計算工学講演会論文集 Vol. 30 (2025 年 6 月)　　日本計算工学会

囲い込みニューラルネットワークによる内部包含物の再構成と数値実験

Reconstruction of the inclusion by using enclosure neural networks and its numerical experiments

井手 貴範 [1)] Samuli Siltanen[2)]

Takanori Ide and Samuli Siltanen

[1)] 博（理） 城西大学理学部情報数理学科 教授（〒 113-0093 東京都千代田区平河町 2-3-20, E-mail: tide@josai.ac.jp)

[2)] Ph.D. Professor of Industrial Mathematics, Department of Mathematics and Statistics, P.O.Box 68, FI-00014 University of Helsinki, Finland

Electrical impedance tomography (EIT) is a powerful non-destructive imaging technique with diverse applications such as medical imaging. The inverse problem of reconstructing internal electrical conductivity from boundary measurements is nonlinear and highly ill-posed, making it difficult to reconstruct the inclusions inside of the body accurately. Recently, there is growing interest in combining analytical methods and machine learning method to solve inverse problems. In this paper, we propose a method for reconstructing the convex hull of inclusions inside of the body from boundary measurements by combining the enclosure method proposed by Ikehata and neural networks. As the application of our proposal method, we demonstrate to solve real-world EIT measurements data.

Key Words : *Inverse Problem, Electrical Impedance Tomography*

1. はじめに

Electrical Impedance Tomography(EIT) は物体の表面に電圧を与えた時，物体表面に発生した電流の計測値から内部包含物の位置を画像で再構成する非破壊検査法として知られている．EIT は物体の境界値から内部包含物を再構成する非適切な非線形逆問題である [6]．また，現実の計測データには誤差が含まれているので，内部包含物のの直接的な再構成は大変難しい．EIT の直接的な再構成法としては積分値を用いた D–bar method がよく知られている [6]. 本講演では別の直接的な再構成法として知られている囲い込み法 [4] とニューラルネットワークを組み合わせた手法を考える．

EIT は次の偏微分方程式の逆問題として記述することができる [1].

$\mathbb{R}^2$ 内の物体 Ω（有界集合）の電気伝導度を $\sigma = \sigma(x, y)$ とし $u = u(x, y)$ を電圧のポテンシャルとすると次の偏微分方程式が成り立つ.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma \nabla u = 0 \ in \ \Omega, \\ u = f \ on \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，n を境界 $(\partial\Omega)$ 上の単位法線ベクトルとし，以下のような Dirichlet–Neumann 写像を与える.

$$\Lambda : f \to \sigma \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}. \tag{2}$$

また，電気伝導度を次のように与える.

$$\sigma(x, y) = 1 + \chi_D(x, y)h(x, y). \tag{3}$$

ここで，$D \subset \Omega$ を内部包含物の集合とし，次式が成り立つとする.

$$\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1, \ (x, y) \ \in \ D \\ 0, \ (その他) \end{cases}. \tag{4}$$

著者等は Dirichlet–Neumann 写像 Λ から内部包含物 $D \subset \Omega$ の形状を再構成できるのかという Calderón の問題を解くために, 囲い込み法とニューラルネットワークを組み合わせた手法を提案し数値実験を行った [8]．本講演において，2 次元の現実の問題に適用するための数理モデルの工夫と再構成の結果を紹介する [9].

2. 囲い込みニューラルネットワーク

EIT の直接的な再構成法である囲い込み法とニューラルネットワークを組み合わせた方法について述べる [7].

(1) 囲い込み法

囲い込み法の概要を述べる [4]．Ω を単位円盤とし，内部包含物 $D \subset \Omega$，単位ベクトル $\omega \in S^1$ とする．$\omega^\perp$ は反時計回りに直角に回転したベクトルとする．この時， $\omega \cdot \omega^\perp = 0$ をみたす．$\forall \tau > 0, x \in \mathbb{R}^2$ に対して，次の指数関数を定義する.

$$f_\omega(x, \tau) := e^{\tau x \cdot \omega + i\tau x \cdot \omega^\perp}. \tag{5}$$

この時，支持関数 (support function) を次式で定義する.

$$h_D(\omega) := \sup_{x \in D} x \cdot \omega. \tag{6}$$

次に指示関数 (indicator function) を次式で定義する．

$$I_\omega(\tau) := \int_0^{2\pi} ((\Lambda_\sigma - \Lambda_1)\overline{f_\omega(\cdot,\tau)}|_{\partial\Omega})(\theta) f_\omega(e^{i\theta},\tau)d\theta \quad (7)$$

