

多点同時振動解析における空間グラフ推定手法の提案

Proposal of Spatial Graph Estimation Method
in Multi-point Simultaneous Oscillation Analysis

高山侑也¹⁾
Yuuya Takayama

¹⁾博(理) 株式会社ニコン (〒140-8601 東京都品川区西大井 1-5-20, E-mail: yuuya.takayama@nikon.com)

We propose a method to estimate an underlying graph structure from multivariate time-series data obtained in multi-point simultaneous setting. This method is derived from the Dynamic Mode Decomposition (DMD) method so as to recover an exact graph from a solution of the graph wave equation. We introduce several demonstrations and discuss uncertainty of estimated mode and graph.

Key Words : Fourier Analysis, Dynamic Mode Decomposition, Graph Estimation, Uncertainty

1. 多点同時振動解析とグラフ波動方程式

産業機械や装置の設計・状態把握において現在でも振動解析・周波数解析が広く活用されている。多点同時計測の状況であっても、各点で周波数解析を行うのが通常であるため、多変数への拡張を試みたい。基礎となる離散フーリエ変換を再定式化する所から議論を始め、変数間の情報を自然に抽出する方法を導出する。

(1) 離散フーリエ変換再論

離散時刻で観測されたデータを整数点 t 上の実関数 $f = (f(0), f(1), \dots)$ として扱い、関数に対するシフトオペレータ S を $[Sf](t) := f(t+1)$ で定義する。このとき任意の整数 $t \geq 0$ における関数の値 $f(t)$ は、 S を用いて

$$f(t) = [S^t f](0) = [S \circ S \circ \dots \circ S f](0) \quad (1)$$

と書ける。通常 S は無限サイズの行列となり $S^t f$ は直接計算できないが、周期関数に対しては計算できる。周期を整数 $T > 0$ とすると、 S は(基本周期上の)関数 $f = (f(0), f(1), f(2), \dots, f(T-1))$ に右から作用する $T \times T$ 行列と同一視できる。

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

行列 S の固有値は 1 の幕根 $\zeta_T^k = \exp(2\pi i k/T)$ であり、その固有関数は $v_k = T^{-1/2} (1, \zeta_T^k, \zeta_T^{2k}, \dots, \zeta_T^{(T-1)k})$ と表すことが出来る。関数 f と固有関数の内積は、離散フーリエ変換に対応する。

$$f \cdot v_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{l=0}^{T-1} f(l) \zeta_T^{-kl} \quad (3)$$

また、 f の固有関数展開を式(1)の右辺に代入して得られる次式は、逆離散フーリエ変換に他ならない。

$$f(t) = \sum_{k=0}^{T-1} (f \cdot v_k) [S^t v_k](0) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{T-1} (f \cdot v_k) \zeta_T^{kt} \quad (4)$$

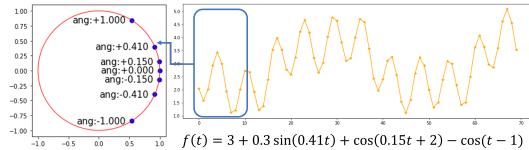


図-1 10 点程度のサンプルから厳密な周波数が抽出できる例

この様にして、連続のフーリエ理論を経ることなく、 S の固有関数展開として離散フーリエ変換が再定義できた。

(2) 離散フーリエ変換の一般化

前節の議論を一般化する。関数 f が各整数 t において次の関係式を満たす状況を考える。

$$f(t) = c_1 f(t-1) + c_2 f(t-2) + \dots + c_T f(t-T) \quad (5)$$

$f(t) = f(t-T)$ とは限らず、もはや T は周期を表さないものの、シフトオペレータ S は T 個の要素からなる基本区間上の関数 $f = (f(0), f(1), f(2), \dots, f(T-1))$ に右から作用する行列として、次のように書ける。

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & c_T \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & c_{T-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & c_{T-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

固有値を z_k 、対応する固有関数を u_k と表すと、前節の式(4)と同様に固有関数を用いた展開式が得られる。

$$f(t) = \sum_{k=0}^{T-1} (f \star u_k) z_k^t \quad (7)$$

この固有関数展開を Prony 法と呼ぶ[1]。関係式(5)により $\{c_k\}$ を求めさえすれば、1 の幕根とは限らないモード $\{z_k\}$ 、言い換えると等間隔とは限らない周波数を抽出し展開できるところが強みである。この特性により周期を気にせず任意の長さのデータに適用でき、窓関数も必要としないため、少ないサンプルから厳密な周波数を抽

出することが可能である(図-1). 一方で, $\{u_k\}$ は直交基底でないため, $f \star u_k$ は内積でなく¹, T に応じて計算量が線形より早く増大するのが欠点である. それでも, 短期間で周波数を求める場合で効果を発揮すると考えられるが, 広くは活用されていないようである.

