

# MFSを用いた平板におけるSHガイド波の数値計算

## Numerical computation of SH guided waves in plates using MFS

古川陽<sup>1)</sup> 菅江隆亨<sup>2)</sup>

Akira Furukawa and Takaaki Sugae

<sup>1)</sup>博(工) 北海道大学 大学院工学研究院 准教授 (〒 060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目, E-mail: afurukawa@eng.hokudai.ac.jp)

<sup>2)</sup>北海道大学 大学院工学院 修士課程 (〒 060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目, E-mail: sugae.takaaki.h0@elms.hokudai.ac.jp)

The method of fundamental solutions (MFS) is a mesh-free technique for numerically solving partial differential equations. In this study, we extend MFS to analyze SH guided waves propagating in a plate. We use fundamental solutions to approximate the wave field in the region with a surface defect, and modal solutions in the undamaged part of the plate. Numerical examples demonstrate that the proposed method effectively simulates SH guided wave scattering and allows for the extraction of scattering characteristics through the amplitudes of incident and scattered waves.

**Key Words :** The method of fundamental solutions, Guided wave, SH wave, Wave scattering

### 1. はじめに

超音波探傷検査では、検査対象となる部材・材料に弾性波を入射し、観測信号から欠陥の有無や大きさ、形状の評価を行う。弾性波が板や円筒管などの長尺な部材に入射すると、ガイド波と呼ばれる伝搬モードが現れる [1]。ガイド波はエネルギーの散逸が少ないという性質を持ち、この性質を活かすことで大型構造物に対する広範囲な検査の実現が期待できる。一般に、ガイド波に関する伝搬、反射、および散乱現象は複雑であり、その理解には数値シミュレーションが有効である。ガイド波の数値シミュレーションでは、多くの場合、FEM (finite element method; 有限要素法) や BEM (boundary element method; 境界要素法) といったメッシュ分割型の手法が適用されている [2,3,4,5]。これらのメッシュ分割型の手法では、解析領域やその境界を離散化して解析を行う。

これに対して、MFS (the method of fundamental solutions; 基本解近似解法) は、メッシュフリー型の数値シミュレーション手法の代表例として知られている [6]。MFS は、対象とする問題の支配方程式の基本解を用いて近似解を表現し、解表現に含まれる近似係数を境界条件を満たすように選点法によって決定する。このとき、基本解の源点は解析領域の補領域に配置されるため、基本解に含まれる特異性の取り扱いを回避することができる。MFS は領域や境界の要素分割を必要とせず、有限要素法と比較して解析における未知量が少ないという利点を持つ。加えて、MFS は基本解の特異性を扱う必要がないため、境界要素法と比較して数値計算の実装が容易であるという利点も持つ。しかしながら、MFS をガイド波の数値シミュレーションに適用した例はほとんど報告されていない。

以上を踏まえ、本研究では、平板を対象に SH ガイド波の数値計算のための MFS を開発する。そして、開発

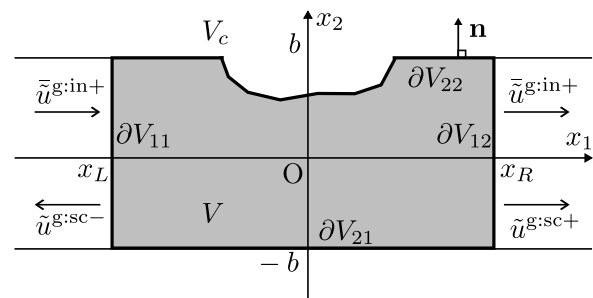


図-1 解析対象とする平板

した MFS を用いて、欠陥を有する平板に対する SH ガイド波の散乱解析を実施する。これにより、ガイド波の数値シミュレーションに対する MFS の有効性を検討する。以下では、特に断りのない限り、ギリシャ文字の下付き添え字は 1,2 をとる。また、1 つの項に繰り返し現れる下付き添え字に対しては、総和規約を適用する。