ここで，Λ_σ は導電率が σ の内部包含物が領域 Ω に含まれている時の Dirichlet–Neumann 写像とし，Λ_1 は領域 Ω の導電率が 1 の時の Dirichlet–Neumann 写像とする．この時，十分大きな τ に対して，支持関数は

$$h_D(\omega) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\log|I_\omega(\tau)|}{2\tau} \quad (8)$$

となる．これまで，囲い込み法による内部包含物の再構成は上式と最小二乗法を用いて数値実験の研究が行われていた [5].

(2)　ニューラルネットワーク

著者等が提案する畳み込みを用いたニューラルネットワークの概要を述べる [8].
入力値として考えている領域内に内部包含物を含んだ画像を用いる.
1 層目は入力値に対して指示関数を計算する.
2 層目は畳み込み層.
3 層目は ReLu.
4 層目は全結合.
5 層目は hyperbolic tangent を計算.
最後は出力層とする.

1 層目の計算において池畠の指示関数を用いることが著者等が提案するニューラルネットワークの最大の特徴である.

囲い込みニューラルネットワークの指示関数を計算する入力データとして以下を用いる.

$$\begin{aligned} \omega_j &= [\cos\theta_j, \sin\theta_j]^T, \\ \theta_j &= 2\pi(j-1)/N,\ j = 1,\cdots,N. \end{aligned} \quad (9)$$

また，τ は $1.5 \le \tau \le 4.5$ とし刻み幅は 0.5 とする．これは次式となる.

$$\tau_l = 1 + \frac{l}{2},\ l = 1,\cdots,7. \quad (10)$$

次に，これらの入力データを用いて，τ と支持関数から得られる 2 次元平面上の次の値を計算する.

$$(\tau_l, \frac{1}{2}\log|I_{\omega_j}(\tau_l)|) \in \mathbb{R}^2,\ l = 1,\cdots,7. \quad (11)$$

これらの値から最小二乗法を用いて内部包含物を再構成する.

3.　数値実験

EIT における偏微分方程式（1）は境界値の全てを用いて解析をする理想化された状態の数理モデルであり，連続体モデルと呼ばれる．現実において境界の電流と電圧を測定するために境界に配置できる電極は有限である．つまり，有限の個数の境界値を用いて内部包含物を再構成する数理モデルが必要である．そのため，完全電極モデルが提案された [2,7]．本講演は完全電極モデルに囲い込みニューラルネットワークを用いた現実の 2 次元問題に適用した数値計算の結果を講演時に紹介する．数値実験に用いた 2 次元問題の計測データは EIT のオープンデータを用いた [3].

謝辞:　本研究は城西大学学長所管研究費の助成を受けたものです.

参考文献

[1] A.P. Calderón, On an inverse boundary value problem, Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics (1980), 65–73.
[2] M. Cheney, D. Isaacson and J.Newell, Electrical Impedance Tomography, SIAM Review 41(1999), 85–101.
[3] A. Hauptmann, V. Kolehmainen, N. M. Mach, T. Savolainen, A. Seppanen and S. Siltanen, Open 2D electrical impedance tomography data archive, arXiv preprint arXiv:1704.01178.
[4] M. Ikehata, Reconstruction of the support function for inclusion from boundary measurements, Journal of Inverse and Ill–Posed Problems, 8 (2000), 367–378.
[5] M. Ikehata and S. Siltanen, Numerical method for finding the convex hull of an inclusion in conductivity from boundary measurements, Inverse Problems 16 (2000), 1043-1052.
[6] J. Mueller and S. Siltanen, Linear and Nonlinear Inverse Problem with Practical Applications, SIAM, (2012).
[7] E. Somersalo, M. Cheney and D. Isaacson. Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography. SIAM Journal on Applied Mathematics, 52(4):1023–1040, (1992)
[8] S. Siltanen and T. Ide, Electrical impedance tomography, enclosure method and machine learning, Proceeding of 2020 IEEE 30th International Workshop on Machine Learning for Signal Processing, (2020), 1–6.
[9] S. Sippola, S. Rautio, A. Hauptmann, T. Ide and S. Siltanen, Learned Enclosure Method for Experimental EIT data, submitted for publication.