計算工学講演会論文集　Vol.30 (2025年6月)　　日本計算工学会

変分マルチスケール法による土－水連成解析の安定化

Stabilization of soil-water coupled analysis by the variational multiscale method

藤澤和謙[1)]，髙野　愛[2)]，SHARMA Vikas[3)]，清水紫媛[4)]

Kazunori Fujisawa, Ai Takano, Vikas Sharma and Shion Shimizu

1) 博(農) 京都大学 大学院農学研究科 教授（〒606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町,
E-mail: fujisawa.kazunori.2s@kyoto-u.ac.jp）

2) キヤノン株式会社（〒146-8501 東京都大田区下丸子3丁目30番2号, E-mail: takano.ai.62x@st.kyoto-u.ac.jp）

3) 博(農) 京都大学 大学院農学研究科 特定助教（〒606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町,
E-mail: sharma.vikas.5a@kyoto-u.ac.jp）

4) 京都大学 大学院農学研究科（〒606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町,
E-mail: shimizu.shion.23z@st.kyoto-u.ac.jp）

Recently, soil-water coupled analysis based on the full formulation (e.g., u-w-p & u-U-p formulations), which treats not only pore water pressure but also seepage velocity as independent variables, has been attracting increasing attention. However, finite element analysis for the full formulation is relatively new, and the principles for obtaining stable numerical solutions have not yet been fully established. In this article, the stability of numerical solutions derived from the full formulation is considered in the context of the inf-sup condition. Furthermore, the characteristics of stabilized numerical solutions obtained through the variational multiscale method are demonstrated in the one-dimensional consolidation problem.

Key Words : *Soil-water coupled analysis, Finite element method, variational multiscale method*

1.　はじめに

流体領域の流れ場と地盤の変形場を同時にシミュレートすることは，河川堤防の越流，海岸侵食の問題のように地盤の周囲の水の流れが地盤の安定性に及ぼす影響を正確にとらえる上で必要不可欠な手段となる。流れ場の支配方程式はNavier-Stokes方程式に基づき，流速と圧力が独立変数（未知変数）となる。一方，地盤の変形場においては，土中の浸透水（液相）の流れと固体としての土（固相）の変形を連成して解く必要があり，いくつかの定式法が存在する。固相と液相の加速度の差を無視することで，地盤の変位と浸透水の圧力（つまり，間隙水圧）の二つを独立変数として扱う方法はu-p定式化として一般的に知られる。最近では，固相と液相の加速度の差を無視することなく，浸透水の流速も独立変数に加えたFull formulation（例えば，u-w-p定式化やu-U-p定式化）を適用する研究が活発化している[1]。上述した流体領域の流れ場と地盤の変形場を連続的に解くには，流れ場では流速と圧力が独立変数であるため，変形場においてもこれらを独立変数として扱うFull formulationが有効となる。しかしながら，Full formulationによる有限要素解析は比較的新しく，安定的な数値解を得るための考え方は十分に整理されていない。本稿では，有限要素法（以下，FEM）を想定しFull formulationによる数値解の安定性について，inf-sup条件の観点から考察を行うとともに，一次元圧密解析を例にして変分マルチスケール法（以下，VMS）による安定化を施した数値解の特徴について説明する。

2.　Full formulationによる数値解の安定性

u-w-p定式化を想定し，空間方向の離散化に伴う数値解の安定性を考える場合，慣性項を除いた以下の固相と液相のつりあい式及び連続式が基本となる。

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \tag{1a}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\gamma_w}{k} w_i = 0 \tag{1b}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1c}$$

ここに，v_i, w_i, p, σ'_{ij} γ_w, k はそれぞれ固相の変形速度，浸透流速（液相の固相との相対速度），間隙水圧，有効応力，水の単位体積重量，透水係数である。式(1)に対してFEMを適用すると，

$$\left(\nabla\delta\mathbf{v},\boldsymbol{\sigma}'\right)_\Omega - \left(\nabla\cdot\delta\mathbf{v},p\right)_\Omega = \left(\delta\mathbf{v},\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right)_\Gamma \tag{2a}$$

$$\gamma_w k^{-1}\left(\delta\mathbf{w},\mathbf{w}\right)_\Omega - \left(\nabla\cdot\delta\mathbf{w},p\right)_\Omega = -\left(\delta\mathbf{w},p\mathbf{n}\right)_\Gamma \tag{2b}$$

$$\left(\delta p,\nabla\cdot\mathbf{v}\right)_\Omega + \left(\delta p,\nabla\cdot\mathbf{w}\right)_\Omega = 0 \tag{2c}$$