### 2. 解析手法

平板における SH ガイド波の散乱問題に対する MFS の適用について考える。解析対象とする問題を図-1 に示す。同図に示すように、解析対象は  $x_1$  軸方向に無限の長さを持ち、 $x_2$  方向に  $2b$  の厚さを持つ平板とする。この平板は等方で均質な線形弾性体で構成され、平面ひずみ条件を仮定する。座標系は右手系とし、 $x_3$  軸は紙面に垂直な方向 (面外方向) とする。また、 $V$  は MFS で取り扱う解析領域、 $V_c$  はその補領域を表す。解析領域  $V$  の境界は、 $x_1$  軸と直交する境界  $\partial V_{11}$ ,  $\partial V_{12}$  と、平板の表面に対応する境界  $\partial V_{21}$ ,  $\partial V_{22}$  によって構成される。欠陥は境界  $\partial V_{22}$  に存在し、これにより散乱波が発生する。

MFS の適用において、面外方向変位  $\tilde{u}_3(\mathbf{x}, \omega)$  は以下の近似式で表現される。

$$\tilde{u}_3(\mathbf{x}, \omega) := \sum_{k=1}^{N_y} \tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^k, \omega) \tilde{c}^k; \mathbf{x} \in V \cup \partial V, \mathbf{y}^k \in V_c \quad (1)$$

ここに、 $\tilde{c}^k$  は近似係数を表す。 $\omega$  は角周波数であり、周波数  $f$  を用いて  $\omega = 2\pi f$  で与えられる。また、 $\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  は面外波動問題に対する基本解であり、次式で与えられる [7]。

$$\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_T r) \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{x}$  は観測点、 $\mathbf{y}$  は源点を表す。また、 $\mu$  はせん断弾性係数、 $k_T$  は横波の波数を表し、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  および  $i = \sqrt{-1}$  である。加えて、 $H_n^{(1)}(\cdot)$  は  $n$  次の第 1 種 Hankel 関数である。式 (1) を用いれば、表面力は次式で表現される。

$$\tilde{t}_3(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{k=1}^{N_y} \tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^k, \omega) \tilde{c}^k; \mathbf{x} \in \partial V, \mathbf{y}^k \in V_c \quad (3)$$

ここに、 $\tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$  は表面力に対する基本解であり、次式で与えられる。

$$\tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \mathcal{T}^{(n)} \tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \quad (4)$$

ただし、 $\mathcal{T}^{(n)}$  は以下に示す表面力作用素である。

$$\mathcal{T}^{(n)} = \mu n_\beta(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_\beta} \quad (5)$$

ここに、 $n_\beta(\mathbf{x})$  は境界上の単位外向き法線ベクトルを表す。

解析領域  $V$  を除く平板内部には入射波と散乱波が存在し、これらは SH ガイド波の重ね合わせによって表現される。具体的には、以下の式を用いる。

$$\tilde{u}_3^{\text{g:in}+}(\mathbf{x}, \omega) = \tilde{\Phi}^{P+}(\mathbf{x}, \omega) \tilde{d}^{P+} \quad (6)$$

$$\tilde{u}_3^{\text{g:sc}\pm}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{p=0}^{N_g} \tilde{\Phi}^{p\pm}(\mathbf{x}, \omega) \tilde{d}^{p\pm} \quad (7)$$

ただし、 $(\cdot)^{\text{in}}$  は入射波、 $(\cdot)^{\text{sc}}$  は散乱波に関する物理量を、 $(\cdot)$  は既知の物理量を表す。 $\tilde{d}^{p\pm}$  はガイド波の振幅に対応する近似係数である。また、 $\tilde{\Phi}^{p\pm}(\mathbf{x}, \omega)$  はガイド波の伝搬モードを表現する基底関数であり、次式で与えられる。

$$\tilde{\Phi}^{p\pm}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2} (e^{i\alpha^p x_2} + e^{i\alpha^p (2b-x_2)}) e^{\pm i k^p x_1} \quad (8)$$

ただし、

$$(k^p)^2 + (\alpha^p)^2 = k_T^2 \quad (9)$$

$$\alpha^p = \frac{p\pi}{2b} \quad (10)$$

である。加えて、 $N_g$  は最大モード次数を表し、次式を満たす最大の整数である。

$$0 \leq N_g < \frac{2bk_T}{\pi} \quad (11)$$

一方、 $P$  は入射波のモード次数であり、次式を満たす整数である。

$$0 \leq P \leq N_g \quad (12)$$

境界  $\partial V_{11}$ ,  $\partial V_{12}$  における入射波および散乱波の表面力は、それぞれ以下の式で与えられる。

$$\tilde{t}_3^{\text{g:in}+}(\mathbf{x}, \omega) = \tilde{\Psi}^{P+}(\mathbf{x}, \omega) \tilde{d}^{P+} \quad (13)$$

$$\tilde{t}_3^{\text{g:sc}\pm}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{p=0}^{N_g} \tilde{\Psi}^{p\pm}(\mathbf{x}, \omega) \tilde{d}^{p\pm} \quad (14)$$

