

# 基本解近似解法を用いた 2 次元 Poisson 方程式の 外部境界値問題に対する直接数値解法

A Direct Numerical Method for an Exterior Boundary Value Problem  
of the Two-dimensional Poisson Equation Using the Method of Fundamental Solutions

繁田 岳美<sup>1)</sup>  
Takemi Shigeta

<sup>1)</sup>博(理) 昭和薬科大学 教授 (〒194-8543 東京都町田市東玉川学園 3-2-1, E-mail: shigeta@ac.shoyaku.ac.jp)

An exterior boundary value problem of the Poisson equation is considered in two dimensions. A circular artificial boundary is introduced to decompose the unbounded domain into a bounded subdomain containing a support of a non-homogeneous term and the remaining unbounded subdomain. The governing equations in the two subdomains, the boundary condition on the original boundary, and the coupling condition on the artificial boundary are solved directly. The boundary value problem in the exterior subdomain is discretized by the method of fundamental solutions. The coefficient matrix of the resulting system of linear equations is a circulant matrix, and the fast Fourier transform can be applied to the circulant matrix to efficiently obtain the approximate solution.

**Key Words :** *Circulant matrix, Domain decomposition, Dirichlet-Neumann map, Fast Fourier transform, Method of fundamental solutions, Method of particular solutions*

## 1. 序論

2 次元 Poisson 方程式の外部境界値問題を解くには Dirichlet-Neumann 交代法 (D-N 法) が有用である [12]. D-N 法は領域分割法 [6] に基づく反復解法であり, 反復解が真の解へ収束する速度は緩和パラメータの値の取り方に依存する. 従来, 収束速度を最速にする意味で最適な定数パラメータが知られていた [11] が, 最近, 境界を円と仮定したとき, 最適な可変パラメータが導出された [9]. さらに, 基本解近似解法 (method of fundamental solutions: MFS) [1,7] により問題を離散化した際, 巡回行列を係数行列とする連立 1 次方程式が現れるが, このような連立 1 次方程式の解は高速 Fourier 変換 (fast Fourier transform: FFT) を用いて効率的に求められる [3,9,10]. 境界が円でない場合, 等角写像を用いれば円境界の問題に帰着できる [5] ため, 最適な可変パラメータを適用することができる. しかし, 等角写像は 3 次元問題に適用できない. その上, 2 次元問題であったとしても, Helmholtz 方程式に等角写像を適用すると波数に変数係数になってしまい, 問題が複雑になるという欠点を有する.

以上の理由から, 3 次元問題や種々の支配方程式への拡張を念頭におき, 本研究では 2 次元 Poisson 方程式の外部境界値問題に対する直接解法を考える.

## 2. 問題設定

簡潔に表記するために, 2 次元平面  $\mathbf{R}^2$  を複素平面  $\mathbf{C}$  と同一視する. 与えられた関数  $R_1 \in C[0, 2\pi]$  に対して, 単純閉曲線

$$\Gamma_1 := \{R_1(\theta)e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

で囲まれた単連結有界領域  $\Omega_0$  を考える. ここで  $0 \in \Omega_0$  を仮定しても一般性を失わない. このとき, 未知関

数  $u \in H^1(\mathbf{C} \setminus \overline{\Omega_0})$  を求める次の Poisson 方程式の外部 Dirichlet 問題を考える:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbf{C} \setminus \overline{\Omega_0}, \quad (1a)$$

$$u = g \quad \text{on } \Gamma_1 = \partial\Omega_0, \quad (1b)$$

$$u(z) = O(|z|^{-1}) \quad \text{as } |z| \rightarrow \infty. \quad (1c)$$

ここに, 非斉次項  $f \in L^2(\mathbf{C} \setminus \overline{\Omega_0})$  と境界値  $g \in H^{1/2}(\Gamma_1)$  は既知関数であり,  $f$  の台  $\text{supp } f := \{z \in \mathbf{C} \setminus \overline{\Omega_0} : f(z) \neq 0\}$  は有界であると仮定する.