の弱形式を経て，以下の離散方程式を得る。

$$\left(\delta\mathbf{v}^T,\delta\mathbf{w}^T,\delta\mathbf{p}^T\right)\begin{bmatrix}\mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C}^T & \mathbf{B}^T & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{w}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix} = \left(\delta\mathbf{v}^T,\delta\mathbf{w}^T,\delta\mathbf{p}^T\right)\begin{pmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{g}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C}^T & \mathbf{B}^T & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{w}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{g}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} \tag{3}$$

式(2)において，$(\cdot,\cdot)_\Omega$ 及び $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ は領域Ω及びその境界Γ上でのL^2-内積を意味し，$\delta\mathbf{v}$, $\delta\mathbf{w}$, δpはそれぞれ変形速度$\mathbf{v}$，浸透流速$\mathbf{w}$，間隙水圧pに対応する重み関数，$\mathbf{n}$は外向き単位法線ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}'$ と $\boldsymbol{\sigma}$ はそれぞれ有効応力と全応力を意味する。また，式(3)が示すものは，空間の要素分割を行い，各変数について形状関数を設定して，式(2)を連立方程式の形に書き下したものである（要素レベルの離散方程式ではない）。式(3)において，$\mathbf{S}$，$\mathbf{M}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$はそれぞれ式(2)の $(\nabla\delta\mathbf{v},\boldsymbol{\sigma}')_\Omega$， $\gamma_w k^{-1}(\delta\mathbf{w},\mathbf{w})_\Omega$， $-(\nabla\cdot\delta\mathbf{w},p)_\Omega$， $-(\delta p,\nabla\cdot\mathbf{v})_\Omega$ の項からつくられるマトリックス，$\mathbf{f}$ と$\mathbf{g}$ は境界条件を与える $(\delta\mathbf{v},\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})_\Gamma$ と $-(\delta\mathbf{w},p\mathbf{n})_\Gamma$ からつくられるベクトルである（時間ステップの大きさをΔtと書けば，変形速度$\mathbf{v}$は変位増分$\mathbf{v}\Delta t$に対応するものであり，正確には$\mathbf{f}$には前ステップの応力に関する項も含まれる）。なお，式(3)では，$\mathbf{v}$，$\mathbf{w}$，$\mathbf{p}$などは有限要素の節点の変数ベクトルとなっていることを申し添える。

u-p定式化では，式(1c)を式(1a)に代入することができるため，弱形式は

$$-(\delta p,\nabla\cdot\mathbf{v})_\Omega-(\nabla\delta p,k\gamma_w^{-1}\nabla p)_\Omega=-(\delta p,k\gamma_w^{-1}\nabla p\cdot\mathbf{n})_\Gamma \quad (4a)$$

$$(\nabla\delta\mathbf{v},\boldsymbol{\sigma}')_\Omega-(\nabla\cdot\delta\mathbf{v},p)_\Omega=(\delta\mathbf{v},\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})_\Gamma \quad (4b)$$

と変わり，離散化方程式は

$$\begin{pmatrix}\delta\mathbf{v}^T & \delta\mathbf{p}^T\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{S} & \mathbf{C}\\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{D}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta\mathbf{v}^T & \delta\mathbf{p}^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \begin{bmatrix}\mathbf{S} & \mathbf{C}\\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{D}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{q}\end{pmatrix} \quad (5)$$

となる。ここに，$\mathbf{D}$は式(4)の $(\nabla\delta p,k\gamma_w^{-1}\nabla p)_\Omega$ に対応するマトリックスである。通常の地盤解析においては$\mathbf{S}$や$\mathbf{D}$は性質の良いマトリックスである（例えば，特別な境界条件を設定しなくても逆行列をもつ）。しかし，式(5)のような連成問題では，$\mathbf{D}$の成分の大きさは$\mathbf{S}$のそれに比べて小さく，特に，体積変化のない挙動を示すような $\mathbf{D}=\mathbf{0}$ （または $\mathbf{D}\approx\mathbf{0}$ ）となる条件下では，式(5)のブロック行列において2行2列にある$\mathbf{D}$マトリックスがゼロになることで，全体行列の対角成分の多くがゼロになる（または，ゼロに近くなる）。このような条件下では，以下のinf-sup条件を満たさなければ，数値解が不安定となり数値振動が発生することが知られる[2]（ここで示すものは，離散化された方程式に対するinf-sup条件であることに注意する）。

$$\inf_{\delta\mathbf{p}}\sup_{\mathbf{v}}\frac{\delta\mathbf{p}^T\mathbf{C}^T\mathbf{v}}{\|\delta\mathbf{p}\|\|\mathbf{v}\|}>\beta \quad (\beta>0,\ \delta\mathbf{p}\neq\mathbf{0},\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0}) \quad (6)$$