ここに、

$$\tilde{\Psi}^{p\pm}(\mathbf{x}, \omega) = \mathcal{T}^{(n)} \tilde{\Phi}^{p\pm}(\mathbf{x}, \omega) \quad (15)$$

である。

これまでに示した波動場の表現に含まれる近似係数  $\tilde{c}^k, \tilde{d}^{p\pm}$  は、選点  $\mathbf{x}^i$  において境界条件を満足するように決定される。選点  $\mathbf{x}^i$  は、境界  $\partial V_{\alpha\beta}$  に対して  $N_{\alpha\beta}$  個配置する。境界  $\partial V_{11}$ ,  $\partial V_{12}$  における境界条件は、変位と応力の連続条件とする。これらは以下の式で与えられる。

$$\tilde{u}_3(\mathbf{x}^i, \omega) = \tilde{u}_3^{\text{g:in}+}(\mathbf{x}^i, \omega) + \tilde{u}_3^{\text{g:sc}-}(\mathbf{x}^i, \omega); \mathbf{x}^i \in \partial V_{11} \quad (16)$$

$$\tilde{t}_3(\mathbf{x}^i, \omega) = -\tilde{t}_3^{\text{g:in}+}(\mathbf{x}^i, \omega) - \tilde{t}_3^{\text{g:sc}-}(\mathbf{x}^i, \omega); \mathbf{x}^i \in \partial V_{11} \quad (17)$$

$$\tilde{u}_3(\mathbf{x}^i, \omega) = \tilde{u}_3^{\text{g:in}+}(\mathbf{x}^i, \omega) + \tilde{u}_3^{\text{g:sc}+}(\mathbf{x}^i, \omega); \mathbf{x}^i \in \partial V_{12} \quad (18)$$

$$\tilde{t}_3(\mathbf{x}^i, \omega) = -\tilde{t}_3^{\text{g:in}+}(\mathbf{x}^i, \omega) - \tilde{t}_3^{\text{g:sc}+}(\mathbf{x}^i, \omega); \mathbf{x}^i \in \partial V_{12} \quad (19)$$

一方、境界  $\partial V_{21}$ ,  $\partial V_{22}$  は平板の表面であるため、以下に示す表面力フリーの境界条件を与える。

$$\tilde{t}_3(\mathbf{x}^i, \omega) = 0; \mathbf{x}^i \in \partial V_{21} \quad (20)$$

$$\tilde{t}_3(\mathbf{x}^i, \omega) = 0; \mathbf{x}^i \in \partial V_{22} \quad (21)$$

式 (16)-(21) に前述の近似表現を代入すれば、以下に示す連立 1 次方程式が得られる。

$$\sum_{k=1}^{N_y} \tilde{U}(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^k, \omega) \tilde{c}^k - \sum_{p=0}^{N_g} \tilde{\Phi}^{p-}(\mathbf{x}^i, \omega) \tilde{d}^{p-} = \tilde{\Phi}^{P+}(\mathbf{x}^i, \omega) \tilde{d}^{P+}; \mathbf{x}^i \in \partial V_{11} \quad (22)$$

$$\sum_{k=1}^{N_y} \tilde{T}(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^k, \omega) \tilde{c}^k + \sum_{p=0}^{N_g} \tilde{\Psi}^{p-}(\mathbf{x}^i, \omega) \tilde{d}^{p-} = -\tilde{\Psi}^{P+}(\mathbf{x}^i, \omega) \tilde{d}^{P+}; \mathbf{x}^i \in \partial V_{11} \quad (23)$$

$$\sum_{k=1}^{N_y} \tilde{U}(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^k, \omega) \tilde{c}^k - \sum_{p=0}^{N_g} \tilde{\Phi}^{p+}(\mathbf{x}^i, \omega) \tilde{d}^{p+} = \tilde{\Phi}^{P+}(\mathbf{x}^i, \omega) \tilde{d}^{P+}; \mathbf{x}^i \in \partial V_{12} \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^{N_y} \tilde{T}(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^k, \omega) \tilde{c}^k + \sum_{p=0}^{N_g} \tilde{\Psi}^{p+}(\mathbf{x}^i, \omega) \tilde{d}^{p+} = -\tilde{\Psi}^{P+}(\mathbf{x}^i, \omega) \tilde{d}^{P+}; \mathbf{x}^i \in \partial V_{12} \quad (25)$$

