

弾塑性動的応答解析に向けた 時間方向変分マルチスケール法の応用

Application of the Variational Multiscale Method in the Time Domain for Elasto-Plastic Dynamics

竹中一真¹⁾ Sharma Vikas²⁾ 藤澤和謙³⁾ 清水紫媛⁴⁾
Kazuma Takenaka, Vikas Sharma, Kazunori Fujisawa and Shion Shimizu

¹⁾学（農）京都大学 農学研究科 修士課程 1 年（〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町,
E-mail: takenaka.kazuma.88c@st.kyoto-u.ac.jp）

²⁾博（農）京都大学 農学研究科 特定助教（〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町,
E-mail: sharma.vikas.5a@kyoto-u.ac.jp）

³⁾博（農）京都大学 農学研究科 教授（〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町,
E-mail: fujisawa.kazunori.2s@kyoto-u.ac.jp）

⁴⁾修（農）京都大学 農学研究科 博士課程 2 年（〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町,
E-mail: shimizu.shion.23z@st.kyoto-u.ac.jp）

This paper presents the variational multiscale method (VMS) in the time domain. First, we show the rigorous formulation for the case of elastodynamics. Later, we demonstrate the effects of VMS through two benchmark problems: the single degree of freedom system (SDOF) and the impulsive load test. The numerical results show that implementing VMS in the temporal domain can significantly improve the accuracy of the time integration.

Key Words : Variational multiscale method (VMS), FEM, Discontinuous Galerkin method, Elastodynamics

1. はじめに

近年、ため池や農業用ダムの老朽化に伴い、南海トラフなどの大規模地震を想定した土構造物の安全性評価が一層重要となってきた。大地震を対象とした動的応答解析においては、長時間にわたり高精度かつ安定的な時間積分手法が要請される。高精度な時間積分を実現する手法としては、空間方向だけでなく時間方向にも有限要素を利用する Space-Time 有限要素法 (ST/FEM) が広く知られている。特に現在では、未知数を速度に限定した速度型 Space-Time 有限要素法 [1] (v-ST/FEM) や、その時間積分特性の制御を可能にした LC v-ST/FEM [2] が、高精度な時間積分を維持しながらも、従来課題とされてきた ST/FEM の高計算コスト問題を解消できる手法として注目を集めている。

上記に示した ST/FEM の手法は、いずれも無条件安定かつ 3 次精度以上の時間積分特性を有し、短時間の弾性解析ならば既に十分に高精度な解を得ることが可能である。しかし、土質材料で築造されたダムやため池は弾塑性体に分類され、材料の降伏点を境に物性が大きく変化する。従って弾塑性体の解析においては、その物性の急激な変化を長時間の解析においても正確に追従するために、これまで以上に高精度で安定的な時間積分が要求される。

そこで本論文では、時間方向に変分マルチスケール法 (VMS) を適用することで、時間積分のさらなる高度化を図る。VMS とは、未知数となる変位や速度を低

周波成分 (coarse scale) と高周波成分 (fine scale) に分解し、高周波成分を取り除くことにより解の安定化を計る手法のことである。空間方向における VMS の効果については既に多くの論文で研究が進められているが、時間方向への VMS の有効性は現在でも未解明である。そこで以下の章ではまず、動弾性問題において、時間方向に VMS を適用する際の定式化を示す。次に、簡単な一自由度振動系問題 (SDOF) の例を通して、時間方向における VMS の効果を検証した。最後に一次元衝撃力応答解析を行い、ST/FEM における時間方向の VMS の特性を考察した。

2. 動的応答問題の時間積分法

\mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{F} をそれぞれアセンブル後の質量マトリックス、剛性マトリックス、外力ベクトルとする。減衰項を考えない場合の動弾性問題は、一般的に以下の形式で表される。

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{V} \quad (2)$$

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0 \quad (3)$$

$$\mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0 \quad (4)$$

ただし、 $\mathbf{U} := \mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V} := \mathbf{V}(t)$ はそれぞれ時刻 t における節点変位ベクトル、節点速度ベクトルを表す。また、

