

# グリッドベース領域積分方程式法を用いた 面内波動散乱解析

In-Plane Wave Scattering Analysis  
Using Grid-Based Volume Integral Equation Method

豊島直生<sup>1)</sup> 丸山泰蔵<sup>2)</sup>  
Naoki Toyoshima and Taizo Maruyama

<sup>1)</sup>東京科学大学 環境・社会理工学院 学生 (〒 152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: toyoshima.n.5455@m.isct.ac.jp)

<sup>2)</sup>東京科学大学 環境・社会理工学院 准教授 (〒 152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: maruyama.t.45ef@m.isct.ac.jp)

This paper presents a grid-based Volume Integral Equation Method (VIEM) for in-plane elastic wave scattering. The positional symmetry between source and observation points can be utilized for the evaluation of influence coefficients when the volume element structure is constrained to the rectangular grid. This property enables efficient evaluation of the influence coefficients. The  $\mathcal{H}$ -matrices, structured through adaptive cross approximation with stored influence coefficients, are employed to accelerate solving the system of equations in the VIEM formulation.

**Key Words :** wave scattering, volume integral equation method,  $\mathcal{H}$ -matrix method

## 1. はじめに

非均質材料中を伝搬する超音波の挙動は、非均質部による波動散乱問題を解くことによって調べられる。領域積分方程式法 (VIEM: Volume Integral Equation Method) は非均質領域での波動散乱問題を解くのに適している。しかしながら、VIEM は領域積分方程式 (VIE: Volume Integral Equation) による係数行列が密であるため、疎行列を係数行列とする有限要素法 (FEM: Finite Element Method) に比べ、計算コストが大きい。また、VIEM と同じく係数行列が密である境界要素法 (BEM: Boundary Element method) は、離散化の過程で境界を分割するため、領域を分割する VIEM の方が要素数が多くなる。そのため VIEM には高速化が必要である。グリッド要素に限定した VIEM (グリッドベース VIEM) に  $\mathcal{H}$  行列法を適用する手法 [1] は、グリッド要素における観測点と源点の対称性から係数行列の成分を高速に計算できる。本研究ではグリッドベース VIEM を面内波動問題に適用した場合の計算時間について検討する。

## 2. グリッドベース VIEM

2 次元無限領域  $\mathbb{R}^2$  における面内波動問題を考える。Lamé 定数  $\lambda, \mu$  と密度  $\rho$  は次のように表されるとする。

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu_0 + \tilde{\mu}(\mathbf{x}), \quad \lambda(\mathbf{x}) = \lambda_0 + \tilde{\lambda}(\mathbf{x}), \quad \rho(\mathbf{x}) = \rho_0 + \tilde{\rho}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

ここで、下付き添え字の 0 は背景領域の変数であることを示し、 $\tilde{\bullet}$  は背景領域に対する非均質領域での材料定数のゆらぎを示す。全波動場  $u_i$  は入射波  $u_i^{in}$  と散乱波  $u_i^{sc}$  から成り、次式のように表される

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^{in}(\mathbf{x}) + u_i^{sc}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

入射波に対する支配方程式は次である。

$$\lambda_0 u_{j,ji}^{in}(\mathbf{x}) + \mu_0 \left( u_{i,jj}^{in}(\mathbf{x}) + u_{j,ij}^{in}(\mathbf{x}) \right) + \rho_0 \omega^2 u_i^{in}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3)$$

ここで、 $\omega$  は角周波数であり、 $\bullet_{,i}$  は空間微分を意味する。全波動場に対する支配方程式は次である。

$$\begin{aligned} & \left( \lambda(\mathbf{x}) u_{j,j}(\mathbf{x}) \right)_{,i} + \left\{ \mu(\mathbf{x}) (u_{i,j}(\mathbf{x}) + u_{j,i}(\mathbf{x})) \right\}_{,j} \\ & + \rho(\mathbf{x}) \omega^2 u_i(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

