

弾塑性体を対象とした密度型トポロジー最適化 および修正最適性基準法の適用

Density-based Topology Optimization for Elastoplastic Materials
and Application of the Modified Optimality Criteria Method

岸田真幸¹⁾ 後藤覇月²⁾ 廣瀬慧人³⁾
Masayuki Kishida, Haru Goto and Keito Hirose

¹⁾博(工)岐阜工業高等専門学校 機械工学科 講師 (〒 501-0495 岐阜県本巣市上真桑 2236-2, E-mail: kishida@gifu-nct.ac.jp)

²⁾岐阜工業高等専門学校 機械工学科 卒業生 (〒 501-0495 岐阜県本巣市上真桑 2236-2)

³⁾岐阜工業高等専門学校 機械工学科 学生 (〒 501-0495 岐阜県本巣市上真桑 2236-2)

In this study, density-based topology optimization is performed to minimize strain energy for elastoplastic materials. The Rmin method is employed for the elastoplastic analysis to reproduce nonlinear elastoplasticity. A modified optimality criteria method, which is a combination of the optimality criteria method and the Newton method, is used for the updating equation of topology optimization. As a result, it was found that the consideration of elasto-perfect plasticity is more suitable for product design involving plastic deformation.

Key Words : Topology Optimization, Elastoplastic, Modified Optimality Criteria Method

1. はじめに

近年、エネルギー効率の向上やコスト削減などの観点から、製品設計の軽量化が重要視されている。軽量化の方法として、数学と工学の理論を用いた構造最適化の中のトポロジー最適化が注目されている。トポロジー最適化は、有限個に分割した材料の分布を求ることで、最適化構造を表現する手法であり、その表現の自由度から構造最適化の中で製品の性能向上に関してもっとも期待されている。解析を用いて適切な強度設計をするためには、実際の変形を表現する数理モデルを用いて検討する必要がある。加えて、故障時に被害を最小に抑え周りの安全を確保できるフェイルセーフ設計が重要視されている。

本研究の目的として、弾塑性体を対象とした密度型トポロジー最適化解析を実施し、フェールセーフ設計のための最適設計を検討する。また、次章で詳しく述べるが、更新式には発表者らが提案した修正最適性基準法を用いて少ないステップ数で更新できるかを検討する。本研究における弾塑性体の数理モデルとして、一般的に用いられる線形硬化弾完全塑性体[1]ではなく、より実モデルに近い非線形硬化弾完全塑性を用いる。

2. 定式化

(1) 密度型トポロジー最適化

本研究の最適化問題[2]を式(1)から式(5)に示す。式(1)にひずみエネルギー最小化問題の評価関数を示す。また、制約として、式(2)から式(5)に示す支配方程式、剛性行列の定義式、体積制約、設計変数の制約を用いる。

$$\underset{\rho_e}{\text{minimize}} \quad J = \frac{1}{2} \{f\}^T \{u\} \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad [K] \{u\} = \{f\} \quad (2)$$

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T \left([D_{\text{elast}}] + [D_{\text{plast}}] \right) [B] d\Omega \quad (3)$$

$$V = \sum_{e \in \Omega} \frac{\rho_e v_e}{V_{\text{total}}} - \bar{\rho}_0 \leq 0 \quad (4)$$

$$0 \leq \rho_e \leq 1 \quad (5)$$

ここで、 $[K]$ 、 $[B]$ 、 $[D_{\text{elast}}]$ 、 $[D_{\text{plast}}]$ 、 $\{f\}$ 、 $\{u\}$ は、剛性行列、B マトリックス、弾性を表す D マトリックス、塑性を表す D マトリックス、荷重ベクトル、変位ベクトルをそれぞれ表す。また、 ρ_e 、 Ω 、 v_e 、 V_{total} 、 $\bar{\rho}_0$ は、要素 e における設計変数である無次元密度（以降、密度と呼ぶ）、設計領域、要素 e における面積もしくは体積、総面積もしくは総体積、初期平均密度をそれぞれ表す。上付き文字 T は転置を表す。弾塑性体の剛性行列 $[K]$ を算出するため、本研究では Rmin 法[3]を用いる。Rmin 法は、応力が降伏局面を超えてしまわないように増分を制限するために使われる手法で、降伏局面に達した次のステップで塑性の構成式に切り替えることで降伏条件を満たしながら解析を行うことができる。