観測地点が複数 $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^\top$ ² の場合でも, 式(5)を用いて共通の $\{c_k\}$ を求めることで, 各 f_j を共通の固有値と固有関数を用いてモード展開できる.

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}(t) = \sum_{k=0}^{T-1} \begin{pmatrix} f_1 \star u_k \\ f_2 \star u_k \\ \vdots \\ f_N \star u_k \end{pmatrix} z_k^t \quad (8)$$

これを動的モード解析(Dynamic Mode Decomposition: DMD)と呼び, 流体シミュレーション等で活用されている[2]. 振幅にあたる $f_j \star u_k$ は地点 j がどのモードを含んでいるかという情報を持ち, 地点同士の何らかの類似性を示すと考えられるが, この導出だけでは理論的な意味づけを持つ指標を導くのは難しい. そこで, 波動方程式と関連付けることで, 物理的にも妥当な地点類似度を導くのが本研究の主目的である.

(3) グラフ上の波動方程式

周波数は振動や波動現象と密接に関係していることから, 波動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{f}(t) = \Delta \vec{f}(t) \quad (9)$$

との関連を考えることは自然に思われる. このラプラシアン Δ は通常 2 階の微分作用素として定義されるが, 空間方向に離散化されている設定では修正が必要となる³. そこで, 観測地点 i, j が重み w_{ij} で繋がっているグラフを仮定し, ラプラシアンをグラフラプラシアン

$$[\Delta \vec{f}]_j := \sum_{i=1}^N w_{ij} (f_i - f_j) \quad (10)$$

で置き換えた波動方程式を定義する. 実際, $w_{j,j\pm 1} = 1/\delta^2$, 他を 0 とすると, 右辺は $(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1})/\delta^2$ と通常のラプラシアンの差分形式となり, グラフラプラシアンはその一般化と捉えることが出来る.

グラフラプラシアンによる空間方向の固有値は 0 以下となるため, それを $-\rho_l^2$ と置き, 対応する固有ベクトルを \vec{h}_l と表す. このとき, $i \neq j$ に対して

$$w_{ij} = - \sum_{l=1}^N h_{l,i} \rho_l^2 h_{l,j} \quad (11)$$

を満たすことがわかる. 各 t に対しグラフ波動方程式の解 $\vec{f}(t)$ を固有ベクトル分解すると, 各成分 $\langle \vec{f}(t), \vec{h}_l \rangle$ に対する微分方程式の一般解を導く.

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\sum_{l=1}^N \langle \vec{f}(t), \vec{h}_l \rangle \vec{h}_l \right] = - \left[\sum_{l=1}^N \rho_l^2 \langle \vec{f}(t), \vec{h}_l \rangle \vec{h}_l \right] \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{f}(t), \vec{h}_l \rangle = c_l^+ e^{i\rho_l t} + c_l^- e^{-i\rho_l t} \quad \text{for any } l \quad (13)$$

¹ $\{u_k\}$ のなす行列の逆行列を計算し, k 番目の列ベクトルと f の内積を取ったもの

² 後の式(15)のように, 観測地点は縦方向・時間方向は横方向に延びた行列をイメージすると理解しやすい

³ 波動方程式の時間微分は離散化しないが, 観測時刻は離散・等間隔と仮定する.

ここで, DMD のモード展開(8)がこのグラフ波動関数を表していると仮定すると, 適当な k, l に対し以下の対応関係を得る.

$$z_k \leftrightarrow e^{\pm i\rho_l t}, \quad \vec{f} \star u_k \leftrightarrow c_l^\pm \vec{h}_l \quad (14)$$

これは, モード $\{z_k\}$ と $\vec{f} \star u_k$ に振動数や振幅としての解釈を与え, 更に式(11)により, 特定の条件の下でグラフ重み $\{w_{ij}\}$ も復元可能であることを意味する.