また、散乱波は無限遠での放射条件を満足する。式(1)-(4)より次の VIE を導出できる。

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) = & u_i^{in}(\mathbf{x}) - \int_{\mathbb{R}^2} U_{i,j,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\lambda}(\mathbf{y}) u_{k,k}(\mathbf{y}) dD(\mathbf{y}) \\ & - \int_{\mathbb{R}^2} U_{i,j,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mu}(\mathbf{y}) \{ u_{j,k}(\mathbf{y}) + u_{k,j}(\mathbf{y}) \} dD(\mathbf{y}) \\ & + \omega^2 \int_{\mathbb{R}^2} U_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\rho}(\mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) dD(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $U_{ij}$  は背景領域に対する基本解である。

式(5)を離散化して解くために、図-1 のように非均質領域  $D$  をグリッド要素  $D_n^{(e)}$  に分割する。

$$D \approx \bigcup_{n=1}^{N^{(e)}} D_n^{(e)} \quad (6)$$

ここで、 $N^{(e)}$  は要素数である。分割した各要素内で材料定数のゆらぎは一定であると仮定する。

$$\tilde{\mu}_0(\mathbf{x}) = \tilde{\mu}_n, \quad \tilde{\lambda}_0(\mathbf{x}) = \tilde{\lambda}_n, \quad \tilde{\rho}_0(\mathbf{x}) = \tilde{\rho}_n, \quad \mathbf{x} \in D_n^{(e)} \quad (7)$$

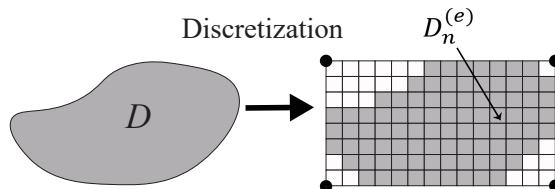
図-1 非均質領域  $D$  の離散化

表-1 材料定数

	$c_L$ [km/s]	$c_T$ [km/s]	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]
背景領域	4.40	2.50	2.30
非均質領域	5.80	3.00	7.85

さらに、変位  $u_i(\mathbf{x})$  を双線形補間関数  $\phi_n$  によって離散化する。

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N u_i^{(n)} \phi_n(\mathbf{x}) \quad (8)$$

ここで、 $N$  は節点数である。離散化された VIE は次のようにになる。

$$\sum_{n=1}^N \left[ \delta_{mn} \delta_{ij} + A_{mn}^{ij} + B_{mn}^{ij} + E_{mn}^{ij} - F_{mn}^{ij} \right] u_j^{(n)} = u_j^{in}(\mathbf{x}^{(m)}) \quad (9)$$

ここで、 $\delta_{mn}$  はクロネッカーデルタ、 $\mathbf{x}^{(m)}$  は選点である。また  $A_{mn}^{ij}, B_{mn}^{ij}, E_{mn}^{ij}, F_{mn}^{ij}$  は次のように表される。

$$A_{mn}^{ij} = \sum_{l=1}^{N^{(e)}} \tilde{\lambda}_l \int_{D_l^{(e)}} U_{ik,k}(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{y}) \phi_{n,j}(\mathbf{y}) dD(\mathbf{y}), \quad (10a)$$

$$B_{mn}^{ij} = \sum_{l=1}^{N^{(e)}} \tilde{\mu}_l \int_{D_l^{(e)}} U_{ij,k}(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{y}) \phi_{n,j}(\mathbf{y}) dD(\mathbf{y}), \quad (10b)$$

$$E_{mn}^{ij} = \sum_{l=1}^{N^{(e)}} \tilde{\mu}_l \int_{D_l^{(e)}} U_{ik,j}(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{y}) \phi_{n,j}(\mathbf{y}) dD(\mathbf{y}), \quad (10c)$$

$$F_{mn}^{ij} = \omega^2 \sum_{l=1}^{N^{(e)}} \tilde{\rho}_l \int_{D_l^{(e)}} U_{ij}(\mathbf{x}^{(m)}, \mathbf{y}) \phi_n(\mathbf{y}) dD(\mathbf{y}) \quad (10d)$$