式(6)のinf-sup条件の詳細については紙面の制限のため省略するが，この条件は基本的には$\mathbf{C}^T$の階数（rank）が$\delta\mathbf{p}$（つまり$\mathbf{p}$）の次元と同じでなければならないことを意味する。

Full formulationのinf-sup条件では，式(3)のマトリックスの3行目のブロックを考えることになり，以下のように与えられる。

$$\inf_{\delta\mathbf{p}}\sup_{\mathbf{z}}\frac{\delta\mathbf{p}^T\mathbf{A}^T\mathbf{z}}{\|\delta\mathbf{p}\|\|\mathbf{z}\|}>\beta \quad (\beta>0,\ \delta\mathbf{p}\neq\mathbf{0},\ \mathbf{z}\neq\mathbf{0}) \quad (7)$$

ここに，

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix},\quad \mathbf{z}=\begin{pmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{w}\end{pmatrix} \quad (8)$$

である。式(7)のinf-sup条件は， $\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}\mathbf{C}^T & \mathbf{B}^T\end{bmatrix}$ の階数が$\mathbf{p}$の次元と同じであることを要請するが，これはu-p定式化の時よりもゆるい条件となる（列数が多くなるため，一次独立な行ベクトルは多くなりやすい）。

上述の理由から，u-p定式化において数値的な安定性を確保するため，変形速度$\mathbf{v}$（または変位）には間隙水圧pよりも次数の高い形状関数を利用し，変形速度の方が間隙水圧よりも未知数の次元を十分に大きくすることで，$\mathbf{C}^T$の列数を増やし，式(6) のinf-sup条件を満たしやすくするのが一般的である。著者らは，上記の考察から，Full formulationではu-p定式化より数値解は安定になると考えており，適宜安定化を施す必要があるが，$\mathbf{v}$，$\mathbf{w}$，p に同次数の形状関数を適用することを試みている。これは，流体領域の流れの解析においても，流速と圧力に同次数の形状関数を用いたFEM解析が主流であるため，冒頭に述べた流体領域の流れ場と地盤の変形場の連成問題を解く際にも好都合となる。

3. 変分マルチスケール法（VMS）による安定化

変形速度$\mathbf{v}$，浸透流速$\mathbf{w}$，間隙水圧pに同次数の形状関数を用いる場合，Full formulationであっても安定化は必要となる。ここでは，安定化手法としてVMSの効果を式(4)（いわゆる圧密問題）に対して調べる。この問題では，未知数は$\mathbf{v}$とpの二つであり，VMSではこれらの変数と重み関数を以下のように直和に分解する。

$$\mathbf{v}=\bar{\mathbf{v}}\oplus\tilde{\mathbf{v}},\quad \delta\mathbf{v}=\delta\bar{\mathbf{v}}\oplus\delta\tilde{\mathbf{v}} \quad (9a)$$

$$p=\bar{p}\oplus\tilde{p},\quad \delta p=\delta\bar{p}\oplus\delta\tilde{p} \quad (9b)$$

ここに， $\bar{\mathbf{v}}$ と $\bar{p}$ は通常の有限要素法の数値解であり， $\tilde{\mathbf{v}}$ と $\tilde{p}$ は誤差に対応する数値解（数値振動）である。VMSは， $\bar{\mathbf{v}}$ と $\bar{p}$ に加えて， $\tilde{\mathbf{v}}$ と $\tilde{p}$ も求めることで，数値振動を含まない数値解（ $\bar{\mathbf{v}}$ と $\bar{p}$ ）を求める方法となる。具体的には，式(4)の弱形式が

$$-(\delta\bar{p},\nabla\cdot\mathbf{v})_\Omega-(\nabla\delta\bar{p},k\gamma_w^{-1}\nabla p)_\Omega=-(\delta\bar{p},k\gamma_w^{-1}\nabla p\cdot\mathbf{n})_\Gamma \quad (10a)$$

$$(\nabla\delta\bar{\mathbf{v}},\boldsymbol{\sigma}')_\Omega-(\nabla\cdot\delta\bar{\mathbf{v}},p)_\Omega=(\delta\bar{\mathbf{v}},\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})_\Gamma \quad (10b)$$

$$-(\delta\tilde{p},\nabla\cdot\mathbf{v})_\Omega-(\nabla\delta\tilde{p},k\gamma_w^{-1}\nabla p)_\Omega=-(\delta\tilde{p},k\gamma_w^{-1}\nabla p\cdot\mathbf{n})_\Gamma \quad (11a)$$

$$(\nabla\delta\tilde{\mathbf{v}},\boldsymbol{\sigma}')_\Omega-(\nabla\cdot\delta\tilde{\mathbf{v}},p)_\Omega=(\delta\tilde{\mathbf{v}},\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})_\Gamma \quad (11b)$$