$$\sum_{k=1}^{N_y} \tilde{T}(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^k, \omega) \tilde{c}^k = 0; \mathbf{x}^i \in \partial V_{21} \quad (26)$$

$$\sum_{k=1}^{N_y} \tilde{T}(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^k, \omega) \tilde{c}^k = 0; \mathbf{x}^i \in \partial V_{22} \quad (27)$$

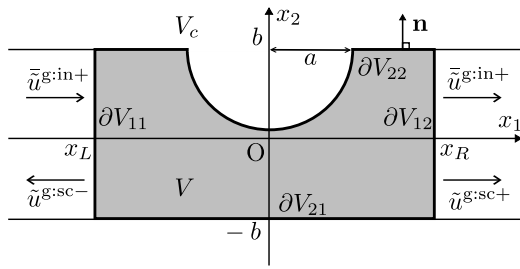


図-2 表面に欠陥のある平板

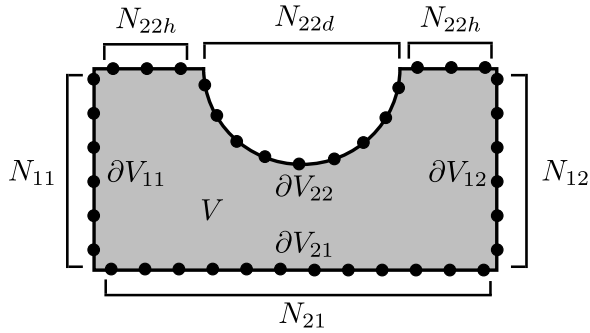


図-3 各境界における選点数

この連立1次方程式を解くことで、近似係数を得ることができる。得られた近似係数のうち、 $\tilde{d}^{p\pm}$  はガイド波の伝搬モードごとの振幅を表す。これらの振幅  $\tilde{d}^{p\pm}$  と入射波の振幅  $\tilde{d}^{p+}$  の比を考えることで、欠陥によるガイド波の散乱特性を評価することができる。これは、次式で与えられる。

$$r_R^p = \left| \frac{\tilde{d}^{p-}}{\tilde{d}^{p+}} \right| \quad (28)$$

$$r_T^p = \left| \frac{\tilde{d}^{p+}}{\tilde{d}^{p+}} \right| \quad (29)$$

ここに、 $r_R^p$  および  $r_T^p$  は、入射波を基準とした反射方向および透過方向に対応する振幅比を表す。

### 3. 数値解析例

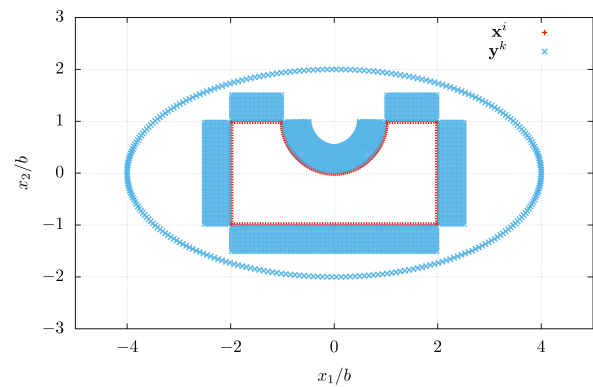
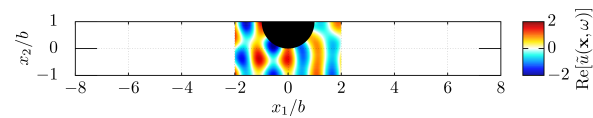
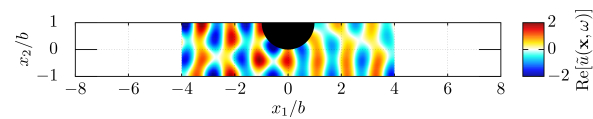
#### (1) 解析条件