トポロジー最適化において材料表現をする手法である密度法があり、その中で一般的に用いられる手法に SIMP 法がある。本問題では、次式のように SIMP 法[4]を用いてヤング率を定義する。

$$E_e = (E_0 - E_{\min}) \rho_e^p + E_{\min} \quad (6)$$

ここで、 E_e 、 E_0 、 E_{\min} 、 p は、要素 e におけるヤング率、ある材料のヤング率、数値不安定性を回避するため

のパラメータ、ペナルティパラメータをそれぞれ表す。式(5)および式(6)に示す通り、材料がある状態 $\rho_e = 1$ の時は $E_e = E_0$ となり、材料がない状態 $\rho_e = 0$ の時は $E_e = E_{\min}$ となる。その他の状態はグレースケールとよばれる仮想的な中間材料が表現される。また、 E_{\min} は限りなく 0 に近い値が与えられる。次に、制約付き最適化問題を制約なしの問題とするために、ラグランジュ未定乗数法を用いる。式(2)に示した支配方程式の制約を考慮するために、ラグランジュ関数 J^* を次式のように定義する。

$$J^* = J + \{\lambda\}^T ([K] \{u\} - \{f\}) \quad (7)$$

ここで、 $\{\lambda\}$ はラグランジュ未定乗数ベクトルである。ラグランジュ関数 J^* の第一変分を取り、変位ベクトル u に対するラグランジュ関数 J^* の勾配を計算すると、式(2)に示す支配方程式に似た式が得られる。そのため、恒等式の関係より次式に示す自己随伴関係が得られ、随伴方程式を解く必要がなくなる。

$$\{u\} = -\{\lambda\} \quad (8)$$

次に、密度 ρ_e に対するラグランジュ関数 J^* の勾配（感度）を計算し、台形公式を用いることで次式が得られる。

$$\frac{\partial J^*}{\partial \rho_e} = \sum_{m=1}^{m_{\max}} \frac{1}{4} \left(\{u_e^{(m-1)}\}^T \frac{\partial K^{(m-1)}}{\partial \rho_e} + \{u_e^{(m)}\}^T \frac{\partial K^{(m)}}{\partial \rho_e} \right) \Delta u^{(m)} \quad (9)$$

ここで、 m_{\max} は荷重の分割数を、上付き文字 m は、荷重ステップを表す。次に、式(4)に示した体積制約を考慮するために、再度ラグランジュ関数 L を次式のように定義する。

$$L = J^* + \Lambda V \quad (10)$$

ここで、 Λ はラグランジュ未定乗数である。先ほどと同様に、密度 ρ_e に対するラグランジュ関数 L の勾配を計算すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial L}{\partial \rho_e} = \frac{\partial J^*}{\partial \rho_e} + \Lambda \frac{\partial V}{\partial \rho_e} \quad (11)$$

ここまでで理論では、要素ごとで独立しているという仮定の上で感度が求められている。そのため、チッカーボードとよばれる市松模様のような材料分布が構造内に表れてしまい、工学的に製造が困難な構造が得られてしまう。それを回避するために、フィルタをかけ平滑化処理をすることで隣り合う要素と関係性を作る必要がある。本研究では、次式に示すような感度に対してフィルタを行う感度フィルタを用いる。

$$\frac{\partial \bar{J}^*}{\partial \rho_e} = \frac{\sum_{j \in \Omega_{\text{filter}}} w \rho_j \frac{\partial J}{\partial \rho_e} \frac{1}{v_j}}{\frac{1}{v_e} \sum_{j \in \Omega_{\text{filter}}} w \rho_j} \quad (12)$$