と変わり，これらの4つの式から4つの変数 $\bar{\mathbf{v}}$， $\bar{p}$， $\tilde{\mathbf{v}}$， $\tilde{p}$ を求めることになる。ただし，以下に述べるバブル関数を $\tilde{\mathbf{v}}$ と $\tilde{p}$ の補間及び重み関数（ $\delta\tilde{\mathbf{v}}$ と $\delta\tilde{p}$ ）に用いることで，式(11)は合成を必要としない方程式となる。これにより，式(11)を $\tilde{\mathbf{v}}$ と $\tilde{p}$ について解いたものを式(10)に代入することで，最終的には $\bar{\mathbf{v}}$ と $\bar{p}$ を未知数にした連立方程式を解くことに帰着する。そのため，逆行列計算（連立方程式の球解）の観点からは計算負荷が増えるものではない。

ここでは一次元問題を解析対象とし，土骨格は線形弾

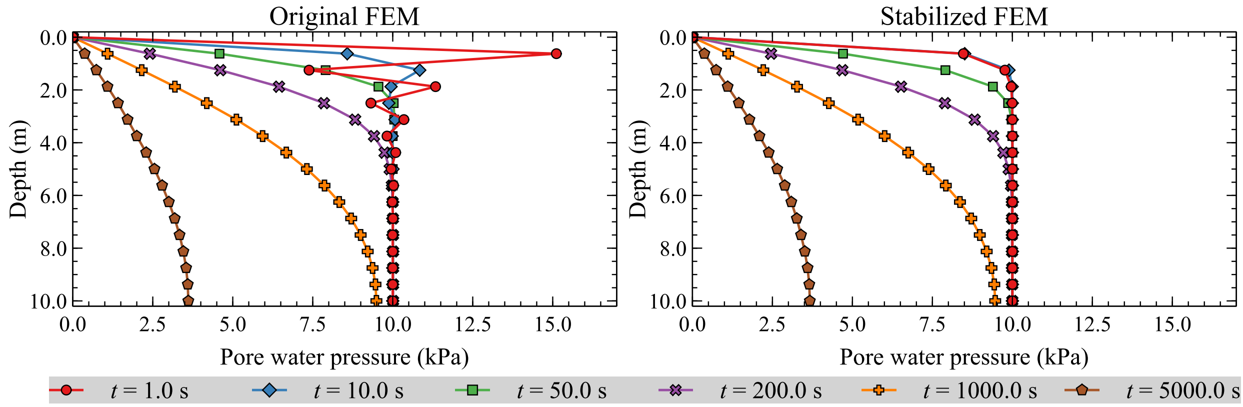

図-1　$\mathbf{v}$とpに線形一次要素を用いた有限要素解（左）とVMSによる安定化を施した計算結果（右）

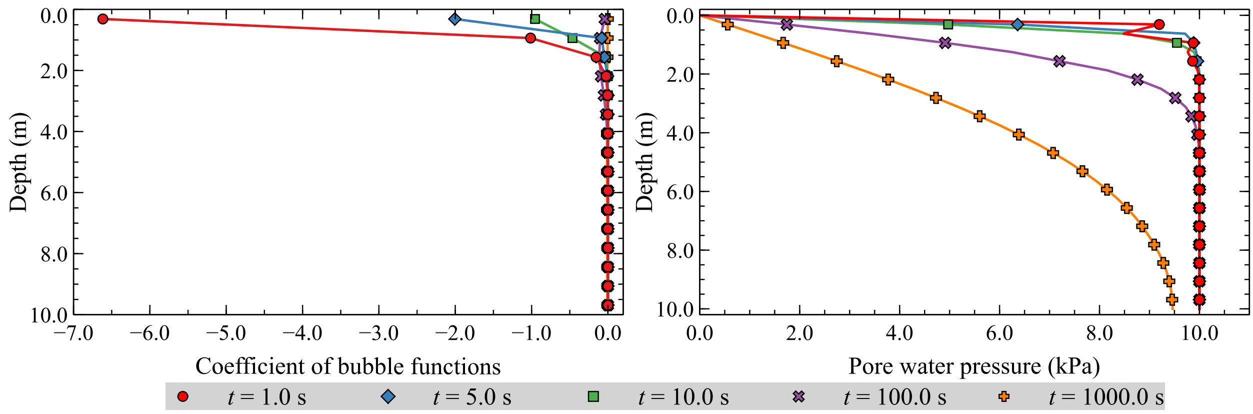

図-2　計算されたバブル関数の係数（左）と数値振動 $\tilde{p}$ を含む間隙水圧分布p（$=\bar{p}+\tilde{p}$）（右）

性体と仮定した。弾性係数に1000 kPa，透水係数に0.1 cm/sを与え，深さ10 mの地盤に10 kPaの上載圧を作用させる問題を設定した。形状関数には $\bar{\mathbf{v}}$ と $\bar{p}$ の両方とも線形一次補間を適用した。また，VMSでは $\tilde{\mathbf{v}}$ と $\tilde{p}$ の形状関数を設定する必要があるが，それにはバブル関数（要素境界においてゼロをとる形状関数）として $\tilde{N}(\xi)=\xi^2-1$（ξ は局所座標）を採用し，具体的には，

$$\tilde{v}_i=\tilde{c}_{v,i}\tilde{N}(\xi)\,,\quad \delta\tilde{v}_i=\delta\tilde{c}_{v,i}\tilde{N}(\xi) \tag{12a}$$

$$\tilde{p}=\tilde{c}_p\tilde{N}(\xi)\,,\quad \delta\tilde{p}=\delta\tilde{c}_p\tilde{N}(\xi) \tag{12b}$$

と $\tilde{\mathbf{v}}$ と $\tilde{p}$ を与えた．

図-1に計算された間隙水圧分布の時間変化を示す。同図の左側に示す通り，安定化を行わない場合は圧密初期において大きな数値振動が発生する。しかし，VMSによる安定化を施した計算（**図-1（右）**）においては，十分に数値振動を抑制されることが見てとれる（安定化を施した計算結果においては $\bar{p}$ を表示していることに注意する）。

ここでは，VMSによる安定化について詳細に考察するため，図2には間隙水圧分布p（$=\bar{p}+\tilde{p}$）を示す。pは要素レベルにおいては $\bar{p}$ に $\tilde{p}$ を加えた

