omega \times (0, T)}$ ， $\nabla \bar{\mathbf{u}} = \nabla \mathbf{u}|_{\omega \times (0, T)}$ より， $\theta, \zeta \in H^2(\Omega)$ を同定せよ．

この問題は，元の問題と違い，属する関数空間以外に制約条件が課されていない．

密度型逆問題を解くため，次の汎関数を導入する．

$$\begin{aligned} J(\theta, \zeta) &= \tilde{J}(\bar{\lambda}(\theta), \bar{\mu}(\zeta)) \\ &:= \int_0^T \|\mathbf{u}[\bar{\lambda}(\theta), \bar{\mu}(\zeta)](t) - \bar{\mathbf{u}}(t)\|_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)}^2 dt. \end{aligned}$$

$\mathbf{u}[\bar{\lambda}(\theta), \bar{\mu}(\zeta)]$ は，ラメ係数関数 $\bar{\lambda}(\theta), \bar{\mu}(\zeta)$ が与えられたときの (1) の解である．汎関数 J の最小化関数により，設計変数 θ, ζ を同定する．最小化関数を同定する方法として，抽象勾配法を用いる．そのため，汎関数 J の汎導関数が必要となる．

汎関数 J の汎導関数は，次のとおりに求めることができる．

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial J}{\partial \theta}(\theta, \zeta), \varphi \right\rangle &= \frac{1}{\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\omega \times (0, T)}^2} \int_0^T \left(\mathbf{u}' \left[\frac{d\bar{\lambda}}{d\theta} \varphi, 0 \right], 2(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \right)_{H^1} dt, \quad \varphi \in H^2(\Omega), \\ \left\langle \frac{\partial J}{\partial \zeta}(\theta, \zeta), \psi \right\rangle &= \frac{1}{\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\omega \times (0, T)}^2} \int_0^T \left(\mathbf{u}' \left[0, \frac{d\bar{\mu}}{d\zeta} \psi \right], 2(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \right)_{H^1} dt, \quad \psi \in H^2(\Omega). \end{aligned}$$

ここで， $\mathbf{u}'[\varphi, \psi]$ は次の方程式の解である．

$$\begin{cases} \rho \partial_t^2 \mathbf{u}' = \nabla^T \sigma_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}}(\mathbf{u}') \\ \quad + \nabla^T \sigma_{\varphi, \psi}(\mathbf{u}[\bar{\lambda}(\theta), \bar{\mu}(\zeta)]) & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \varepsilon(\mathbf{u}') = (\nabla \mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u}'^T)/2 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \sigma_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}}(\mathbf{u}') = 2\bar{\mu}(\zeta)\varepsilon(\mathbf{u}') + \bar{\lambda}(\theta)\text{tr} \varepsilon(\mathbf{u}') I_n & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}'(0) = \partial_t \mathbf{u}'(0) = \mathbf{0} & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u}' = \mathbf{0} & \text{on } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (3)$$

また，

$$\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\omega \times (0, T)}^2 := \int_0^T \|\bar{\mathbf{u}}(t)\|_{H^1(\omega; \mathbb{R}^n)}^2 dt$$

である．未知の設計変数関数を，次の反復プロセスにより同定する．

$$\begin{pmatrix} \theta_{\ell+1} \\ \zeta_{\ell+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_\ell \\ \zeta_\ell \end{pmatrix} + \epsilon_\ell \begin{pmatrix} s_\theta^\ell / \|s_\theta^\ell\|_{H^2} \\ s_\zeta^\ell / \|s_\zeta^\ell\|_{H^2} \end{pmatrix} \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots).$$

ここで $\epsilon_\ell > 0$ は適切に与えられた探索の幅である．探索方向 $s_\theta^\ell, s_\zeta^\ell$ は，次の方程式を解くことで得る．

$$a_\theta(s_\theta, \varphi) = -\left\langle \frac{\partial J}{\partial \theta}, \varphi \right\rangle, \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega),$$

$$a_\zeta(s_\zeta, \psi) = -\left\langle \frac{\partial J}{\partial \zeta}, \psi \right\rangle, \quad \forall \psi \in H^2(\Omega).$$

$a_\theta(\cdot, \cdot), a_\zeta(\cdot, \cdot)$ は， H^2 内積を基礎として次のとおりに定義する．

$$a_\theta(s_\theta, \varphi) = \alpha(\nabla^2 s_\theta, \nabla^2 \varphi)_{L^2} + \beta(\nabla s_\theta, \nabla \varphi)_{L^2} + (s_\theta, \varphi)_{L^2},$$

$$a_\zeta(s_\zeta, \psi) = \alpha(\nabla^2 s_\zeta, \nabla^2 \psi)_{L^2} + \beta(\nabla s_\zeta, \nabla \psi)_{L^2} + (s_\zeta, \psi)_{L^2}.$$