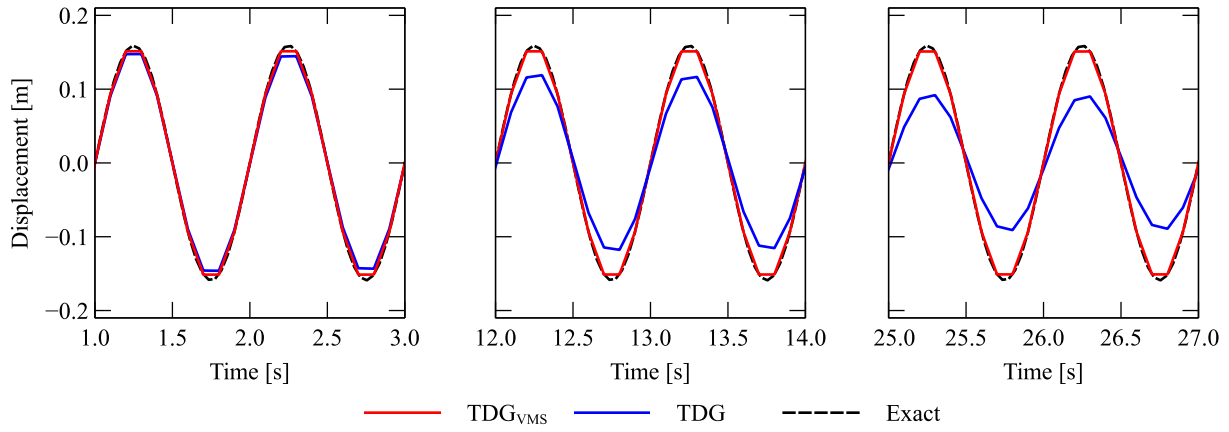


図-1 変位の計算結果

$\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0$ はそれぞれ節点変位, 節点速度の初期値である。ただし, 簡単のために, 以下では式 (1) と式 (2) をまとめて式 (5) で表す。

$$\mathcal{L}\mathbf{W} = \mathbf{G} \quad (5)$$

ここで, $\mathbf{W} := \{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$, $\mathbf{G} := \{\mathbf{0}, \mathbf{F}\}$ であって,

$$\mathcal{L}\mathbf{W} := \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{dt} - \mathbf{K}\mathbf{V} \\ \mathbf{M} \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{U} \end{array} \right\} \quad (6)$$

(1) 弱形式 (時間方向)

解析時間 $[0, T]$ を次式のように N 個の要素に分割する。

$$\begin{aligned} 0 &= t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_N = T \\ I_n &= (t_n, t_{n+1}), \Delta t_n = t_{n+1} - t_n \end{aligned} \quad (7)$$

ここに, $I_n, \Delta t_n$ はそれぞれ n 番目の時間要素, 時間幅を表す。式 (1) と式 (2) にそれぞれ仮想速度 $\delta\mathbf{V}$, 仮想変位 $\delta\mathbf{U}$ をかけて, 区間 I_n 上で積分すると, 以下の形式で表される弱形式を得る。

$$B_n(\delta\mathbf{W}, \mathbf{W}) = L(\delta\mathbf{W}) \quad (8)$$

ただし, $\delta\mathbf{W} := \{\delta\mathbf{U}, \delta\mathbf{V}\}$ であって,

$$B_n(\delta\mathbf{W}, \mathbf{W}) = (\delta\mathbf{W}, \mathcal{L}\mathbf{W})_{I_n} + \delta\mathbf{W}_n \cdot \mathbf{D}\mathbf{W}_n^+ \quad (9)$$

$$L(\delta\mathbf{W}) := (\delta\mathbf{W}, \mathbf{G})_{I_n} + \delta\mathbf{W}_n \cdot \mathbf{D}\mathbf{W}_n^- \quad (10)$$

