

摩擦を考慮した動的変形解析による stick-slip実験における境界条件の影響評価

Influence assessment of boundary condition on stick-slip experiment
by dynamic deformation analysis considering friction

安池亮¹⁾, 豊田智大²⁾, 野田利弘³⁾

Ryo Yasuike, Tomohiro Toyoda, and Toshihiro Noda

1) 修 (工) 名古屋大学 工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: yasuike.ryo.z9@s.mail.nagoya-u.ac.jp)

2) 博 (工) 名古屋大学 工学研究科 助教 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: toyoda@civil.nagoya-u.ac.jp)

3) 博 (工) 名古屋大学 工学研究科 教授 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: noda@civil.nagoya-u.ac.jp)

The validation of the friction model is performed by comparing the results of stick-slip experiment in which the contact surface is assumed that the friction force is homogeneous and uniform entirely. In this paper, the stick-slip experiment was reproduced as an initial boundary problem using a dynamic infinitesimal deformation analysis with super/sub-loading surface friction model. The results suggested that the loading position should be set as low as possible to control the effects of non-uniformity of the contact force distribution.

Key Words: Friction, Stick-slip, Elasto-plasticity

1. はじめに

地盤変形解析をはじめとした固体変形解析の境界条件は、変位既知のDirichlet境界条件と荷重既知のNeumann境界条件のいずれかが設定されるが、実際の接触面の応答は、固着状態とすべり状態の遷移現象を呈する。したがって、杭の貫入／引抜などの構造物と地盤の相互作用問題などを詳細に理解するためには、接触面の過渡的現象および接触力変動を記述可能な摩擦モデルおよびそれを導入した地盤の変形解析の構築が必要である。

そこで、著者らはこれまで、接触面の固着状態とすべり状態の過渡的変化および連続的な摩擦力変化を表現可能な上下負荷面摩擦モデル[1]を開発してきた。同モデルでは、動摩擦係数より大きな静止摩擦係数が接触面の構造（凝着作用）に起因して発現すると考え、構造の発展則により、静止摩擦から動摩擦への強度低下を塑性すべりに伴う構造の喪失とし、動摩擦から静止摩擦への強度増加を時間経過に伴う構造の回復として表現している。さらに著者らは同モデルを連続体の境界条件（接触力境界条件）として適用した動的微小変形弾性解析を開発し、単純せん断場における接触面上のすべり伝播解析に適用している[2,3]。

構成モデルの開発時には必ず力学試験が行われ、その結果に基づいたモデルのValidationがなされる。実施される力学試験は諸量の空間分布が時間変化する「初期値境界値問題」である一方、対象領域が均質かつ一様変形を示すという前提の下でモデルの妥当性検証が行われる。摩擦モデルの妥当性検証は、Ozaki et al.[4]によって行われて

おり、固定された平板上に置かれた試験体を板バネによって載荷させてstick-slipを発生させるplate-on-plate型試験機（図-1）が用いられている。本試験機の詳細は次章に述べるが、Ozaki et al.は試験体の上載荷重を変えた実験結果と、彼らが開発した下負荷面摩擦モデルを組み込んだ質点動力学計算結果を比較した摩擦モデルのValidationを行っている。このように、試験体の幾何形状や荷重の載荷位置などの「初期値境界値問題」としての効果や、stick-slip中の物体に作用する慣性力などの「初期値問題」としての効果を理解することは、摩擦モデルの妥当性検証において重要である。

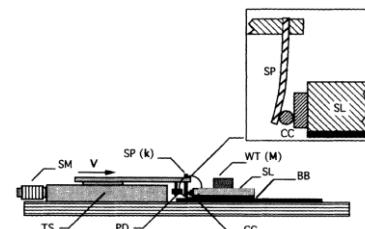


図-1 stick-slip 試験機の概形 (Heslot et al.[5]より)

そこで本稿では、著者らがこれまで開発してきた上下負荷面摩擦モデルを搭載した動的微小変形弾性解析により、plate-on-plate型のstick-slip実験を「初期値境界値問題」として見做して解くことで、同実験の境界値問題としての特性を把握し、質点系動力学問題（初期値問題）として扱うことの是非を論じる。具体的には、荷重の載荷位置を変えることで接触面上の応力分布が非一様化する効果が

