計算工学講演会論文集 Vol. 30 (2025 年 6 月) 日本計算工学会

面内等方性を考慮した随伴変数法による解法

Solution by the Adjoint Variable Method Considering In-plane Isotropy

蔭山志穂 1)福原颯 2)平手利昌 3)竹内謙善 4)
Shiho Kageyama, So Fukuhara, Toshiaki Hirate and Kenzen Takeuchi

1)香川大学創造工学部（〒 760-8521 香川県高松市幸町 1-1, E-mail: s22t011@kagawa-u.ac.jp）
2)香川大学大学院創発科学研究科（〒 760-8521 香川県高松市幸町 1-1, E-mail: s24d164@kagawa-u.ac.jp）
3)東芝産業機器システム株式会社（〒 510-8101 三重県三重郡朝日町縄生 2121, E-mail:toshiaki.hirate@toshiba.co.jp）
4)香川大学創造工学部（〒 760-8521 香川県高松市幸町 1-1, E-mail: takeuchi.kenzen.u8@kagawa-u.ac.jp）

The adjoint variable method is used to solve the problem of identifying material constants in laminated iron cores. Previous studies have shown that it is possible to obtain highly accurate material constants. However, due to the diversity of solutions, solutions with unrealistic values of material constants may be obtained. Therefore, in this study, we propose a method considering in-plane isotropy as one of the methods to uniquely determine the solution.

Key Words : *Identification Problem, Newton Method, In-plane Isotropy*

1. はじめに

モーター、発電機、変圧器には積層鉄心が使用されている。これらの産業用機器を設計するためには積層鉄心の材料定数を精度よく同定する必要がある。これまでに積層鉄心を直交異方性材料としてモデル化し、縦弾性係数３成分，せん断弾性係数３成分，ポアソン比３成分の合計９パラメータを設計変数とする最適化問題として定式化し、ニュートン法に基づく解法とサロゲート法に基づく解法を適用している [1]。その結果、実験値を精度よく再現するパラメータを同定することが可能であることが確認されている。しかしながら、この最適化問題では最適解が一意に定まらないことが示唆されており非現実的な解が得られる可能性がある。そこで本研究では積層鉄心の面内等方性に着目する。積層鉄心は薄い電磁鋼板を積層して作られているため、積層方向に直行する２方向の材料定数はほとんど等方であることが予想される。この面内等方性をニュートン法による解法に取り入れることで現実的な解を得る方法を提案する。

2. 最適化問題の定式化

積層鉄心の積層方向を y 軸、積層方向に直交する面を $x-z$ 面として、直交異方性材料のヤング率を E_x, E_y, E_z ポアソン比を $\nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{xz}$ せん断弾性係数を G_{xy}, G_{yz}, G_{xz} とする。これらのパラメータが設計変数となる。本稿では，これらの設計変数を $\boldsymbol{x}$ とし，その各成分を $x_n, n = 1, 2, \cdots, 9$ と表記する。この直交異方性材料が面内等方性に近いと仮定すると、次式が成立する。

$$
\begin{aligned}
x_1 &\fallingdotseq x_3 \quad (E_x \fallingdotseq E_z) \\
x_4 &\fallingdotseq x_5 \quad (\nu_{xy} \fallingdotseq \nu_{yz}) \\
x_7 &\fallingdotseq x_8 \quad (G_{xy} \fallingdotseq G_{yz})
\end{aligned} \tag{1}
$$

有限要素解析によって得られる m 個の固有振動数を評価関数ベクトル $\boldsymbol{f}(x)$、その各成分を $f_i(\boldsymbol{x}), i = 1, 2, \cdots, m$ と表記し、実験で得られた固有振動数を目標値ベクトル $\bar{\boldsymbol{f}}$、その各成分を $\bar{f}_i, i = 1, 2, \cdots, m$ と表記する。これら２つのベクトルの誤差を $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \bar{\boldsymbol{f}}$ と表記すると，材料定数同定問題は一般的に、$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ を最小化する $\boldsymbol{x}$ を求める最適化問題として定式化できる。しかしながら m が設計変数の数より十分に小さい場合は、$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ の適当なノルムがゼロとなる解が一意に決められない可能性が生じる。