ここに,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}, \mathbf{B})_{I_n} &:= \int_{I_n} \mathbf{A}^T \mathbf{B} dt \\ \mathbf{W}_n^\pm &:= \lim_{\epsilon \rightarrow \pm 0} \mathbf{W}(t_n + \epsilon) \\ \delta\mathbf{W}_n \cdot \mathbf{D}\mathbf{W}_n^\pm &:= \delta\mathbf{V}_n \cdot \mathbf{M}\mathbf{V}_n^\pm + \delta\mathbf{U}_n \cdot \mathbf{K}\mathbf{U}_n^\pm \end{aligned} \quad (11)$$

である。部分積分法を用いることにより, 式 (9) は次式で表せる。

$$B_n(\delta\mathbf{W}, \mathbf{W}) := (\mathcal{L}^* \delta\mathbf{W}, \mathbf{W})_{I_n} + \delta\mathbf{W}_{n+1} \cdot \mathbf{D}\mathbf{W}_{n+1}^- \quad (12)$$

$$\mathcal{L}^* \delta\mathbf{W} := \left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{K} \frac{d\delta\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{K}\delta\mathbf{V} \\ -\mathbf{M} \frac{d\delta\mathbf{V}}{dt} - \mathbf{K}\delta\mathbf{U} \end{array} \right\} \quad (13)$$

である。

(2) Variational multiscale method

節点変位と節点速度を Coarse scale 成分 ($\bar{\cdot}$) と Fine scale 成分 ($\tilde{\cdot}$) に分割する。

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \bar{\mathbf{W}} + \tilde{\mathbf{W}} \\ \delta\mathbf{W} &= \delta\bar{\mathbf{W}} + \delta\tilde{\mathbf{W}} \end{aligned} \quad (14)$$

これらを式 (8) に代入すると, Coarse scale に関する方程式と Fine scale に関する方程式が得られる。

1. Coarse scale

$$B_n(\delta\bar{\mathbf{W}}, \bar{\mathbf{W}}) + (\mathcal{L}^* \delta\bar{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{W}})_{I_n} + \delta\bar{\mathbf{W}}_{n+1} \cdot \mathbf{D}\tilde{\mathbf{W}}_{n+1}^- = L(\delta\bar{\mathbf{W}}) \quad (15)$$

2. Fine scale

$$B_n(\delta\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{W}}) = -(\delta\tilde{\mathbf{W}}, \mathcal{R}\bar{\mathbf{W}})_{I_n} - \delta\tilde{\mathbf{W}}_n \cdot \mathbf{D}[[\bar{\mathbf{W}}]]_n + \delta\tilde{\mathbf{W}}_n \cdot \mathbf{D}\tilde{\mathbf{W}}_n^- \quad (16)$$

ここに, $[[\bar{\mathbf{W}}]]_n := \bar{\mathbf{W}}_n^+ - \bar{\mathbf{W}}_n^-$ であって,

$$\mathcal{R}\mathbf{W} := \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{dt} - \mathbf{K}\mathbf{V} \\ \mathbf{M} \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F} \end{array} \right\} \quad (17)$$

ただし, $\mathcal{R}\mathbf{W}$ は残差を表す。

(3) Finite Element Method (時間領域)

本論文では, Coarse scale には線形関数, Fine scale には 2 次のバブル関数を用いて近似を行う。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}} &= \bar{\mathbf{U}}_n^+ T_1 + \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^- T_2 \\ \bar{\mathbf{V}} &= \bar{\mathbf{V}}_n^+ T_1 + \bar{\mathbf{V}}_{n+1}^- T_2 \\ \tilde{\mathbf{U}} &= \tilde{\mathbf{U}}_1 \tilde{T}_1 \\ \tilde{\mathbf{V}} &= \tilde{\mathbf{V}}_1 \tilde{T}_1 \end{aligned} \quad (18)$$