図-2に解析モデルを示す。同図に示すように、解析対象は表面に半径  $a$  の半円形状の欠陥を有する平板とする。選点  $\mathbf{x}^i$  の数と配置の関係は図-3に示す通りとし、同図に示す各区間に等間隔に配置する。なお、 $N_{22} = N_{22d} + 2N_{22h}$  である。また、源点  $\mathbf{y}^k$  は、原点  $O$  を中心とする長半径  $4b$ 、短半径  $2b$  の楕円上に  $N_x$  個、それぞれの選点からその点における法線ベクトルの方向に10個ずつ配置する。このとき、源点  $\mathbf{y}^k$  の総数は  $N_y = 11N_x$  となる。

本節に示す数値解析例では、解析領域の寸法を  $b = 1$  で与えた。また、 $x_R = 2, 4, 8, 16$ 、および  $x_L = -x_R$  とした。欠陥の寸法は  $a = 1$  とした。平板の密度は  $\rho = 1$ 、せん断弾性係数は  $\mu = 1$  とした。周波数は  $f = 0.9$  とした。この解析条件における最大モード次数は  $N_g = 3$  となり、入射波のモード次数は  $P = 0$  とした。表-1に、各

表-1 選点と源点の数 ( $x_R = 2, 4, 8, 16$ )

	$x_R$	2	4	8	16
$N_x$		280	440	760	1400
$N_y$		3080	4840	8360	15400
$N_{11}$		40	40	40	40
$N_{12}$		40	40	40	40
$N_{21}$		80	160	320	640
$N_{22}$		120	200	360	680
$N_{22d}$		80	80	80	80
$N_{22h}$		40	120	280	600

図-4 選点と源点の配置 ( $x_R = 2$ )図-5 MFSによって得られた変位  $\text{Re}[\tilde{u}(\mathbf{x}, \omega)]$  ( $x_R = 2$ )図-6 MFSによって得られた変位  $\text{Re}[\tilde{u}(\mathbf{x}, \omega)]$  ( $x_R = 4$ )

解析条件における選点と源点の数を示す。さらに、図-4には  $x_R = 2$  に対する選点と源点の配置を示す。なお、連立1次方程式の解法には直交マッチング追跡 (OMP) [8] を適用し、近似解を構成する源点の数が  $N_x$  と等しくなるまで反復計算を行った。

#### (2) 解析結果

まず、MFSによって得られた波動場の計算結果を確認する。図-5、図-6、および図-7に、 $x_R = 2, 4, 8$  に対する変位の実部  $\text{Re}[\tilde{u}(\mathbf{x}, \omega)]$  を示す。これらの図に示す

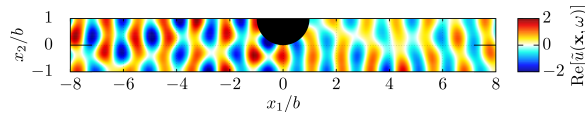


図-7 MFS によって得られた変位  $\text{Re}[\tilde{u}(\mathbf{x}, \omega)]$  ( $x_R = 8$ )

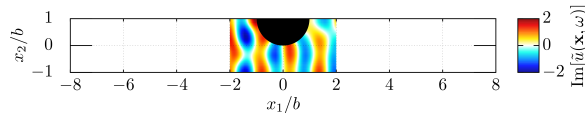


図-8 MFS によって得られた変位  $\text{Im}[\tilde{u}(\mathbf{x}, \omega)]$  ( $x_R = 2$ )

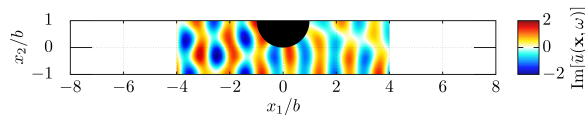


図-9 MFS によって得られた変位  $\text{Im}[\tilde{u}(\mathbf{x}, \omega)]$  ( $x_R = 4$ )

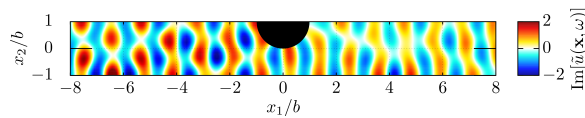


図-10 MFS によって得られた変位  $\text{Im}[\tilde{u}(\mathbf{x}, \omega)]$  ( $x_R = 8$ )