ここで、 Ω_{filter} はを表す。 w は重み関数であり、次式で定義される。

$$w = R - \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| \quad (13)$$

ここで、 R および \mathbf{x} は、フィルタリング半径および要素中心座標を表す。最後に、密度を更新するための更新式について述べる。停留条件として、式(11)の左辺が 0 となればよいということがわかるため、式(11)の右辺第 1 項と第 2 項の比が 1 となればよい。すなわち、密度 ρ_e に対するラグランジュ関数 L の勾配が 0 となる時、密度の更新が収束していることを意味する。そのため、次式のような最適性基準法（OC 法）[5] が成り立つ。

$$\begin{aligned} \rho_e^{(k+1)} &= \rho_e^{(k)} \left(\frac{\frac{\partial \bar{J}^*}{\partial \rho_e}^{(k)}}{-\Lambda^{(k)} \frac{\partial V}{\partial \rho_e}^{(k)}} \right)^\eta \\ &= \rho_e^{(k)} \left(A_e^{(k)} \right)^\eta \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 η はダンピングパラメータを表す。加算式で構成されている最急降下法と比べ、最適性基準法は乗算式で構成されているため、素早く更新が行えるのが特徴である。一方で、更新に対して制約を設けないと更新が不安定になることが確認されている。そのため、以下に示すようなムーブリミット ρ_{move} を設ける必要がある。

$$\rho_e^{(k+1)} = \begin{cases} \rho_e^L & \text{if } \rho_e^{(k)} \left(A_e^{(k)} \right)^\eta \leq \rho_e^L, \\ \rho_e^U & \text{if } \rho_e^{(k)} \left(A_e^{(k)} \right)^\eta \geq \rho_e^U, \\ \rho_e^{(k)} \left(A_e^{(k)} \right)^\eta & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (15)$$

ここで、 ρ_e^L および ρ_e^U は式(16)および式(17)に示す。

$$\rho_e^L = \max \left(\rho_e^{(k)} - \rho_{\text{move}}, 0 \right) \quad (16)$$

$$\rho_e^U = \min \left(\rho_e^{(k)} + \rho_{\text{move}}, 1 \right) \quad (17)$$

(2) 修正最適性基準法

本節では、最適性基準法に非線形方程式のニュートン法の考え方を組み込んだ修正最適性基準法[6]について紹介する。始めに、前述したようにニュートン法と最適性基準法の違いの 1 つとして、加算式で構成されているか、乗算式で構成されているかである。そのため、式(14)に示した最適性基準法に対して両辺に自然対数を取ると、次式のような加算式が得られる。

$$\ln \rho_e^{(k+1)} = \ln \rho_e^{(k)} + \eta \ln A_e^{(k)} \quad (18)$$

ここで、第 2 項に注目する。ダンピングパラメータ η は、解析者が与えるパラメータであるため定数である。よって、 $\ln A_e^{(k)}$ が 0 となればよい。 $\ln A_e^{(k+1)}$ に対し

てテーラー展開を行うと、次式が得られる。

$$\ln A_e^{(k+1)} = \ln A_e^{(k)} + \Delta \rho_e \frac{\partial}{\partial \rho_e} (\ln A_e^{(k)}) + o(\Delta \rho_e^2) \quad (19)$$

収束する条件として $A_e^{(k+1)}$ が 1 となればよい。すなわち、 $\ln A_e^{(k+1)}$ が 0 となればよい。加えて、第 3 項に示す高次の項は十分に小さく無視できると仮定すると、次式のように $\Delta \rho_e$ が求まる。

$$\Delta \rho_e = \left(-\frac{\partial}{\partial \rho_e} (\ln A_e^{(k)}) \right)^{-1} \ln A_e^{(k)} \quad (20)$$

その後、基礎的な更新式の考え方に基づき、代入をすると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \ln \rho_e^{(k+1)} &= \ln \rho_e^{(k)} + \Delta \rho_e \\ &= \ln \rho_e^{(k)} + \left(-\frac{\partial}{\partial \rho_e} (\ln A_e^{(k)}) \right)^{-1} \ln A_e^{(k)} \end{aligned} \quad (21)$$

最後に、対数から真数に戻すことにより、次式に示す修正最適性基準法が得られる。

$$\rho_e^{(k+1)} = \rho_e^{(k)} \left(A_e^{(k)} \right)^{\left(-\frac{\partial}{\partial \rho_e} (\ln A_e^{(k)}) \right)^{-1}} \quad (22)$$

本最適化問題において、定式の指数部分は次のように計算することができる。

$$\left(-\frac{\partial}{\partial \rho_e} (\ln A_e^{(k)}) \right)^{-1} = -\left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial \rho_e^2} \right)^{-1} \frac{\partial J^*}{\partial \rho_e} \quad (23)$$