ここに, T_1, T_2, \tilde{T}_1 は,

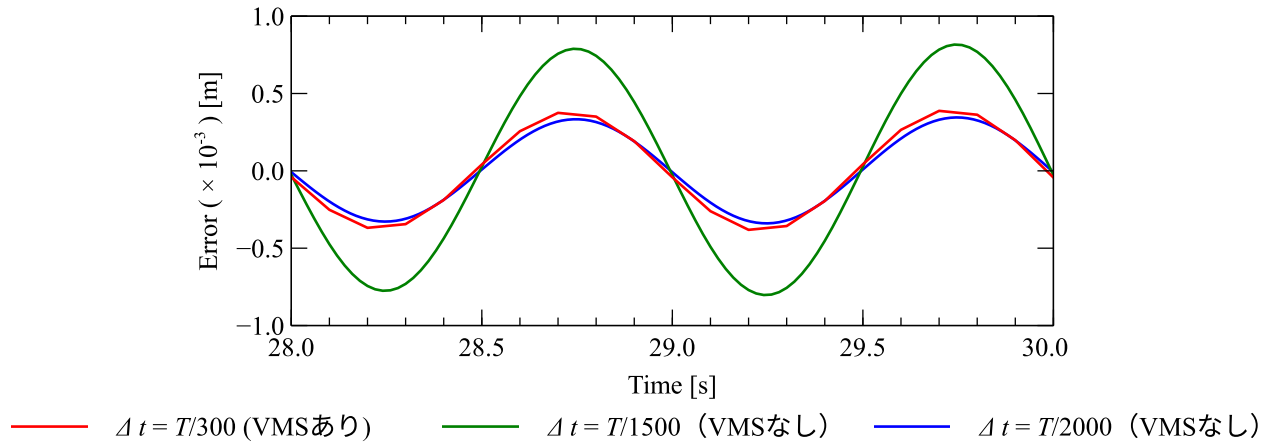


図-2 理論解との変位の誤差

$$T_1 = \frac{1-\theta}{2}, \quad T_2 = \frac{1+\theta}{2}, \quad \tilde{T}_1 = 1-\theta^2 \quad (19)$$

である．なお θ は、 I_n 内で定められる局所座標 ($-1 \leq \theta \leq +1$) であり、 $\theta = -1$ が時刻 t_n 、 $\theta = +1$ が時刻 t_{n+1} に対応する．式 (18) を式 (15)、式 (16) に代入し、Fine scale 成分 ($\tilde{\mathbf{U}}_1, \tilde{\mathbf{V}}_1$) を消去すると、最終的に以下の Coarse scale に関する連立方程式を得る．

$$\mathbf{P}_{ab} \mathbf{M} \tilde{\mathbf{V}}_b + \mathbf{Q}_{ab} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{U}}_b + \mathbf{R}_{ab} \mathbf{M} \tilde{\mathbf{U}}_b = \{\mathbf{S}\} \quad (20)$$

$$\mathbf{X}_{ab} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{V}}_b + \mathbf{Y}_{ab} \mathbf{M} \tilde{\mathbf{V}}_b + \mathbf{Z}_{ab} \mathbf{K} \tilde{\mathbf{U}}_b = \{\mathbf{T}\} \quad (21)$$

ここに、 $a, b = 1, 2$ であり、同一項で同じ文字が 2 回繰り返されている場合はその文字について和を取ることを表す． $\{\mathbf{S}\}$ 、 $\{\mathbf{T}\}$ は、式 (1) における外力項と、変位、速度の初期値から構成されるベクトルである．また、 \mathbf{P}_{ab} 、 \mathbf{Z}_{ab} は、形状関数のみから構成される項である．節点速度と節点変位の下添字 b については、 $b = 1$ が t_n^+ における節点値、 $b = 2$ が t_{n+1}^- における節点値を表す．例えば、 $\tilde{\mathbf{V}}_1 = \tilde{\mathbf{V}}_n^+$ である．

3. 数値解析

(1) 一自由度振動系 (SDOF)

まず、VMS による時間積分精度の向上を確認するために時間方向のみの離散化が必要となる以下の一自由度振動系問題 (SDOF、図 3 を参照) に取り組んだ．

$$m \frac{dv(t)}{dt} + ku(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (22)$$

$$\frac{du(t)}{dt} - v(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (23)$$

$$u(0) = u_0 \quad (24)$$

$$v(0) = v_0 \quad (25)$$

ここに、 u は変位、 v は速度、 m は物体の質量、 k はバネの剛性値、 u_0 は変位の初期値、 v_0 は速度の初期値である．また、 Δt を時間要素幅とする．