非斉次項  $f$  の台を囲むような人工境界  $\Gamma_2 := \{R_2 e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  ( $R_2 > R_1(\theta)$ ) を導入し, 非有界領域  $\mathbf{C} \setminus \overline{\Omega_0}$  を有界部分領域  $\Omega \supset \text{supp } f$  と残りの非有界部分領域  $\Omega'$  に領域分割する. 未知関数  $u$  の  $\Omega'$  への制限を  $v$ ,  $\Omega$  への制限を改めて  $u$  とおくと, 人工境界  $\Gamma_2$  上で結合条件

$$u = v, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (2)$$

が成り立つ. ここに,  $n$  は領域  $\Omega$  に対する境界  $\Gamma_2$  上の外向き単位法線ベクトルを表す (図 1).

Dirichlet-Neumann 写像 (D-N 写像)  $\Lambda : H^{1/2}(\Gamma_2) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_2)$  を次のように定義する:

$$\Lambda \lambda := \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \forall \lambda \in H^{1/2}(\Gamma_2). \quad (3)$$

ここに,  $v \in H^1(\Omega')$  は次の Laplace 方程式の外部 Dirichlet 問題の解を表す:

$$\Delta v = 0 \quad \text{in } \Omega', \quad (4a)$$

$$v = \lambda \quad \text{on } \Gamma_2, \quad (4b)$$

$$v(z) = O(|z|^{-1}) \quad \text{as } |z| \rightarrow \infty. \quad (4c)$$

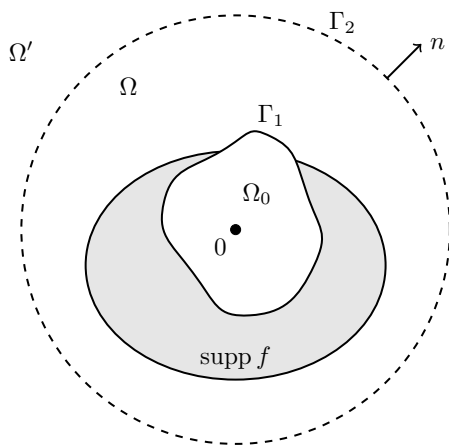


図-1 人工境界による領域分割

すると、結合条件 (2) と D-N 写像 (3) より、問題 (1) は見かけ上、次の二重連結有界領域における混合境界値問題に同値変形できることがわかる:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (5a)$$

$$u = g \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (5b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \Lambda u = 0 \quad \text{on } \Gamma_2. \quad (5c)$$

### 3. 離散化

まず、関数の離散化の際に使用する選点を配置する。具体的には、境界  $\Gamma_1$  上に  $N_{b1}$  個の選点  $\{z_k\}_{k=1}^{N_{b1}}$  と人工境界  $\Gamma_2$  上に  $N_{b2}$  個の選点  $\{z_{N_{b1}+k}\}_{k=1}^{N_{b2}}$  をそれぞれ次式により定める:

$$\begin{aligned} z_k &:= R_1(\theta_{1k})e^{i\theta_{1k}}, & k = 1, 2, \dots, N_{b1}, \\ z_{N_{b1}+k} &:= R_2e^{i\theta_{2k}}, & k = 1, 2, \dots, N_{b2}. \end{aligned}$$

ここに、 $\theta_{1k} := 2\pi(k-1)/N_{b1}$ ,  $\theta_{2k} := 2\pi(k-1)/N_{b2}$  である。境界上の選点の総数を  $N_b := N_{b1} + N_{b2}$  で表す。部分領域  $\Omega$  内に  $N_d$  個の選点  $\{z_{N_b+k}\}_{k=1}^{N_d}$  を配置する。境界上と領域内の選点の総数を  $N := N_b + N_d$  で表す。

次に、源点を配置する。具体的には、領域  $\Omega$  の外部に  $N_b$  個の源点  $\{\zeta_j\}_{j=1}^{N_b}$  を次式により定める:

$$\begin{aligned} \zeta_j &:= \rho_1(\theta_{1j})e^{i\theta_{1j}}, & j = 1, 2, \dots, N_{b1}, \\ \zeta_{N_{b1}+j} &:= \rho_2e^{i\theta_{2j}}, & j = 1, 2, \dots, N_{b2}. \end{aligned}$$