系全体に及ぼす影響を評価し、実験実施に際しての注意点を示す。

2. Plate-on-plate型stick-slip実験の概要

ここでは、plate-on-plate型のstick-slip実験について概説する。Heslot et al.[5]が開発した試験機の概形は図-1のとおりである。本試験は、底面となる基盤上に2mm厚のBristol boardを敷き、その上にSlider (SL) となる物体 (1cm厚のジュラルミン) が設置され、その物体は底面に2mm厚のBristol boardが接着してある。また、おもり (WT) をSliderの上に載せることで接触面に作用する垂直抗力 (法線応力) を可変にしている。また、ステッピングモーター (SM) により水平方向に一定速度Vで移動するステージ (TS) の先に板バネ (SP) が取り付けられており、この板バネを介してSliderに水平荷重がかかる機構となっている。また、板バネがたわむことによる載荷点変化を低減するために円筒型のシリンダー (CC) が板バネの先に取り付けられている。

この試験機においてstick-slip現象は次の①～③の過程を繰り返すことで発生する。

- ① ステージの移動に伴い板バネがたわみながら物体に復元力が作用する (stick状態)
- ② 板バネの復元力が接触面の最大静止摩擦力を超過したときに、物体がすべり出す (slip状態)
- ③ あるところまですべると接触面の動摩擦力と板バネの復元力低下に伴いスライダが停止する (①～)

3. 摩擦を考慮した動的変形解析の概要および実験条件を再現するための計算処理

(1) 上下負荷面摩擦モデルを搭載した速度型動的微小変形弾性解析の概要

まず、本稿で使用した摩擦を考慮可能な動的変形解析について概説する。本解析手法は、一般的の速度型の運動方程式で記述される固体変形解析の荷重速度境界条件と変位速度境界条件に加え、物体に接した母材の速度を与える接触力境界条件を新たに導入した手法である(図-2)。



図-2 接触力境界を導入した境界条件

つまり、弱形式化した速度型運動方程式は以下となる。

$$\int_V \rho \ddot{v} \cdot \delta v \, dV + \int_V \dot{\sigma} \cdot \delta \dot{\varepsilon} \, dV = \int_V \dot{b} \cdot \delta v \, dV + \int_{S_t} \dot{t}_t \cdot \delta v \, dS + \int_{S_c} \dot{f}_c \cdot \delta v \, dS \quad (1)$$

ここに、 ρ は物体の密度、 $\dot{\sigma}$ は物体の応力速度テンソル、 \dot{b} は単位体積あたりの物体力速度、 \dot{t}_t は既知の荷重速度、 \dot{f}_c は接触力境界に作用する接触応力速度を表している。 \dot{v} は物体の変位速度、 δv は変位速度境界 S_v 上で $\delta v = \mathbf{0}$ を満たす仮想変位速度、 $\delta \dot{\varepsilon}$ は仮想ひずみ速度である。式(1)において接触力境界に由来する右辺第3項に対して、著者らが開発した弾塑性摩擦構成則、上下負荷面摩擦モデル[1]を適用し定式化を行う。同モデルに基づき、接触力境界面上の接触力速度 $\{\dot{f}_c\}$ は、次式で記述できる。

$$\{\dot{f}_c\} = \begin{cases} [\mathbf{C}^{ep}]\{\dot{v}^N\} + \mathbf{C}^c\{\dot{t}\} & \dots \text{負荷時} \\ [\mathbf{C}^e]\{\dot{v}^N\} & \dots \text{除荷時} \end{cases} \quad (2)$$