これにより、一階微分と二階微分を解くことができれば計算することができる。ここで、一階微分は式 (9) に示した感度と同じであるため、二階微分である密度に対する感度の勾配を計算すればよい。ただし、この修正最適性基準法のままで指数部分が負の値となった時に問題が生じる。そのため、負の値になる場合にはそのステップの更新が緩やかになるように修正をする。本研究においての修正方法として、一般的な方法である最大値と最小値で正規化する手法を取り入れた。この手法を正規化型 - 修正最適性基準法 (MMN-MOC 法) [7] と呼び、式 (24) から式 (26) に示す。

$$\rho_e^{(k+1)} = \rho_e^{(k)} \left(A_e^{(k)} \right)^{\frac{1}{\ell_{\text{norm}}^{(k)}} \left(-\frac{\frac{\partial J^*}{\partial \rho_e}^{(k)}}{\frac{\partial^2 J^*}{\partial \rho_e^2}^{(k)}} - \ell_{\min}^{(k)} \right)} \quad (24)$$

$$\ell_{\min}^{(k)} = \min_{e \in \Omega} \left(0, -\frac{\frac{\partial J^*}{\partial \rho_e}^{(k)}}{\frac{\partial^2 J^*}{\partial \rho_e^2}^{(k)}} \right) \quad (25)$$

$$\ell_{\text{norm}}^{(k)} = \max_{e \in \Omega} \left(1, -\frac{\frac{\partial J^*}{\partial \rho_e}^{(k)}}{\frac{\partial^2 J^*}{\partial \rho_e^2}^{(k)}} - \ell_{\min}^{(k)} \right) \quad (26)$$

3. 計算の流れおよび解析条件

(1) 計算の流れ

本研究におけるトポロジー最適化の計算の流れを以下に示す。

1. 解析モデルおよび条件の設定をする。
2. Rmin 法を用いて荷重を規定値まで増分させ塑性判定を行い、非線形硬化弾完全塑性の有限要素解析を行う。
3. 有限要素解析で得られた変位を用いて、式 (1) に示した評価関数を算出する。
4. 収束判定を行う。収束判定を満たしている場合は計算を終了する。収束判定を満たしていない場合は次のステップに進む。本研究では、収束がされているかの確認をするために最大反復更新回数 k_{\max} で打ち切るように設定をする。
5. 式 (9) に示した感度を算出する。
6. 式 (12) に示した感度フィルタを施す。
7. 式 (14) に示した OC 法または式 (24) に示した MMN-MOC 法を用いて、設計変数である密度を更新する。その後、ステップ 2 に戻る。

(2) 解析モデルおよび条件

本研究の解析モデルおよび条件を図 1 および表 1 に示す。

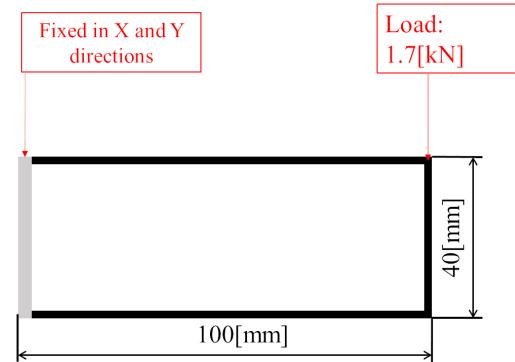


図-1 解析モデル

表-1 解析条件

要素種類	1 次要素
要素の一辺	4.0 [mm] × 4.0 [mm]
ヤング率 E_0	70 [GPa]
パラメータ E_{\min}	10^{-3} [Pa]
ポアソン比 ν	0.33
降伏応力 σ_0	275 [MPa]
加工硬化係数 n	0.25
塑性係数 C_p	153 [MPa]
初期平均密度 $\bar{\rho}_0$	0.6
荷重の分割数 m_{\max}	1000
最大反復更新回数 k_{\max}	200
ムーブリミット ρ_{move}	0.01