ここに、 $\rho_1 \in C[0, 2\pi]$ ,  $\rho_2$  はそれぞれ  $0 < \rho_1(\theta) < R_1(\theta) < R_2 < \rho_2$  を満たす既知の関数と定数である。同様に、領域  $\Omega'$  の外部に  $N_{b2}$  個の源点  $\{\zeta_{N_b+j}\}_{j=1}^{N_{b2}}$  を次式により与える:

$$\zeta_{N_b+j} := \rho_3e^{i\theta_{2j}}, \quad j = 1, 2, \dots, N_{b2}.$$

ここに、 $\rho_3$  は  $0 < \rho_3 < R_2$  を満たす既知の定数である。

#### (1) MFS による D-N 写像の離散化

与えられた  $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_2)$  に対して、外部 Dirichlet 問題 (4) の解を MFS を用いて離散化する:

$$v(z) \approx v^{(N_{b2})}(z) := \sum_{j=1}^{N_{b2}} \gamma_j \tilde{G}_j(z), \quad z \in \overline{\Omega}. \quad (6)$$

ここに、 $\{\tilde{G}_j\}_{j=1}^{N_{b2}}$  は  $\tilde{G}_j(z) := \log|z - \zeta_{N_b+j}| - \log|z|$  で定義される基底関数である [4,8]。このとき、(6) は (4a) と (4c) を満たすので、境界条件 (4b) のみを考えればよい:

$$\sum_{j=1}^{N_{b2}} \gamma_j \tilde{G}_j(z_{N_{b1}+k}) = \lambda(z_{N_{b1}+k}), \quad k = 1, 2, \dots, N_{b2},$$

すなわち  $C_1 \gamma = \lambda$  が成り立つ。ここに、 $C_1 := (\tilde{G}_j(z_{N_{b1}+k}))$ ,  $\gamma := (\gamma_j)$ ,  $\lambda := (\lambda(z_{N_{b1}+k}))$  である。いま、 $C_1$  は巡回行列であるので、逆行列が存在する。したがって、

$$\gamma = C_1^{-1} \lambda \quad (7)$$

と未知係数が一意に定まる。(7) を (6) に代入して、 $\Gamma_2$  上の選点における  $v$  の法線微分の近似値を求めると、

$$\frac{\partial v^{(N_{b2})}}{\partial n}(z_{N_{b1}+k}) = \sum_{j=1}^{N_{b2}} \gamma_j \frac{\partial \tilde{G}_j}{\partial n}(z_{N_{b1}+k}), \quad k = 1, 2, \dots, N_{b2},$$

すなわち

$$v_n = C_2 \gamma \quad (8)$$

を得る。ここに、 $v_n := (\partial v^{(N_{b2})}(z_{N_{b1}+k})/\partial n)$ ,  $C_2 := (\partial \tilde{G}_j(z_{N_{b1}+k})/\partial n)$  である。(7) を (8) に代入すると、

$$C_2 C_1^{-1} \lambda = v_n. \quad (9)$$

(9) は (3) の離散化に相当する。したがって、行列  $C_2 C_1^{-1}$  は D-N 写像  $\Lambda$  を離散化した結果である。行列  $C_1, C_2$  は共に巡回行列であるため、Fourier 行列  $W := (\omega^{(j-1)(k-1)})$  ( $\omega := e^{2\pi i/N_{b2}}$  は回転因子) を用いて FFT を適用することで、(9) の左辺を効率的に計算することができる [3,10]。

#### (2) MPS と MFS による内部部分領域の離散化

Poisson 方程式  $-\Delta u_p = f$  を満たす特殊解を  $u_p$  とおく。D-N 写像 (3) が線形であることに注意すると、(5) より、 $u_h := u - u_p$  は次の内部部分領域問題の解である:

$$\Delta u_h = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (10a)$$

$$u_h = g - u_p \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (10b)$$

$$\frac{\partial u_h}{\partial n} - \Lambda u_h = -\left(\frac{\partial u_p}{\partial n} - \Lambda u_p\right) \quad \text{on } \Gamma_2. \quad (10c)$$