ここに、 $[\mathbf{C}^{ep}], [\mathbf{C}^e]$ は上下負荷面摩擦モデルに基づくマトリクスであり、 $\{\dot{t}\}$ は接触力境界面における接単位ベクトルである。また、接触力境界面上の節点における相対すべり速度 $\{\dot{v}^N\}$ は、未知の物体変位速度 $\{\dot{v}^N\}$ と既知の母材変位速度 $\{\dot{v}_m^N\}$ (本稿では、 $\{\dot{v}_m^N\} = \mathbf{0}$) を用いて、 $\{\dot{v}^N\} = \{\dot{v}\} - \{\dot{v}_m^N\}$ と表される。したがって、弱形式化した運動方程式(式(1))の右辺第3項の被積分項は以下のように記述される。ただし、ここでは接触力境界面上における物体の変位速度 $\{\dot{v}^N\}$ と母材の変位速度 $\{\dot{v}_m^N\}$ を系全体の要素の各節点の変位速度 $\{\dot{v}^N\}$ と母材の変位速度 $\{\dot{v}_m^N\}$ に拡張して記述する。 $[\tilde{N}]$ は有限要素法の形状関数マトリクスである。

$$\begin{aligned} \dot{f}_c \cdot \delta v &= \{\delta v^N\}^T \{[\tilde{N}]^T \{\dot{f}_c\}\} \\ &= \begin{cases} \{\delta v^N\}^T \left\{ \begin{array}{l} [\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^{ep}] [\tilde{N}] \{\dot{v}^N\} \\ \quad - [\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^{ep}] [\tilde{N}] \{\dot{v}_m^N\} + \mathbf{C}^c [\tilde{N}]^T \{\dot{t}\} \end{array} \right\} & \dots \text{負荷時} \\ \{\delta v^N\}^T \left\{ \begin{array}{l} [\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^e] [\tilde{N}] \{\dot{v}^N\} \\ \quad - [\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^e] [\tilde{N}] \{\dot{v}_m^N\} \end{array} \right\} & \dots \text{除荷時} \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

$\{\delta v\}$ の任意性を考慮し、アセンブリングすると、運動方程式の有限要素離散化式は次式で表現できる。

$$\mathbf{M}\{\ddot{v}^N\} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_c)\{\dot{v}^N\} = \{\dot{f}^0\} + \{\dot{f}^c\} \quad (4)$$

ここに、 \mathbf{M} 、 \mathbf{K} 、 $\{\dot{f}^0\}$ はそれぞれ縮約された全体質量マトリクス、全体剛性マトリクス、全体節点荷重ベクトルである。また、 $\mathbf{K}_c, \{\dot{f}^c\}$ は上下負荷面摩擦モデルに基づくマトリクス、荷重ベクトルであり、次のように表される。

$$\mathbf{K}_c = \begin{cases} \sum_{(e)} \int_{S_{c(e)}} [\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^{ep}] [\tilde{N}] \, dS & \dots \text{負荷時} \\ \sum_{(e)} \int_{S_{c(e)}} [\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^e] [\tilde{N}] \, dS & \dots \text{除荷時} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \{\dot{f}^c\} &= \begin{cases} \sum_{(e)} \int_{S_{c(e)}} \left\{ -[\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^{ep}] [\tilde{N}] \{\dot{v}_m^N\} + \mathbf{C}^c [\tilde{N}]^T \{\dot{t}\} \right\} \, dS & \dots \text{負荷時} \\ \sum_{(e)} \int_{S_{c(e)}} \left\{ -[\tilde{N}]^T [\mathbf{C}^e] [\tilde{N}] \{\dot{v}_m^N\} \right\} \, dS & \dots \text{除荷時} \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 $S_{c(e)}$ は要素境界毎の接触力境界、 $\Sigma_{(e)}$ はアセンブリング操作を表す。

以上を踏まえて、式(4)を躍度(加速度の物質時間微分)に線形性を仮定したWilson-θ法で陰的に解き[6]、次刻の状態を予測する。各節点に作用する接触力は、接触応力(1次のアイソパラメトリック要素で補間)のGauss積分により算出した。また、接触面上の各Gauss点で定義される物理量(接触応力、構造の程度、過圧密比、負荷状態)もまた、陰的に更新した。これにより、接触力境界面の状態(固着~すべり)に応じた接触力変動を考慮可能な動的変形解析を実現した。