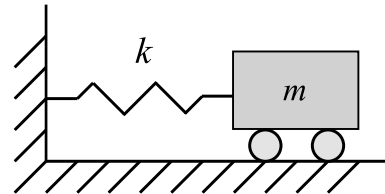


図-3 一自由度振動系

図 1 は、 $T = 30$ s、 $m = 1$ kg、 $k = 4\pi^2$ N/m、 $u_0 = 0$ m、 $v_0 = 1$ m/s、 $\Delta t = 0.1$ s の条件下での変位の解析結果を示したものであり、赤線が VMS を適用した場合 (TDG_{VMS})、青線が VMS を適用しない場合 (TDG)、黒線 (破線) が厳密解 (Exact) を示す．図 1 の左図より、解析開始後の数秒間においては、VMS の適用の有無で大きな差異は認められず、いずれの場合においても高精度な解を得られることが分かる．しかし、VMS を適用せずに得られた解の方では、時間の経過に伴い振幅が有意に減少することが確認できる．それに対して、VMS を適用して得られた解の振幅の大きさは、時間が経過しても解析開始直後とほとんど変わらないことが分かる．従って、VMS を時間方向に適用することで、精度を損なわずに長時間の解析が行えることが示された．

図 2 は、VMS の適用有無での誤差を比較したものである．図 1 の解析条件から Δt のみを変化させて解析を行い、VMS を適用する場合 (赤線) は $\Delta t = \frac{T}{300}$ 、VMS を適用しない場合 (青線・緑線) は $\Delta t = \frac{T}{1500}$ および $\Delta t = \frac{T}{2000}$ の条件で解析を行った．この結果から、VMS を適用した場合、従来の手法よりも時間要素数が 6 分の 1 程度であっても同程度の精度を持つ解析結果が得られることが分かる．