ここで α, β は，与えられた正定数である． $a_\theta(\cdot, \cdot), a_\zeta(\cdot, \cdot)$ は， $H^2(\Omega)$ における対称，有界かつ強圧的な双一次形式となることから，探索方向 $s_\theta^\ell, s_\zeta^\ell$ は一意に定めることができる．これら双一次形式による方程式を解くことで各ステップで探索方向を定め，更新することで設計変数を同定し，それにより未知のラメ係数関数の近似を求める．

3. 数値実験

数値実験により提案手法の有効性を検証するとともに，双一次形式内のパラメータ α, β の同定精度および収束性への影響を検証する．

$\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ とし，真のラメ係数関数は，以下のとおりとする (図 1)．

$$\lambda(x_1, x_2) = \begin{cases} 0.576923(\cos(7\pi r(x_1, x_2)) + 2.0) & (r_1(x_1, x_2) < 1/7 \text{ or } r_2(x_1, x_2) < 1/7) \\ 0.576923 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$\mu(x_1, x_2) = \begin{cases} 0.384615(\cos(7\pi r(x_1, x_2)) + 2.0) & (r_1(x_1, x_2) < 1/7 \text{ or } r_2(x_1, x_2) < 1/7) \\ 0.384615 & (\text{その他}) \end{cases}$$

ただし，

$$r_1(x_1, x_2) = (x_1 - 0.3)^2 + (x_2 - 0.3)^2,$$

$$r_2(x_1, x_2) = (x_1 - 0.7)^2 + (x_2 - 0.7)^2$$

である．また， $C_\lambda^{(1)} = 0.24519, C_\lambda^{(2)} = 1.75962, C_\mu^{(1)} = 0.163462, C_\mu^{(2)} = 1.17308$ とする．

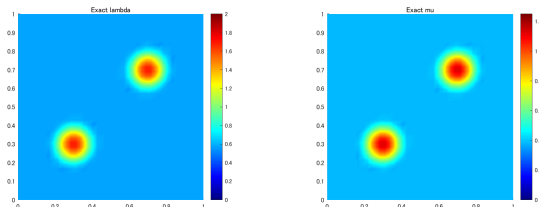


図-1 真のラメ係数関数 λ, μ

線形弾性波動方程式に対する解を

$$u_1(x_1, x_2, t) = 10^{-5} \cos \pi(x_1 + 2x_2 - t),$$

$$u_2(x_1, x_2, t) = 10^{-5} \sin \pi(x_1 + 2x_2 - t)$$

と仮定し，境界条件，ソース項関数，初期値関数，初速度関数を構成する． $T = 1.75$ とし，観測データに 1.0 % の正規乱数による誤差を加えたものを使用する．線形弾性波動方程式 (1), (3) の初期値境界値問題を解く方法として，空間方向は 3 角形 2 次要素 (要素数 1152) を用いた有限要素法，時間方向はニューマーク法 (平均加速度法) を用いる．また探索方向の計算には，3 角形 2 次要素 (要素数 392) 分割における基底関数を用いたガラキン法を使用する．それらを実装するために FreeFEM (バージョン 4.14)[16] を用い，さらに探索の幅を求める方法はアルミホの基準 [17] を採用する．密度型係数に用いる関数 ϕ_λ, ϕ_μ には，シグモイド関数

$$\phi_\lambda(s) = \phi_\mu(s) = \frac{\tanh s + 1}{2}$$

を採用する．反復の終了条件は， $J(\theta_\ell, \zeta_\ell) < 10^{-3}$ とする．

選択 1 $(\alpha, \beta) = (1.0, 1.0)$ ，選択 2 $(\alpha, \beta) = (1.0 \times 10^{-8}, 1.0 \times 10^{-1})$ ，選択 3 $(\alpha, \beta) = (1.0 \times 10^{-2}, 1.0 \times 10^{-8})$ としたときの同定結果は，それぞれ図 2, 3, 4 のとおりである．また，それぞれの汎関数値グラフは 5 のとおりである．