(2) Stick-slip実験を動的微小変形弾性解析で行う際の計算処理

前章で概説したstick-slip実験を平面ひずみ条件を仮定した動的微小変形弾性解析で再現するために、解析対象の物体(Slider)は4節点により構成される四角形の要素を用いて空間離散化し、板バネは一次元バネ要素(バネ係数:k)でモデル化を行った(図-3)。つまり、解析対象の物体(Slider)を構成する全体節点番号に加えて、Driverを表すx方向の自由度 $u^{(ex)}$ を新たに一つ加え、載荷点となる節点(i)のx方向の自由度 $u_x^{(i)}$ と力がやり取りされているとした。

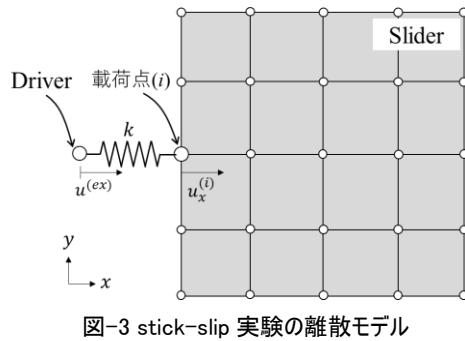


図-3 stick-slip実験の離散モデル

このとき、一般化したSlider~Driver系(Sliderを構成する全節点自由度+Driverのx方向自由度)の弱形式は、次式となる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \{\delta v^N\} \\ \{\delta v^{(ex)}\} \end{array} \right\}^T \\ & \left(\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \{\ddot{v}^N\} \\ \{\ddot{v}^{(ex)}\} \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} K - K_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \{v^N\} \\ \{v^{(ex)}\} \end{array} \right\} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \{0\} \\ \{u_x^{(i)}\} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \{\dot{f}^0\} + \{\dot{f}^c\} \\ \{\dot{f}^{(ex)}\} \end{array} \right\} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、実験ではステージを用いて板バネを既知の変位速度($v^{(ex)} = \text{const.}$)で動かすことを考慮すると、式(7)は縮約でき、方程式の自由度が元の離散化式(4)と同じになる。したがって、離散化式は次式に書き改められる。

$$M\{\ddot{v}^N\} + (K - K_c + K_s)\{v^N\} = \{\dot{f}^0\} + \{\dot{f}^c\} + k\{v^{(ex)}\} \quad (8)$$

ここに、 K_s は載荷点となる節点(i)のx方向の自由度に対応する対角成分にのみバネ定数kを持つ拡大係数マトリクスであり、右辺第3項は同自由度部分にのみ成分をもつベクトルである。本式を前節と同様、躍度線形性を仮定した

Wilson-θ法で陰的に解き、次刻の状態を予測する。

4. Stick-slip実験における載荷位置による接触力分布への影響

(1) 解析条件

本稿では、板バネを介して物体に作用する荷重の載荷位置を上下に変化させ、載荷位置が接触力分布に及ぼす影響を評価した。解析条件は、図-4に示す4要素からなる解析メッシュとし、載荷点の高さ h としたとき、この値が $h = 43.75\text{mm}$, $h = 87.5\text{mm}$, $h = 175\text{mm}$ となる3ケースに対して解析を実施した。この3ケースは解析対象の高さ h_0 に対して、 $h/h_0 = 1/8, 1/4, 1/2$ に対応する載荷位置である。