別の捉え方をすると, 離散地点・離散時刻におけるグラフ波動関数の振動データから地点グラフを推定するという逆問題に対し, DMD が解法を与えることになる. グラフ波動関数でない一般の振動データに対しても, 推定グラフ上のグラフ波動関数として近似されるという意味で, 推定グラフに一定の解釈を与えることが出来ると考える.

2. アルゴリズム概要

前章の議論に基づき, 複数の観測地点で同時に計測された振動データに対し, 観測地点の関係をグラフとして抽出するアルゴリズムの説明をする. ステップ(1)から(3)は通常の DMD に制約を加えたもので, 絶対値 1 のモードを高精度に抽出することを狙っている. 使用するデータは地点数 N , 時刻数 $2T+2$ の欠損のない観測値情報で, $N \times (2T+2)$ の実数行列と思っても良い.

$$\begin{pmatrix} f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & \cdots & f_1(2T+1) \\ f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & \cdots & f_2(2T+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_N(0) & f_N(1) & f_N(2) & \cdots & f_N(2T+1) \end{pmatrix} \quad (15)$$

地点数の番号付けは便宜的なものであり, 適当に入れ替えても結果には影響しない.

(1) 時間関係式の抽出

観測地点 $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^\top$ に対し, 式(5)を基に $\{c_k\}$ に対する線形方程式を解く.

$$\begin{pmatrix} f_1(0) & f_1(1) & \cdots & f_1(2T) \\ f_2(0) & f_2(1) & \cdots & f_2(2T) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_N(0) & f_N(1) & \cdots & f_N(2T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{2T+1} \\ c_{2T} \\ \vdots \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(2T+1) \\ f_2(2T+1) \\ \vdots \\ f_N(2T+1) \end{pmatrix} \quad (16)$$

$N < 2T+1$ の場合は, 行の数が $2T+1$ 以上となるよう時刻 t をずらして縦に重ねる. また,

$$c_{2T+1} = -1, \quad c_{2T+1-j} = c_j \quad (17)$$

の制約を課し, 求める変数の数を減らしても良い. この場合, 計算に必要な時刻数も減らすことが出来る.

(2) モードの抽出

ステップ(1)で求めた $\{c_k\}$ を用い, 次の代数方程式を解く.

$$Z^{2T+1} - c_1 Z^{2T} - c_2 Z^{2T-1} - \cdots - c_{2T} Z - c_{2T+1} = 0 \quad (18)$$

これは式(6)のシフトオペレータの固有方程式と一致する. $2T+1$ 個の解 $\{z_k\}$ は, $z_0 \in \mathbb{R}, z_{2l-1} = \bar{z}_{2l} \in \mathbb{C}$ となるよう, 偏角の絶対値が小さい順に z_0, z_1, \dots, z_{2T} と番号付けておく. 実際, 係数 $\{c_k\}$ は実数であるため, この操作は常に可能である. モード z_k の偏角を周波数と解釈するために, $|z_k| = 1$ を仮定しても良い. このとき, 式(17)を

満たすため、ステップ(1)でこの制約を課すことは自然だが、逆は成り立たない⁴ため、求めた解を絶対値で割った $z_k/|z_k|$ を改めて z_k とおく。

(3) モード展開

時刻 $t = 0, 1, \dots, 2T + 1$ に対し、ステップ(2)で求めたモード $\{z_k\}$ による \vec{f} の展開

$$\vec{f}(t) = \vec{a}_0 z_0^t + \sum_{l=1}^T (\vec{a}_l z_{2l}^t + \vec{a}'_l \bar{z}_{2l}^t) \quad (19)$$

が満たされるよう、 $\vec{a}_l \in \mathbb{C}^N$ に対する線形方程式を解く。具体的には、モード $\{z_k\}$ に関するファンデルモンド行列の逆行列を $\vec{f}(t)$ からなる行列(15)にかけることで計算できる。

(4) グラフ抽出

ステップ(3)で求めた振幅を $\tilde{h}_l := \vec{a}_l / \|\vec{a}_l\|$ と正規化し、ステップ(2)のモードの偏角から周波数 $\rho_l := \arg z_{2l}$ を抽出し、グラフの重みを

$$w_{ij} = - \sum_{l=1}^T \operatorname{Re} (h_{l,i} \rho_l^2 \tilde{h}_{l,j}) \quad (20)$$