結果から、 $x_1 < 0$  と  $x_1 > 0$  では変位場が大きく異なっていることが確認できる。加えて、 $x_R$  を小さくした場合でも、解析領域内部であれば変位場は概ね一致することが確認された。また、図-8、図-9、および図-10 に、 $x_R = 2, 4, 8$  に対する変位の虚部  $\text{Im}[\tilde{u}(\mathbf{x}, \omega)]$  を示す。これらの図に示す結果においても、実部の場合と同様の傾向が確認できる。

続けて、散乱ガイド波の振幅比の計算結果を示す。図-11 に、 $x_R = 2, 4, 8, 16$  に対する振幅比  $r_R^p, r_T^p$  を示す。同図において、横軸はモード次数  $p$  を、縦軸は振幅比  $r_R^p, r_T^p$  を表す。同図に示す結果から、 $x_R = 2$  を除く  $x_R = 4, 8, 16$  に対する振幅比の値が概ね一致することが確認された。この結果から、本節に示す解析条件では  $x_R = 2$  では解析領域の大きさが不十分であったと考えられる。解が収束したと判断できる  $x_R = 4, 8, 16$  に対する振幅比の計算結果から、反射方向では  $p = 3$  の伝搬モード、透過方向では  $p = 1$  の伝搬モードが強く発生することが確認された。

#### 4. おわりに

本研究では、等方で均質な線形弾性体で構成された無限長の平板を対象に、SH ガイド波の数値計算のための MFS を開発した。解析対象とする無限長の平板に対して、欠陥を含む有限領域を MFS による解析領域に設定した。一方、解析領域の両端に存在する無限長の平板は、SH ガイド波のみが伝搬すると仮定した。MFS ではガイド波の伝搬モード解を直接定式化に組み込むことができるため、FEM や BEM よりも数値計算の実装が

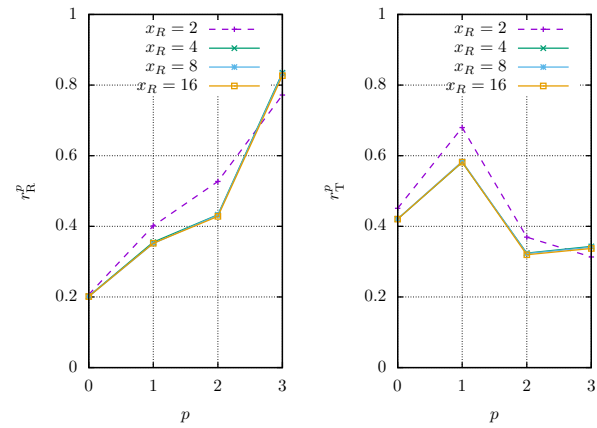


図-11 MFS によって得られた入射波に対する散乱波の振幅比 (左：反射方向  $r_R^p$ , 右：透過方向  $r_T^p$ )

容易であることが確認された。数値解析例では、MFS による SH ガイド波の散乱解析の結果を示した。欠陥を含む有限領域の長さによる影響を確認し、FEM や BEM と同様に、MFS によって無限長の平板の効率的な取り扱いが可能になること示した。加えて、入射ガイド波に対する散乱ガイド波の振幅比の計算結果から、SH ガイド波の散乱特性が把握可能であることを確認した。

#### 参考文献

- [1] 林高弘：超音波による非破壊材料評価の基礎，大阪大学出版会，2021。
- [2] Cho, Y., Rose, J.L.: An elastodynamic hybrid boundary element study for elastic guided wave interactions with a surface breaking defect, *Int. J. Solid Struct.*, Vol.37, pp.4103-4124, 2000.
- [3] Gunawan, A., Hirose, S.: Boundary element analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.29, pp.913-924, 2005.
- [4] Hayashi, T., Kataoka, K., Takikawa, M.: Modal analysis of guided waves and its application to rail inspection, *J. Solid Mech. Mater. Eng.*, Vol.2, pp.1298-1306, 2008.
- [5] Gravenkamp, H., Birk, C., Song, C.: Simulation of elastic guided waves interacting with defects in arbitrarily long structures using the scaled boundary finite element method, *J. Comput. Phys.*, Vol.295, pp.438-455, 2015.
- [6] Fairweather, G., Karageorghis, A., Martin, P.A.: The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.27, pp.759-769, 2003.
- [7] 小林昭一編著：波動解析と境界要素法，京都大学学術出版会，2000。
- [8] 永原正章：スパースモデリング-基礎から動的システムへの応用-，コロナ社，2017。