4. 解析結果および考察

(1) 弹性体と弾塑性体のトポロジー最適化の比較

図2および図3に、OC法を用いて、弾性体または弾塑性体を対象とした際のひずみエネルギー最小化のトポロジー最適化で得られた最適密度分布を示す。また、図4および図5に、弾性体または弾塑性体を対象とした際の評価関数の履歴を示す。図2および図3より、弾性体を考慮したトポロジー最適化によって得られた密度分布と比べ、弾塑性体を考慮したトポロジー最適化によって得られた密度分布は、片持ちはりの解析において塑性しやすい固定端に密度が多く分布することが確認できる。加えて、図4および図5より、弾性体および弾塑性体と問わず、収束する傾向にあることが確認できる。一方で、弾性体を対象としたトポロジー最適化で得られた最適密度分布を、弾塑性解析をするとひずみエネルギーが1004.2 [J]となった。弾塑性体を対象としたトポロジー最適化で得られた最適密度分布のひずみエネルギーが932.5 [J]ということを考えると、弾塑性体は現実モデルに近いことから、塑性する荷重まで加える場合においては、弾塑性体としてトポロジー最適化を行った方が良い構造が得られるといえる。

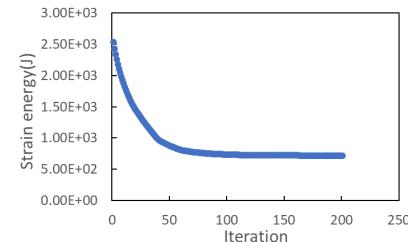


図4 弹性を対象とした際の評価関数の履歴

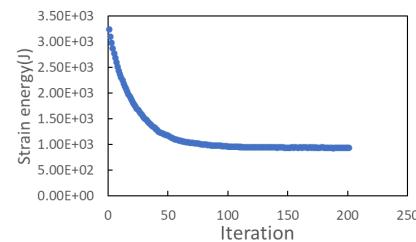


図5 弹塑性を対象とした際の評価関数の履歴

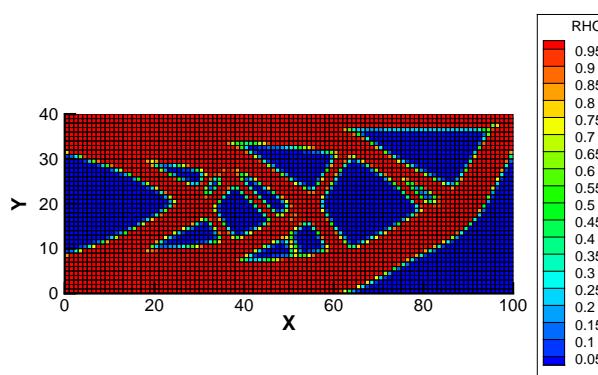


図2 弹性体を対象とした最適密度分布

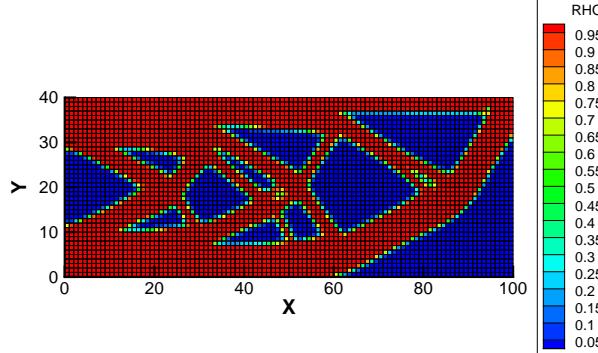


図3 弹塑性体を対象とした最適密度分布

(2) OC法とMMN-MOC法の比較

図6および図7に、OC法またはMMN-MOC法を用いたトポロジー最適化で得られた最適密度分布を示す。また、図8に、OC法およびMMN-OC法を用いたトポロジー最適化で得られた評価関数の履歴を示す。図6および図7より、密度分布に大きな違いは確認できないため、同じ解を探索できたといえる。また、図8より、従来の更新式であるOC法と比べ、MMN-MOC法を用いた方が少ないステップ数で評価関数が収束する傾向にあることが確認できる。