まず、特殊解近似解法 (method of particular solutions: MPS) [2] に基づき、 $u_p$  の近似解を求める。薄板スプライン (thin plate spline: TPS)  $\varphi(r) := r^2 \log r$  に対して、 $\varphi_j(z) := \varphi(|z - z_{N_b+j}|)$  と定める。このとき、非斉次項  $f$  を基底関数  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_d}$  を用いて近似する:

$$f(z) \approx \sum_{j=1}^{N_d} \beta_j \varphi_j(z), \quad z \in \Omega.$$

ここに、未知係数  $\{\beta_j\}_{j=1}^{N_d}$  は連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^{N_d} \beta_j \varphi_j(z_{N_b+j}) = f(z_{N_b+j}), \quad k = 1, 2, \dots, N_d,$$

すなわち  $B\beta = f$  を解くことにより決定される。ここに、 $B := (\varphi_j(z_{N_b+j}))$ ,  $f := (f(z_{N_b+j}))$ ,  $\beta := (\beta_j)$  である。いま、

$B$  が正則であると仮定すると,  $\boldsymbol{\beta} = B^{-1}\boldsymbol{f}$  が得られるので, 特殊解  $u_p$  は次の関数で近似することができる:

$$u_p(z) \approx u_p^{(N_d)}(z) := \sum_{j=1}^{N_d} \beta_j \Phi_j(z), \quad z \in \overline{\Omega}.$$

ここに, 基底関数  $\{\Phi_j\}_{j=1}^{N_d}$  は,  $-\Delta\Phi = \varphi$  の特殊解  $\Phi(r) = r^4(1 - 2\log r)/32$  を用いて,  $\Phi_j(z) := \Phi(|z - z_{N_{b1}+j}|)$  で定義される. これより,  $u_p$  の  $\Gamma_1, \Gamma_2$  上における境界値と  $\Gamma_2$  上における法線微分の近似値をそれぞれ

$$\begin{aligned} u_p^{(N_d)}(z_k) &= \sum_{j=1}^{N_d} \beta_j \Phi_j(z_k), \quad k = 1, 2, \dots, N_{b1}, \\ u_p^{(N_d)}(z_{N_{b1}+k}) &= \sum_{j=1}^{N_d} \beta_j \Phi_j(z_{N_{b1}+k}), \quad k = 1, 2, \dots, N_{b2}, \\ \frac{\partial u_p^{(N_d)}}{\partial n}(z_{N_{b1}+k}) &= \sum_{j=1}^{N_d} \beta_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial n}(z_{N_{b1}+k}), \quad k = 1, 2, \dots, N_{b2}, \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{p1} &= B_1 \boldsymbol{\beta} (= B_1 B^{-1} \boldsymbol{f}), \quad \boldsymbol{u}_{p2} = B_2 \boldsymbol{\beta} (= B_2 B^{-1} \boldsymbol{f}), \\ \boldsymbol{u}_{pn} &= B_3 \boldsymbol{\beta} (= B_3 B^{-1} \boldsymbol{f}) \end{aligned}$$

と求めることができる. ここに,  $B_1 := (\Phi_j(z_k))$ ,  $B_2 := (\Phi_j(z_{N_{b1}+k}))$ ,  $B_3 := (\partial \Phi_j(z_{N_{b1}+k})/\partial n)$ ,  $\boldsymbol{u}_{p1} := (u_p^{(N_d)}(z_k))$ ,  $\boldsymbol{u}_{p2} := (u_p^{(N_d)}(z_{N_{b1}+k}))$ ,  $\boldsymbol{u}_{pn} := (\partial u_p^{(N_d)}(z_{N_{b1}+k})/\partial n)$  である.