そこで本研究では、k 回目の繰り返しで得られた適当な設計変数を $\boldsymbol{x}^{(k)}$ として、$k+1$ 回目の設計変数を $\boldsymbol{x}^{(k+1)} \equiv \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{\Delta x}$ と更新することとし、その更新量 $\boldsymbol{\Delta x}$ を以下のような最適化問題の解として求めることにする。

$$
\begin{aligned}
&\text{find} && \boldsymbol{\Delta x} \equiv \boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)} \\
&\text{minimize} && \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta x}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{\Delta x} \\
&\text{subject to} && \boldsymbol{G}\boldsymbol{\Delta x} = -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{(k)})
\end{aligned} \tag{2}
$$

式 (2) における行列 $\boldsymbol{G}$ は、誤差ベクトル $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ の設計変数 $\boldsymbol{x}$ に対する一階微分である。

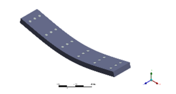
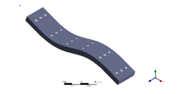
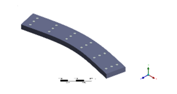
$$
\boldsymbol{G} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{3}
$$

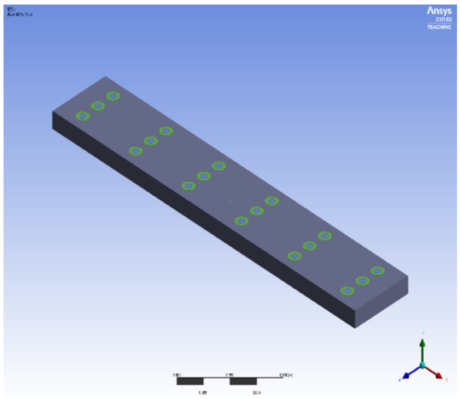
一般的に固有振動数と設計変数の関係は非線形であるが、式 (2) に基づいて設計変数を更新することは $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}$ を近似的に求めていることになる。

式 (2) に示す最適化問題の解は、以下のように求められる。

$$
\boldsymbol{\Delta x} = -\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{G}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{G}^T)^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{(k)}) \tag{4}
$$

表–1 固有振動数とモード

mode1	mode2	mode3
290.8	794.4	1029.
		



図–1 有限要素モデル

3. 最適化問題の解法

固有振動数が設計変数に対して一階微分可能だとすると、式 (2) における行列 $\boldsymbol{G}$ は随伴変数法を使用して計算することができる [2]。式 (1) が成立する適当な初期値 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ からスタートして、そこで得られた $\boldsymbol{G}$ を使って式 (4) で $\boldsymbol{\Delta x}$ を計算し、更新された設計変数 $\boldsymbol{x}^{(1)} \equiv \boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{\Delta x}$ を得る。これを $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となるまで繰り返す。

ここで、式 (4) における行列 $\boldsymbol{V}$ は式 (2) の最適化問題における目的関数の定義に用いられており、任意の正定値行列が使用できる。この行列は次元の異なる設計変数のオーダー調整に利用できるが、本研究ではそれに加えて面内等方性からの逸脱量の評価を目的関数に付加するためにも利用する。具体的には、行列 $\boldsymbol{V}$ を次式のように定義する。

$$\boldsymbol{V} \equiv \begin{bmatrix} v_{11}+\alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & v_{33}+\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_{44}+\alpha_2 & -\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & v_{55}+\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_{77}+\alpha 3 & -\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 & v_{88}+\alpha 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_{99} \end{bmatrix} \tag{5}$$

ここで、正の定数 $v_{ii}, i = 1, 2, \ldots, 9$ は、設計変数のオーダーを適当に調整するように決められる。この時、式 (2) の最適化問題の目的関数は次式のように展開できる。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta x}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{\Delta x} \\ &\equiv \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_9 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & v_{99} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_9 \end{Bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2}\alpha_1(\Delta x_1 - \Delta x_3)^2 + \frac{1}{2}\alpha_2(\Delta x_4 - \Delta x_5)^2 + \frac{1}{2}\alpha_3(\Delta x_7 - \Delta x_8)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