と定める。通常、グラフの重みは正であることを要請するため、その場合は $\max(w_{ij}, 0)$ を採用する。

この推定量は式(11)を基に定めており、実際、特定の条件を満たせば理論的に(11)に一致することが示せる。経験的に、グラフを復元するという観点では $T > N$ とした方が精度が高くなる一方、グラフを推定するだけであれば $T < N$ とし主要なモードのみに着目しても良い。

3. 数値実験

前章で構成したアルゴリズムを3種類の問題設定に適用し、有効性を検証する。1つ目は逆問題の解法としての成立性で、グラフ上の波動方程式の解が与えられた際に、元のグラフが正しく復元できるか数値的に確認する。2つ目は連続の設定における妥当性で、区間上の通常の波動方程式の解が与えられた際に、区間に応するグラフが抽出されるか検証する。最後は一般の設定における有効性で、波動方程式と限らない多変数時系列データが与えられた際に、解釈可能なグラフが抽出できるか実験する。

(1) 道グラフの復元

はじめに、グラフ復元の設定で検証を行う。ここでは21点からなる道グラフを考え、適当な初期関数の下グラフ波動方程式を解く。道グラフとは図-2のように隣り合う頂点のみを重み1で繋いだグラフを指し、線分を離散化したものと捉えることが出来る。波動方程式の解を時間方向に離散化し、21地点分の観測データを行列配列(15)の形にまとめ、前章のアルゴリズムを適用する。このとき21地点の隣接情報は観測データには陽に含まれないことに注意する。グラフ抽出の結果、得られたグラフの重みが元の道グラフに対応すれば、アルゴリズムの逆問題の解法としての成立性が示せることになる。

初期関数は $f_j(0) = (j - 11)/5$ に乱数を加えたものとし、各点での初速は0とする。このとき、グラフ波動方程

⁴ z_k が解のとき $1/z_k$ も解になることは言える。



図-2 n 点からなる道グラフ

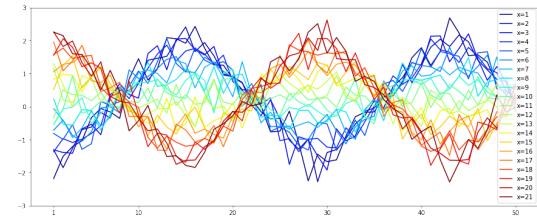


図-3 初期関数に対し得られたグラフ波動関数。時間方向(横軸)は連続的な解を離散化しており、プロットの色は対応する地点を表す。

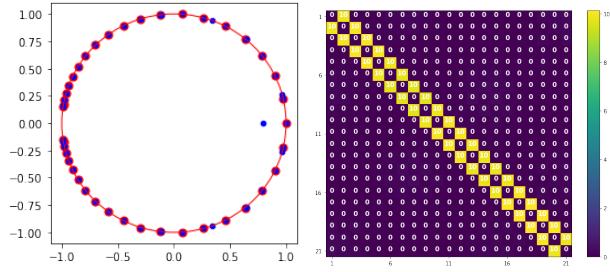


図-4 抽出されたモード(左)と抽出されたグラフの重み(右)。見やすさのため、グラフの重みは10倍して可視化した。

式の解は図-3となり、大きな振動の中に細かい振動が含まれる。21個の地点を青から赤へのグラデーションで表現しており、近い色が似た波形を持つことは直感的に理解できるが、その類似性を色の情報を使わず数値的に導くのが今回の問題といえる。

数値的な不安定さを加味して T は N より多い 27 と設定した。アルゴリズムを適用すると、図-4のモードとグラフ重みが得られる。赤丸が真のモードを表し、青丸の推定モードが概ね一致していることが分かる。グラフの重みも j と $j+1$ の重みのみ 1、他は 0 となり、想定通り元の道グラフに対応することがわかる。観測データにはノイズを付与していないため理論通りの結果であるが、数値的な誤差の影響も見られる。