次に, (10) の解  $u_h$  を MFS を用いて次のように近似する:

$$u_h(z) \approx u_h^{(N_b)}(z) := \sum_{j=1}^{N_b} \alpha_j G_j(z), \quad z \in \overline{\Omega}. \quad (11)$$

ここに,  $\{G_j\}_{j=1}^{N_b}$  は  $G_j(z) := \log|z - \zeta_j|$  で定義される基底関数である. このとき, (11) は (10a) を満たすので, 境界条件 (10b), (10c) を選点上で考えればよい:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_b} \alpha_j G_j(z_k) &= g(z_k) - u_p^{(N_d)}(z_k), \quad k = 1, 2, \dots, N_{b1}, \\ \sum_{j=1}^{N_b} \alpha_j \frac{\partial G_j}{\partial n}(z_{N_{b1}+k}) - \Lambda \sum_{j=1}^{N_b} \alpha_j G_j(z_{N_{b1}+k}) &= - \left( \frac{\partial u_p^{(N_d)}}{\partial n}(z_{N_{b1}+k}) - \Lambda u_p^{(N_d)}(z_{N_{b1}+k}) \right), \quad k = 1, 2, \dots, N_{b2}, \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} A_1 \boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{g} - \boldsymbol{u}_{p1}, \\ A_3 \boldsymbol{\alpha} - C_2 C_1^{-1} A_2 \boldsymbol{\alpha} &= -(\boldsymbol{u}_{pn} - C_2 C_1^{-1} \boldsymbol{u}_{p2}). \end{aligned}$$

ここに,  $A_1 := (G_j(z_k))$ ,  $A_2 := (G_j(z_{N_{b1}+k}))$ ,  $A_3 := (\partial G_j(z_{N_{b1}+k})/\partial n)$ ,  $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_j)$ ,  $\boldsymbol{g} := (g(z_k))$  である.

以上より, 我々の問題は次の連立 1 次方程式を解くことに帰着する:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 - C_2 C_1^{-1} A_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{g} - \boldsymbol{u}_{p1} \\ -(\boldsymbol{u}_{pn} - C_2 C_1^{-1} \boldsymbol{u}_{p2}) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

(12) を解いて得られた  $\boldsymbol{\alpha}$  と先に求めた  $\boldsymbol{\beta}$  を

$$\begin{aligned} u(z) &= u_h(z) + u_p(z) \approx u^{(N)}(z) := u_h^{(N_b)}(z) + u_p^{(N_d)}(z) \\ &= \sum_{j=1}^{N_b} \alpha_j G_j(z) + \sum_{j=1}^{N_d} \beta_j \Phi_j(z), \quad z \in \overline{\Omega} \end{aligned}$$

に代入することで,  $\overline{\Omega}$  における  $u$  の数値解  $u^{(N)}$  を求めることができる.

#### 4. 数値計算例

本節では, 簡単な数値計算例を示す. 本研究で考えている問題は, 人工境界  $\Gamma_2$  上における真の境界値を求めることと換言できる. したがって, 離散化 D-N 写像  $C_2 C_1^{-1}$  が正しく機能しているかどうかを確認すればよい. そこで, 簡単のため  $f = 0$  を仮定する. 境界  $\Gamma_1$  の動径関数と  $\Gamma_2$  の半径をそれぞれ  $R_1(\theta) = 1$ ,  $R_2 = 3$ , 真の解を  $u(z) := \text{Re}(1/z) = x/(x^2 + y^2)$ , Dirichlet 境界値を  $g(z) := u(z)$  ( $z \in \Gamma_1$ ) とし, 関数  $u$  を未知として問題 (1) を解く.

選点数を  $N_{b1} := N_{b2} := 100$ ,  $N_d := 0$ , 源点を配置する仮想境界の動径関数と半径をそれぞれ  $\rho_1(\theta) := s^{-1} R_1(\theta)$ ,  $\rho_2 := s R_2$ ,  $\rho_3 := s^{-1} R_2$  ( $s := 1.4454$ ) とする.