この式より、$\alpha_1 > 0, \alpha 2 > 0, \alpha 3 > 0$ は Δx_1 と Δx_3、Δx_4 と Δx_5、Δx_7 と Δx_8 の二乗誤差に乗じる係数となっていることが分かる。従って、$\alpha_1, \alpha 2, \alpha 3$ をそれぞれ十分に大きくすると、$\Delta x_1 \fallingdotseq \Delta x_3$、$\Delta x_4 \fallingdotseq \Delta x_5$、$\Delta x_7 \fallingdotseq \Delta x_8$ となる解が得られると考えられる。

4. 解析例

積層鉄心を模擬した有限要素モデルに対して本研究で提案する手法を適用した。図–1 に有限要素モデルを、表–1 に「正解」の固有振動数とそれぞれの固有振動モードの変形図を示す。この表において mode1 は上下曲げ 1 次モード、mode2 は上下曲げ 2 次モード、mode3 は水平曲げ 1 次モードである。

この問題に対して α の値を変えて 4 回検証した。また、それぞれの繰り返し回数は 20 回とした。この表において、N.1 は $\alpha = 0$、N.2 は $\alpha = 10$、N.3 は $\alpha = 100$、N.4 は $\alpha = 500$ を表す。得られた材料定数における固有振動数と正解の固有振動の誤差率を表–2 に示す。N.4 では解析環境で計算可能な有効桁の範囲で誤差ゼロとなった。これらの結果から全ての検証において高い精度で固有振動数を一致させることに成功している。

表–2 誤差率比較

	N.1[%]	N.2[%]	N.3[%]	N.4[%]
mode1	3.78E-09	2.75E-09	4.13E-09	0
mode2	3.90E-09	2.64E-09	3.65E-09	0
mode3	3.89E-09	1.94E-09	3.89E-09	0

予め設定された材料定数とニュートン法により得られた材料定数の比較を表–3 に示す。Ans. は予め設定された材料定数、N.1, N.2, N.3, N.4 は表–2 と同様である。この結果から、α がゼロまたは小さい値の場合には、面内等方性から逸脱する結果が得られるのに対して、α を大きな値にすると面内等方性に近い結果が得られることが分かる。表–2 に示したように、固有振動数の誤差率だけに着目すれば解を一意に決めることはできないのに対して、α に大きな値を設定することで、面内等方性材料に近い解を優先的に探索できることが確認できる。従って、最適解が一意に定まらない問題に対して現実的な解を得るための方法として本研究の手法が有効であるといえる。

Ans. と N.4 の結果を比較すると、E_y の値が大きく異なることが分かる。このことからこの解析例では、3 つの固有振動数と面内等方性の条件を考慮しても、なお解を一意に決めることができない問題であることが示唆される。

5. おわりに

本研究では産業用機器に使用される積層鉄心の材料定数同定問題において、面内等方性を考慮した解法を提案した。固有振動数だけに着目すると解が一意に決まらない問題に対し、ニュートン法の計算過程に現れる正定値行列を工夫することで面内等方性に近い解が得られることを解析例を通して確認した。しかしなが

表–3 材料定数比較

	Ans.	N.1	N.2	N.3	N.4
E_x[GPa]	51.3	51.3	51.2	51.2	51.2
E_y[GPa]	51.3	20.7	23.0	23.5	23.5
E_z[GPa]	51.3	19.3	48.0	50.9	51.2
ν_{xy}	0.30	0.31	0.31	0.31	0.31
ν_{yz}	0.30	0.31	0.31	0.31	0.31
ν_{xz}	0.30	0.31	0.31	0.31	0.31
G_{xy}[GPa]	19.7	20.9	19.4	19.3	19.3
G_{yz}[GPa]	19.7	78.7	24.7	19.9	19.4
G_{xz}[GPa]	19.7	19.9	19.7	19.7	19.7

ら面内等方性の条件を考慮しても、なお解を一意に決められない問題があることも示唆された。

参考文献

[1] 竹内謙善，福原颯，平手利昌，産業用機器における材料定数同定問題とその解法，第 29 解計算工学講演会講演論文集，Vol.29，2024

[2] Fukuhara, S., Hirate, T., Takeuchi, K. and Arakawa, M., Identification Method for Material Constants of Industrial Equipment Based on the Adjoint Variable Method, Asian Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, 2022