(2) 区間の再構成

次に、区間 $[0, 1]$ 上の連続な波動方程式を考え、同様の手順によりグラフ抽出を行う。グラフの場合とは異なり、観測地点同士には厳密なグラフ関係が存在しないものの、抽出されたグラフは道グラフのような区間の離散化に対応することが期待できる。観測地点の取り方には自由度があり、区間上で任意の間隔・点数で取ることが可能である。ここでは前節との比較のため、両端を含んだ 21 点の場合とそれを間引いた 11 点の場合を考える。

初期関数も前節と同様に設定し、観測地点数 21 で時間方向も離散化すると図-5 の観測データを得る。図-3 と

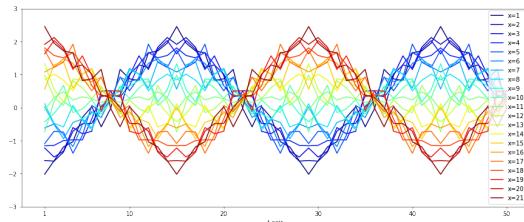


図-5 連続の波動方程式の解を時空間で離散化し得られた観測値

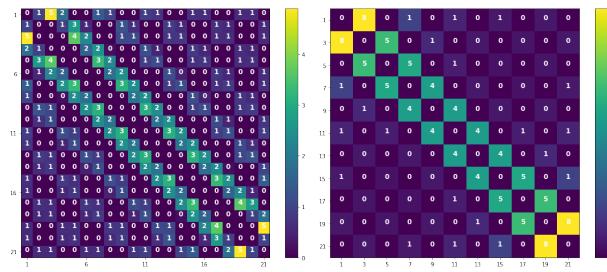


図-6 21点の場合(左)と11点の場合(右)の抽出グラフ

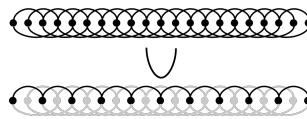


図-7 2つのグラフの対応

似た波形をしているが、細部では微妙に振舞いが異なる。

この観測データに先ほどと同様の設定でアルゴリズムを適用すると、図-6のグラフ重みを得る。観測地点数21点の場合は、おおよそ2個隣の頂点と連結したグラフとなっている。一方で、観測地点数11点の場合を考えると隣同士が連結した道グラフが得られ、こちらは期待通りの結果といえる。

一般に、多点同時振動解析において、どこに観測地点を設定するのが良いか明確な指針はないと思われる。提案するアルゴリズムでは観測地点の関係をグラフで表すことが出来ると期待する。例えば、21点の場合と11点の場合で抽出されるグラフには、図-7の通り部分グラフの関係があることが分かる。もしこのように、観測点の間引きが部分グラフの抽出に対応することが示せれば⁵、11点の観測で得られる道グラフは極小な連結グラフとして特徴付けられ、その意味で適切な観測地点の取り方と言えるだろう。

(3)動作認識

最後に、波動方程式と限らない多変数時系列データにアルゴリズムを適用しグラフを抽出してみる。カメラ内蔵したデバイスであるKinect v2を用いると、撮影した人物の各関節の座標値をリアルタイムで取得できる