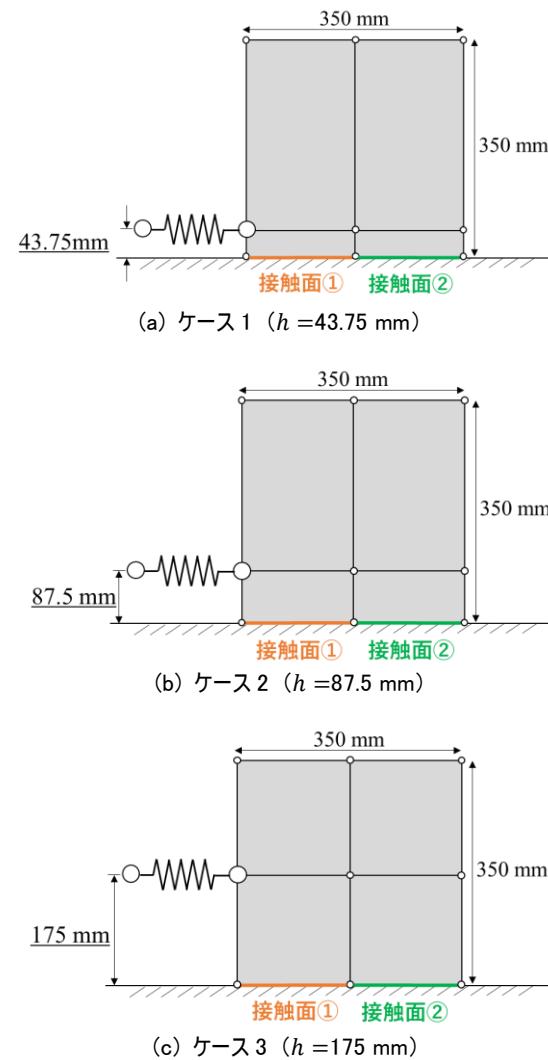


図-4 解析ケース

解析に使用したパラメータ、Slider(弾性体)の材料定数、外力条件、初期条件は、Ozaki et.al[4]の実験条件を一部参考にし、表-1のように設定した。単純化のため、摩擦係数は変化しない(構造が喪失・回復しない)パラメータの組とした。初期の接触面は固着状態(初期の摩擦係数が静止摩擦係数)を仮定しており、初期法線応力は自重に相当する値を与えた。Sliderはステンレスを仮定し、ステン

レス協会が発表しているステンレスの物性値[7]を参考に、質量 M が9.8kgになるような解析領域を設定した。

表-1 解析に使用したパラメータと初期条件

接触面の物性値	
静止摩擦係数 μ_s	0.4
動摩擦係数 μ_k	-
接線方向のペナルティ係数 α_t (kPa/mm)	1000
法線方向のペナルティ係数 α_n (kPa/mm)	1000
発展則パラメータ	
正規圧密度化指数 r (mm ⁻¹)	100
構造の喪失速度を規定する材料定数 κ (mm ⁻¹)	0.0
構造の喪失速度を規定する材料定数 m	-
構造の回復速度を規定する材料定数 ξ (s ⁻¹)	0.0
構造の回復速度を規定する材料定数 n	-
外力条件	
バネ定数 k (N/mm)	10
Driver速度 $v^{(ex)}$ (mm/s)	0.001
弾性体パラメータ	
弾性係数 E (N/m ²)	2.0×10^9
ボアソン比 ν	0.33
密度 ρ (g/cm ³)	8.0
初期条件	
初期の構造の程度 $1/R_0^*$	2.0
初期法線応力 f_{n0} (Pa)	274.68
初期接線応力 f_{t0} (Pa)	1.0×10^{-7}

(2) 解析結果と考察

3ケースについて、接触面①②に働く摩擦力 F_t とその合力の時刻歴、摩擦力 F_t －垂直抗力 F_n 関係をケース1から順に図-5～7に示す。摩擦力 F_t －垂直抗力 F_n 関係には、青破線ですべり上負荷面を明記しており、すべり上負荷面は、構造劣化の本解析条件において静止摩擦係数の傾きを持つCoulombのすべり基準に相当する直線となっている。各接触面に作用する摩擦力の時刻歴を見ると、載荷位置が高くなるにつれ(ケース1→ケース2→ケース3)、時間経過に伴い接触面①では摩擦力増分が上昇し、接触面②では摩擦力増分が減少している。これは、板バネの復元力と摩擦力の偶力モーメントにより物体が時計回りに回転することによる。すなわち、物体の接触面①では物体が床(母材)から離れようとして法線応力が減少する一方、接触面②は物体が床(母材)にめり込もうとして法線応力が増加する。よって、載荷位置が一番高いケース3では、載荷が進むにつれて大きなモーメントが物体に作用することで、接触面①での法線応力減少分の荷重を接触面②が負担した結果、接触面①②での荷重増分の差に明瞭な差が生じた。一方、載荷位置の低いケース1では、モーメントの影響が小さいため、接触面①と接触面②の