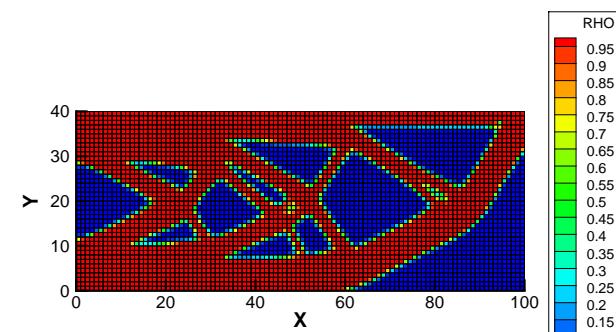


図6 OC法を用いた際の最適密度分布

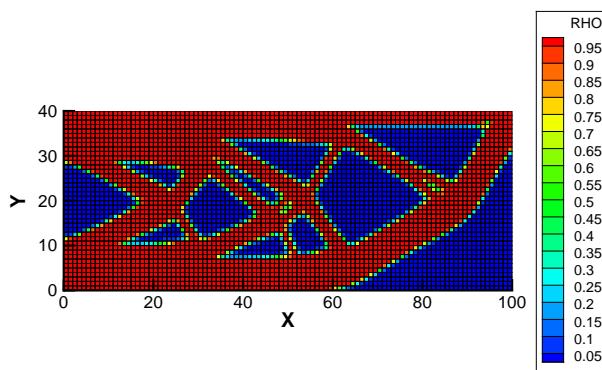


図-7 MMN-MOC 法を用いた際の最適密度分布

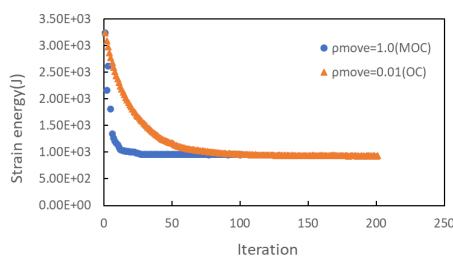


図-8 更新式を変更した際の評価関数の履歴

5. まとめ

本研究では、より実モデルに近い非線形硬化弾完全塑性を対象とした密度型トポロジー最適化解析を実施した。また、更新式には発表者らが提案した MMN-MOC 法を用いて少ないステップ数で更新できるかを検討した。結果として、弾性のみを考慮したトポロジー最適化の結果と比べ、弾塑性体を考慮したトポロジー最適化の結果の方が、評価関数であるひずみエネルギーの値が小さくなり、より実モデルに適した解析が行えていることが確認できた。加えて、従来の OC 法と比べ、MMN-MOC 法は少ないステップ数で同じ解を探索することが可能であることが確認できた。

現時点では塑性時の剛性行列を計算する際に応力が使われているが、その応力は密度および変位の関数ではないと仮定しているため、これらを考慮することでより現実に近い解析が可能となる。そのため、関数を無視しない定式化が将来的な課題である。

謝辞: 本研究は若手研究 24K17193 の助成を受けた。ここに謝意を表す。

参考文献

- [1] 加藤 準治, 干場 大也, 高瀬 慎介, 寺田 賢二郎, 京谷 孝史: 弾塑性複合材料のトポロジー最適化における解析的感度の精度検証, 日本計算工学論文集, Vol.2014, p.20140012, 2014.
- [2] 西脇 真二, 泉井 一浩, 菊池 昇: トポロジー最適化(計算力学レクチャーコース), 丸善, 2013.
- [3] 吉野 雅彦, 天谷 賢治: Excel による有限要素法: 弾性・弾塑性・ポアソン方程式, 朝倉書店, 2006.
- [4] Bendsøe, M. P. and Sigmund, O.: Material interpolation schemes in topology optimization , *Archiv Appl. Mech.*, Vol.69, pp.635-654, 1999.
- [5] Rozvany, G. I. N.: Structural Design via Optimality Criteria: The Prager Approach to Structural Optimization , Springer, 1989.
- [6] Kishida, M. and Kurahashi, T.: Proposal of a modified optimality criteria method for topology optimization analysis in 3-dimensional dynamic oscillation problems , *Int. j. numer. methods eng.*, Vol.123(3), pp.866-896, 2022.
- [7] Kishida, M. and Kurahashi, T.: Development of a novel non-positive definite correspondence modified optimality criteria method for multi-objective density-based topology optimization , *Mech. eng. J.*, Vol.10(6), p.23-00353, 2023.