$$p=\bar{p}+\tilde{p}=\bar{p}+\tilde{c}_p\tilde{N} \tag{13}$$

であり，（$\bar{p}$ ではなく）pがVMSにおいて解かれるネイキッドな数値解と考えることができる。**図-2（左）**は，計算されたバブル関数の係数 $\tilde{c}_p$ を示しており，**図-1（左）**に示した数値振動が卓越する箇所において，ゼロではない値を持ち，数値振動がない箇所ではほとんどゼロとなることが分かる。**図-2（右）**には式(13)の数値振動 $\tilde{p}$ を含む間隙水圧 p（$=\bar{p}+\tilde{p}$）の分布を示す。圧密初期には，pには若干の数値振動が見られるものの，**図-1（左）**と比較するとかなり小さい。この上で，振動成分である $\tilde{p}$ を取り除いた $\bar{p}$ を解として採用することで，**図-1（右）**に示した数値振動のない数値解を得ることができる。

4.　まとめ

本稿では，まずはFull formulationに基づく土－水連成解析の安定性について，inf-sup条件の観点から考察した。その結果は，地盤の変位と間隙水圧の二つを独立変数として扱うu-p定式化と比べ，地盤の変位と間隙水圧に加えて浸透流速の三つを独立変数とするFull formulation（本稿で対象としたのはu-w-p定式化）の方が数値的な安定性は確保しやすいことが明らかとなった。u-p定式化では地盤変位の方が間隙水圧よりも一つ次数の大きい補間関数が通常は用いられるが，これがFull formulationでも十分に機能することを示すとともに，この制約を緩められる可能性を示唆するものとなった。ただし，ここで述べる安定性は独立変数の空間近似に関するものであり，時間積分の安定性については議論していないことに注意が必要である。

上記の考察の下で，本稿では地盤変位と間隙水圧に同次数の形状関数を利用し，VMSによる安定化を施した数値解析手法を一次元の圧密問題に適用した。その計算結果は，典型的な土ー水連成解析においても，地盤変位と間隙水圧の同次補間に起因する数値振動をVMSによって首尾よく抑制できること示した。

参考文献

[1] T. Noda and T. Toyoda: Development and verification of a soil–water coupled finite deformation analysis based on u–w–p formulation with fluid convective nonlinearity, *Soils and Foundations*, Vol.59, No.4, pp.888-904, 2019.

[2] M. Fortin and F. Brezzi: *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer, 1991.

[3] T.J.R. Hughes, G.R. Feijóo, L. Mazzei and J-B. Quincy: The variational multiscale method-a paradigm for computational mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 166, pp.3-24, 1998.