(2) 一次元動弾性問題

次に、動的応答解析における時間方向の VMS の有効性を確かめる．図 4 は、図 5 に示す片持梁の右端に衝撃力を作用させたときの速度の解析結果を示したものの

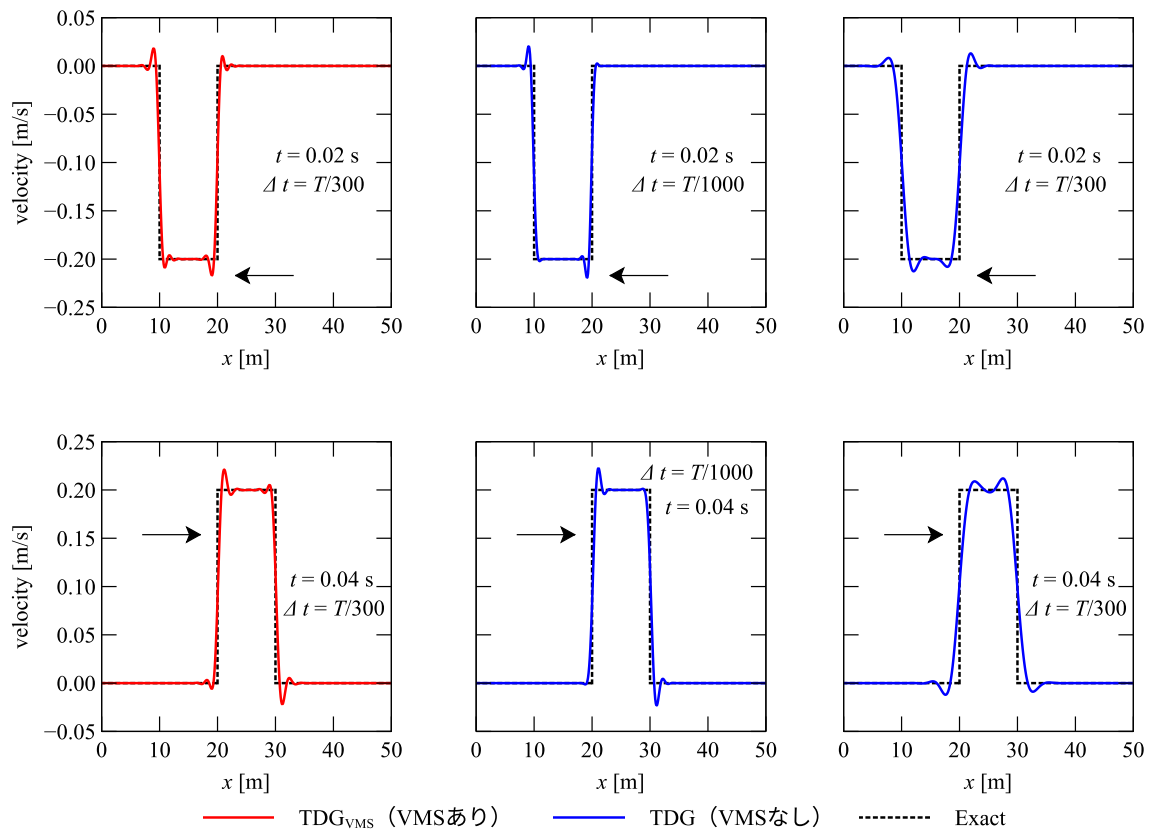


図-4 変形速度の解析結果

であり，図中に示す矢印は波の進行方向を表す。

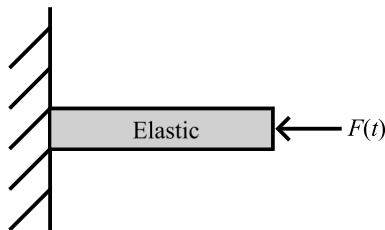


図-5 一次元動弾性問題

解析条件は，梁の長さ L を 50 m，要素長さ Δx を 0.1 m，解析時間 T を 0.1 s，ヤング率 E を 1.0×10^{10} Pa，密度 ρ を 2500 kg/m^3 とする．また，時間要素幅 Δt には，VMS を適用する場合（赤線）は $\Delta t = \frac{T}{300}$ ，VMS を適用しない場合（青線）は $\Delta t = \frac{T}{300}$ および $\Delta t = \frac{T}{1000}$ とした．梁右端に加える外力 $F(t)$ は以下の式 (26) で与える．

$$F(t) = \begin{cases} -1.0 \times 10^6 \text{ N} & (t \leq 0.005 \text{ s}) \\ 0.0 \text{ N} & (t > 0.005 \text{ s}) \end{cases} \quad (26)$$

図 4 の右図を見ると分かるように，VMS を適用しない場合，時間要素幅 $\Delta t = \frac{T}{300}$ では矩形波の不連続部分を正確に捉えられていないことが分かる．それに対して VMS を適用した場合は，時間要素幅が $\Delta t = \frac{T}{300}$ であっても，矩形波の不連続部分を正確に表現出来ていることが分かる．また，この結果は VMS を用いない場合の $\Delta t = \frac{T}{1000}$ のときの結果に相当するものであること

から，ST/FEM においても VMS を用いることで，時間積分精度を格段に向上できることが分かる。

4. 結言

本論文では，時間方向に変分マルチスケール法を適用する際の定式化を示した．また，SDOF 問題を通して，時間方向に VMS を適用することで，長時間の解析においても高精度に時間積分が行えることを示した．さらに，VMS を利用した衝撃力応答解析を通して，動的応答解析においても時間積分精度の向上が確認された．今後は，時空間両方向に VMS を適用すること，さらには弾塑性体の解析に対して VMS を適用することを予定している．

参考文献

- [1] V. Sharma, K. Fujisawa and A. Murakami. Velocity-based time-discontinuous Galerkin space-time finite element method for elastodynamics. *Soils and Foundations*, 58(2):491–510, 2018.
- [2] V. Sharma, K. Fujisawa and Y. Kuroda. Velocity-based space-time FEMs for solid dynamics problem: generalized framework for linear basis functions in time. *Computational Mechanics*, 74:913–936, 2024.