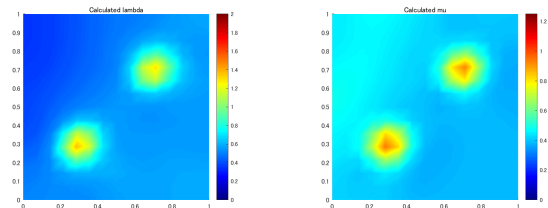


図-2 選択 1：同定結果 λ_{400}, μ_{400}

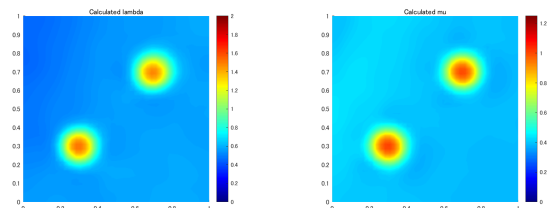


図-3 選択 2：同定結果 λ_{131}, μ_{131}

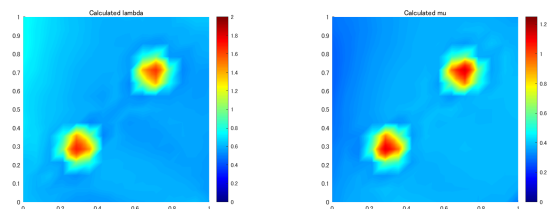
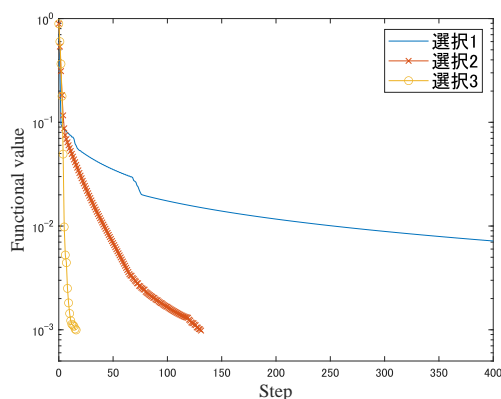


図-4 選択 3：同定結果 λ_{16}, μ_{16}

図-5 汎関数 J

選択2は131ステップ、選択3は16ステップで終了条件も満たした。一方、選択1については400ステップの反復計算を実施したが、終了条件を満たすことがなかった。終了条件を満たしたステップ数、すなわち最も高速であったのは選択3であったが、同定精度が最も高かったのは選択2であった。これらの結果から、パラメータの選択により高速化と高精度化のバランスが取れる同定結果を得られる可能性があることが示唆された。今後は、パラメータの選択基準について検討する。

謝辞: 本研究はJSPS 科研費 23K03236 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Choi, C., Nakamura, G., and Shirota, K.: Variational approach for identifying a coefficient for the wave equation, *Cubo A Math. J.*, Vol.2, pp.81-101, 2007.
- [2] Shirota, K.: Adjoint numerical method for the identification of the Lamé coefficients in linear elastic wave field, *J. Struct. Mech. Earthquake Eng.*, Vol.23, pp.321-329, 2006.
- [3] Jimbo, S., Morassi, A., Nakamura, G., and Shirota, K.: A non-destructive method for damage detection in steel-concrete structures based on finite eigendata, *Inv. Prob. Sci. Eng.*, Vol.20, pp.233-270, 2012.
- [4] Bendsøe, M.P. and Sigmund, O.: *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [5] 渡邊祥, 代田 健二: 勾配法と任意多点差分法を用いた高精度位相最適化手法の開発. 日本応用数理学会論文誌, 第 26 巻, pp.1-20, 2016.
- [6] 畔上秀幸: 形状最適化問題, 森北出版, 2016.
- [7] Kurashiki, D. and Shirota, K.: H^2 gradient method for the coefficient identification problem in a partial differential equation, *JSIAM Lett.*, Vol.10, pp.37-40, 2018.
- [8] 代田健二: スカラー波動方程式の係数同定問題に対する H^2 勾配法, 日本応用数理学会 2018 年度年会講演予稿集, pp.121-122, 2018.
- [9] 代田健二: 密度型位相最適化を応用した線形弾性波動方程式のラメ係数同定問題に対する数値解法, 日本応用数理学会 2022 年度年会講演予稿集, F3-3-1(PDF), 2022.
- [10] 代田健二: H^1 型勾配法を用いた弾性波動方程式の係数同定問題に対する数値再構成手法, 計算工学講演会論文集, F-01-04(PDF), Vol.29, 2024.
- [11] 宮島静雄: ソボレフ空間の基礎と応用, 共立出版, 2006.
- [12] Fernández-Cara, E. and Maestre, F.: An inverse problem in elastography involving Lamé systems, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, Vol.26, pp.589-605, 2018.
- [13] Yaman, F., Yakhno, V. G., and Potthast, R.: A Survey on Inverse Problems for Applied Sciences, *Math. Probl. in Eng.*, Article ID 976837, 2013.
- [14] 代田健二: 内部観測による線形弾性波動方程式のラメ係数同定問題に対する数値解法, 日本応用数理学会 2024 年度年会講演予稿集, D3-3-1(PDF), 2024.
- [15] Adams, R. A. and Fournier, J. J. F.: *Sobolev Spaces*, Second Edition, Academic Press, 2003.
- [16] Hecht, F.: New development in FreeFem++, *J. Num. Math.*, Vol. 20, pp.251-266, 2012.
- [17] Armijo, L.: Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives, *Pacific J. Math.*, Vol. 16, pp.1-3, 1966.