このとき, 人工境界  $\Gamma_2$  上における真の解と数値解の絶対誤差  $|u(R_2 e^{i\theta}) - u^{(N)}(R_2 e^{i\theta})|$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) を図 2 に示す. この結果から, 離散化 D-N 写像が正しく機能し, 人工境界上における境界値を十分な精度で計算できていることがわかる. さらに, 反復解法である D-N 法を用いた場合の誤差が  $10^{-14}$  程度である [9] ことを踏まえると, 提案手法による数値解の誤差も同程度であり, 実用上十分な精度を有しているといえる.

#### 5. 結論

本研究では, 2 次元非有界領域における Poisson 方程式の外部 Dirichlet 問題を数値的に解くための計算手法として, 直接解法を検討した. 本手法は, 従来用いられてきた反復解法の D-N 法とは異なり, 一度の数値計算で所望の解を得ることができるという利点を有する. さらに, 提案手法は 2 次元 Helmholtz 方程式や 3 次元 Poisson 方程式にも容易に拡張可能であり, 反復解法において問題となる収束速度に影響を与えるパラメータ

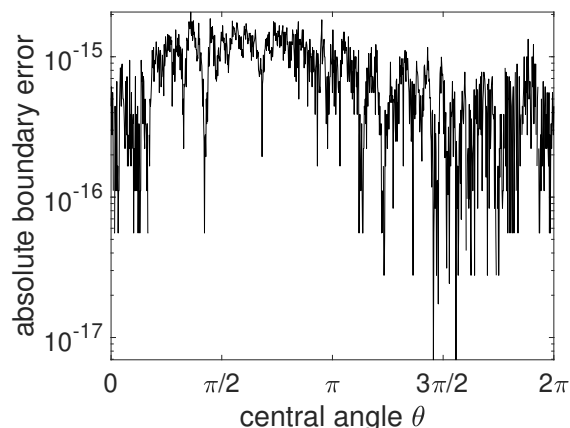


図-2 人工境界  $\Gamma_2$  上における絶対境界誤差

の選定を考慮する必要がない点においても有利である。したがって、本手法は広範な外部境界値問題に対して有用であるといえる。

さらに、数値計算結果から、提案手法はD-N法と比較して数値解の精度が同程度であることが確認された。今後の課題としては、この計算精度を維持しつつ、より効率的に解を求める手法へと発展させることが望まれる。

#### 参考文献

- [1] Bogomolny, A.: Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **22**, 4 (1985), pp. 644–669.
- [2] Chen, C. S. *et al.*: The Method of Fundamental Solutions — A Meshless Method, Dynamic Publishers, Inc. (2008).
- [3] Davis, P. J.: *Circulant Matrices*, Second edition, AMS Chelsea Publishing (2012)
- [4] Katsurada, M.: A mathematical study of the charge simulation method II, *Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo, Section 1A Mathematics*, **36** (1989), pp. 135–162.
- [5] Liu, X.-Y. *et al.*: Conformal mapping for the efficient solution of Poisson problems with the Kansa-RBF method, *Journal of Scientific Computing*, **71** (2017), pp. 1035–1061.
- [6] 呂涛 他: 区域分解算法—偏微分方程数值解新技術 (*in Chinese*), 科学出版社 (1999).
- [7] Mathon, R. and Johnston, R. L.: The approximate solution of elliptic boundary-value problems by fundamental solutions, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **14**, 4 (1977), pp. 638–650.
- [8] Shigeta, T. and Young, D. L.: Mathematical and numerical studies on meshless methods for exterior unbounded domain problems, *Journal of Computational Physics*, **230** (2011), pp. 6900–6915.
- [9] Shigeta, T.: Mathematically improved convergence analysis for the non-overlapping domain decomposition method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **166** (2024), 105805.
- [10] Smyrlis, Y.-S. and Karageorghis, A.: Efficient implementation of the MFS: The three scenarios, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **227** (2009), pp. 83–92.
- [11] Yu, D. *et al.*: A Dirichlet–Neumann alternating method in infinite domain: Algorithm and convergence analysis, Research Report ICM–95–31, Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, Chinese Academy of Sciences (1995).
- [12] Yu, D.: Discretization of non-overlapping domain decomposition method for unbounded domains and its convergence, *Chinese Journal of Numerical Mathematics and Applications*, **18**, 4 (1996), pp. 93–102.