⁵式(20)の定め方によると、この主張は概ね正しいと思われる。

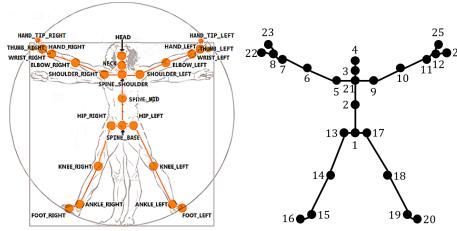


図-8 Kinect v2で座標値が取得できる関節と番号

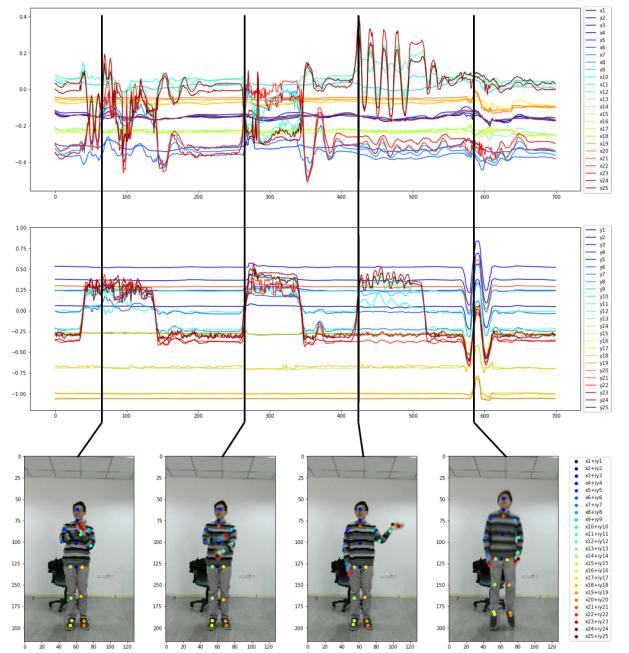


図-9 関節ごとの座標値時系列データ

([3], 図-8, 9)。関節を観測地点と捉え、対応した座標値の観測データに対してアルゴリズムを適用しグラフを抽出する事を考える。

25個の座標値は画像のxy座標に応じて取得されるため、xy合わせて50変数と見なし行列配列(15)を構築する。その後、モード抽出・展開までxy共通で行い、展開式(19)をxyに分け、 $\vec{f}_x(t) + i\vec{f}_y(t)$ のように複素数値関数として扱いグラフ抽出を適用する。このとき、 $T = 5$ と設定し15フレーム(0.5秒)分を用い、短時間での変化に着目する。検証用に[4]のデータセットから”0007-M”的動画サンプルを用いた。この動画には、「拍手」「バツ印」「手振り」「ジャンプ」の4種の動作が含まれており、それらをグラフで区別するのが目標である。

実際の適用結果(図-10)では一定以上の重みのみを可視化しているが、動きに関連する関節を結ぶグラフが得られていることがわかる。詳しく見ると、反対方向に動く関節が結ばれており、体全体が上に動くジャンプでは辺が少なくなっている。これは式(20)において、同じ振動数を持ち振幅が逆符号の組みを正として足し上げることに起因している。手振りの動作でも、動画を見ると右手と左手が逆向きに動いていることが確認でき、動作グラフと整合する。

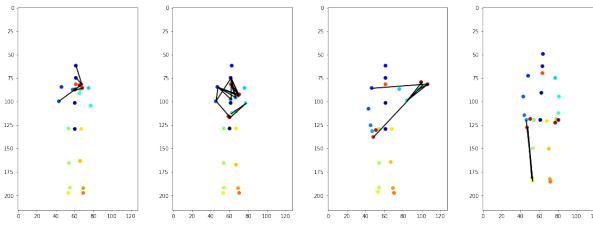


図-10 多変数時系列データから抽出される動作グラフ

この様にして、波動方程式と限らない多変数時系列データであっても、有効なグラフが抽出出来ることを示した。重みの定め方(20)からも分かる通り、周波数の高い反同期している振動を持つ観測地点同士が結ばれる傾向が強いことも確認できた。

4. 精度保証

前章では3種類の設定でアルゴリズムの有効性を検証した。しかしながら、実際の現場で活用するには、抽出された周波数やグラフが信頼に足ることを示す必要がある。これには観測値 \hat{f} にノイズが乗った場合に、得られる結果がどの程度変化するかを見積もればよい。具体的には、§2の各ステップでどの程度の誤差が乗るか評価していく事になる。

ステップ§2-(1)では $Ax = b$ という形の線形方程式の解の誤差評価が必要となる。ここで、通常の仮定とは異なり、 b だけでなく A にもノイズが乗ることに注意する。つまり、 A のノイズ δA 、 b のノイズ δb に対し、 $x + \delta x = (A + \delta A)^+(b + \delta b)$ なる δx を評価したい。例えば、Wedinの評価[5][Theorem5.1]を用いると、 A の条件数 χ や残差 $r = b - Ax$ などを用いて上から評価することが出来る。

$$\|\delta x\| \leq \frac{\chi}{\|A\| - \chi\|\delta A\|} \left(\|x\| \|\delta A\| + \|\delta b\| + \frac{\chi\|r\| \|\delta A\|}{\|A\|} \right) \quad (21)$$

$\|\delta A\|$ や $\|\delta b\|$ は想定するノイズレベルだけでなく行列のサイズにも依存することに注意する。また、式(17)を仮定すると条件数 χ が改善する傾向にあり、精度の点でも式(17)の制約は有効であると言える。