グリッド要素に分割された領域において、観測点  $\mathbf{x}^{(m)}$  と源点  $\mathbf{y}$  は位置関係の対称性を持つ。そのため、式 (10) の下線部を、 $\mathbf{x}^{(m)}$  が図-1 の長方形の角の 4 点の場合について計算すれば十分である。これによって、 $O(N)$  の計算量で、式 (10) の積分項をすべて計算することができる。この積分項を一度計算して保存しておき、Adaptive Cross Approximation (ACA)[2] による  $\mathcal{H}$  行列構成時に呼び出して用いることで、効率的に計算を行う。

### 3. 数値解析結果

入射波が半径  $a$  の円形非均質部で散乱する問題を解析する。ここで、周波数は  $a\omega/c_L = 1$  とし、縦波の速度

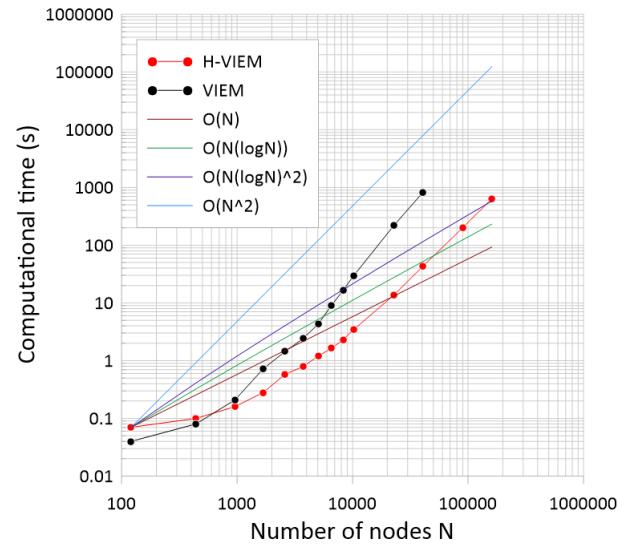


図-2 計算時間

$c_L$ 、横波の速度  $c_T$ 、質量  $\rho$  は表-1 のように設定する。また、入射波  $u_i^{in}$  は次で与えた。

$$u_i^{in}(\mathbf{x}) = u_0 \delta_{i1} \exp(ik_L x_1) \quad (11)$$

ここで、 $u_0$  は入射波の振幅、 $k_L = \omega/c_L$  である。数値計算はすべてスレッド数 20 の OpenMP による並列化をして実施した。

図-2 は、高速化なしの VIEM と  $\mathcal{H}$  行列法を用いた VIEM ( $\mathcal{H}$ -VIEM) の計算時間を示している。図 2 より VIEM の計算時間は  $O(N^2)$  であるが、 $\mathcal{H}$  行列法を用いることによって計算時間を短縮できることがわかる。

### 4. おわりに

本研究ではグリッドベース VIEM を面内波動問題に拡張し、その計算時間について検討した。 $\mathcal{H}$  行列を用いていない場合の VIEM の計算時間が  $O(N^2)$  であるのにに対して、 $\mathcal{H}$  行列法を用いた場合は  $O(N^2)$  よりもやや小さかった。

今後の課題としては、さらなる効率化のために、 $\mathcal{H}$  行列の低ランク近似を ACA 以外の手法で行うことが挙げられる。また実用的な問題を解くために、グリッドベース VIEM を 3 次元に拡張することも必要である。

### 参考文献

- [1] 丸山泰蔵:  $\mathcal{H}$  行列法を用いたグリッドベース領域積分方程式法の高速化、計算数理工学論文集, 24, pp.19-24, 2024.
- [2] M. Bebendorf: Hierarchical Matrices, Springer, 2008.