接触力空間上の経路差が一番少ない結果が得られた。このように、stick-slip試験の初期値境界値問題としての効果として載荷位置に応じた接触力分布の非一様化が明らかとなった。ケース1および2の摩擦力の合力の時刻歴に着目すると同じ経路を取っていることから、今回の2ケースの条件においてのみ接触面を要素挙動と見做してパラメータフィッティングをしても差し支えないことが示唆された。ただし、他の実験条件(例:接触面の摩擦係数が変化する実験、他の幾何形状を持つ物体を使用した実験)に関するさらなる検討が必要になる点を付記しておく。

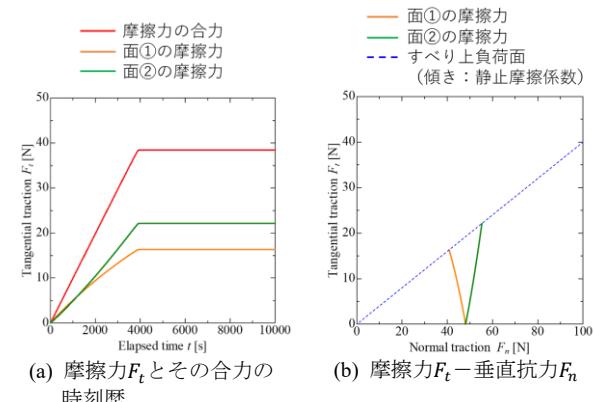


図-5 解析結果(ケース1)

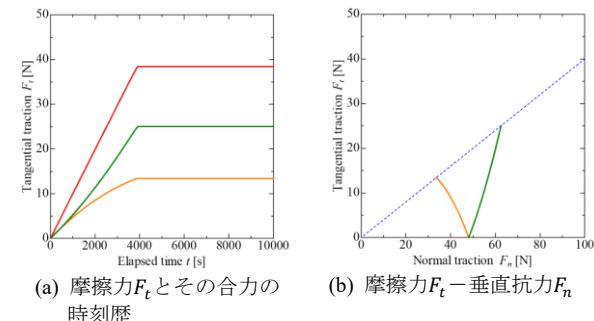


図-6 解析結果(ケース2)

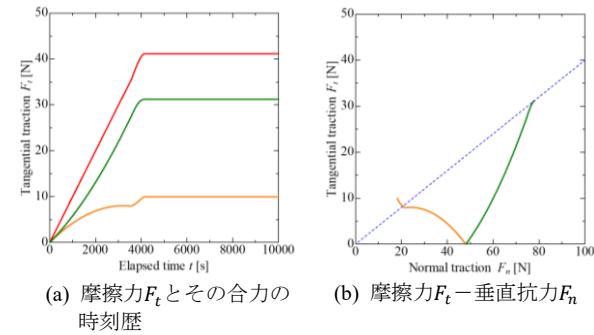


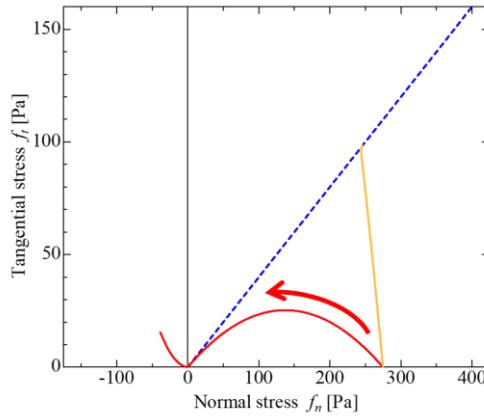
図-7 解析結果(ケース3)

ここで、ケース3の接触面①における摩擦力が不可能領域(静止摩擦係数以上の領域)を取り、摩擦力の合力が他のケースのそれより大きな値となったこと(図-7)について、説明を与える。接触面①の摩擦力導出に用いた図-8における2つのGauss点の接線応力 f_t －法線応力 f_n 関係を図-