この評価式を用いると、ステップ§2-(2)の代数方程式の解の誤差範囲も評価できる。これには、例えば、Smithの定理[6]を用いることができる。式(18)の代数方程式を $P(Z) = 0$ とおき、その解を z_i とすると、 $P(Z)$ の各係数を ε 摂動させた多項式の解は、 z_i を中心とする半径

$$r_i = \frac{n\varepsilon \sum_j |z_j|^j}{|\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)|} \quad (22)$$

の円の中に存在する。この ε は上の評価式(21)で与えられるため、モードの複素数平面内の誤差範囲が求められる。

例えば、図-1のモード推定に対する信頼区間を計算してみる。ノイズレベルを $2e-9$ 程度と仮定すると、式(21)の右辺は $1.3e-4$ 程度となり、式(22)の右辺は大きいもので $1.3e-1$ 程度となる。これを図示すると図-11の通りの信頼区間となる。

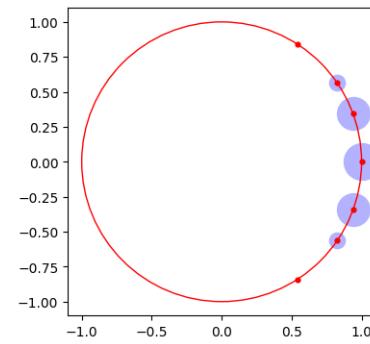


図-11 推定モードに対する信頼区間

式(21)、(22)のいずれもノイズレベルや抽出するモードの数が増えるほど右辺が指数的に大きくなるため、評価式の意味をなさなくなる。更に、ステップ§2-(3)や(4)において誤差範囲を求める場合も、上の誤差が伝搬していくため、相当ノイズが小さい状況でしか意味のある信頼区間が得られない。しかしながら、数値実験上では、それほど推定量がバラつかないことから、これらの評価式をよりシビアなものに改良できる可能性もある。

5. 結論

離散フーリエ変換を再定式化し、自然な拡張として既存のProny法やDMDを導いた。DMDを用いた多点同時振動解析の解釈性を高めるため、グラフ波動方程式と関連付け、多変数の観測値から空間のグラフを推定するという新しい逆問題の解法を提案した。グラフ波動関数や連続な波動関数に対し解法の妥当性を示し、動作認識につながるグラフ抽出も検証した。更に、推定されたグラフの妥当性を担保するため、計測誤差に対する信頼区間を算出する方法についても考察し、誤差が極めて小さい状況でモードに対する信頼区間が得られることを示した。

今回は検証のため観測地点数を20点程度としたが、実際の振動計測では100点を越えることも少なくない。また、DMDの本来の適用対象である流体シミュレーションでは、地点数は更に2,3桁以上増加する。そのように大きな系で、線形方程式や代数方程式を解くには実装上の工夫が必要となり、誤差評価も現状の不等式では不十分であろう。

今後、これらの課題を解消していくことで、周波数に基づき地点間のグラフ構造を推定する唯一の手法として、提案手法が広く活用されることを期待する。

謝辞: 本研究において多大なる支援を下さった株式会社ニコンの大坪洋介氏、小池哲也氏に感謝の意を表します。

参考文献

- [1] R. de Prony: Essai experimental et analytique, J. Ecole Polytechnique (Paris), pp. 24-76, 1795.
- [2] Jonathan H. Tu: Dynamic mode decomposition: Theory and applications, Diss. Princeton University, 2013.
- [3] Kinect for windows v2 referece, jointtype enumeration: [https://docs.microsoft.com/en-us/previous-versions/windows/kinect/dn758662\(v=ieb.10\)](https://docs.microsoft.com/en-us/previous-versions/windows/kinect/dn758662(v=ieb.10)).
- [4] Liu Chunhui, et al.: A large scale benchmark for continuous multi-modal human action understanding. arXiv preprint arXiv:1703.07475, 2017.
- [5] Per-Åke Wedin: Perturbation theory for pseudo-inverses, BIT Numerical Mathematics 13, 217-232, 1973.
- [6] Brian T. Smith: Error Bounds for Zeros of a Polynomial Based Upon Gershgorin's Theorems, Journal of the ACM, 17(4), 661-674, 1970.