9に示す。図-9には、すべり上負荷面（静止摩擦係数に相当する傾きの直線）を明記している。ただし、法線応力 f_n は図-8に示す母材から物体に向く外向き法線ベクトル \mathbf{n} と接触応力 \mathbf{f} の内積 $f_n = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ となっている。この結果を見ると、モーメントの影響によりGauss点[a]における f_n が徐々に減少してゆき、ついには法線応力が負値となっている。本解析手法は、摩擦力を境界条件として導入しているため、一般的な接触解析とは異なり、法線応力が0となることはない。法線応力が負値になったことはその接触面で物体が母材から離れ、接触面に引張力が作用したことを示すが、 f_n が常に正であることを前提に定式化されている上下負荷面摩擦モデルにとって、ケース3は摩擦構成式の適用域外での条件である。したがって、物体が浮き上がりてしまうケース3の試験条件に対しては、接触面積が変化しない初期値問題や構成式を考えることはできない。物体の浮き上がり挙動まで評価した解析を行うためには、接触面での接触判定を行う接触解析での計算が求められる。



図-8 接触応力を取り出した Gauss 点

図-9 接線応力 f_t - 法線応力 f_n

以上の知見を踏まえると、図-1に示したstick-slip試験を行う上で、物体が回転することによる接触力分布の非一様化を避けるためには、板バネの載荷位置を可能な限り低い位置に設定することが有効であることが示唆された。これにより、初期値問題あるいは構成式応答として摩擦挙動を捉える上で、境界値問題としての効果が抑制することができる。

5. おわりに

本稿では、上下負荷面摩擦モデルを搭載する動的微小変形弾性解析を拡張した解析手法を用いて、構成式研究

におけるplate-on-plate型stick-slip実験の「初期値境界値問題」としての効果を数値的に検討した。特に本稿では、載荷位置が齟する影響を検証した結果、たとえ安定すべりを呈する定常的な条件であっても、物体の載荷位置によって接触面の法線応力分布が非一様化することがわかった。したがって、板バネの載荷位置を可能な限り低い位置に設定することで境界値問題としての効果を抑制され、接触面全体を要素挙動と見做せることが示唆された。今後は、本稿で取り上げたstick-slip試験機を用いた摩擦実験を行う予定であり、本稿で得られた知見を元に上下負荷面摩擦モデルの表現能力の検証を行う。さらには、実験を通じて上下負荷面摩擦モデルの各種パラメータの持つ物理的特性を把握することで、固体同士の摩擦だけでなく地盤材料などの粒状体と固体同士の摩擦において現れる諸現象を表現可能な摩擦モデルへと改良することを見込んでいる。

謝辞: 本研究の実施にあたり、科学研究費補助金（基盤研究（B）：課題番号 22H01586）の助成を受けた。

参考文献

- [1] Toyoda, T., Yasuike, R. and Noda, T.: Super/subloading surface model for constitutive mode of friction, *Tribol. Int.*, Vol. 191, 109080, 2024.
- [2] 安池亮, 豊田智大, 野田利弘: 上下負荷面摩擦モデルの初期値境界値問題への適用と単純せん断場でのすべり伝播解析, 第 59 回地盤工学研究発表会, 23-10-4-07, 2024.
- [3] 安池亮, 豊田智大, 野田利弘(2024): 上下負荷面摩擦モデルによる stick-slip 現象および非一様なすべり伝播過程の数値解析, 第 36 回中部地盤工学シンポジウム, 2024.
- [4] Ozaki, S., Ito, C. and Hashiguchi, K.: Experimental verification of rate-dependent elastoplastic analogy friction model and its application to FE analysis, *Tribol. Int.*, Vol. 64, pp.164-177, 2013.
- [5] Heslot, F., Baumberger, T., Perrin, P., Caroli, B. and Caroli, C.: Creep, stick-slip, and dry-friction dynamics: Experiments and a heuristic model, *Phys. Rev. E*, Vol. 49, pp. 4973-4988, 1994.
- [6] Noda, T., Asaoka, A. and Nakano, M (2008).: Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol.48, No.6, pp.771-790.
- [7] ステンレス協会: ステンレスの誘電率, 透磁率, 熱膨張率などの物理的性質について, 2011. <<https://www.jssa.gr.jp/contents/faq-article/q6/>> (最終閲覧日: 2025年4月3日)