

DRM を用いた非圧縮性粘性流れの境界要素法の開発と課題

Development and Issues of Dual Reciprocity Boundary Element Method for Incompressible Viscous Fluid Flow

山田 義博¹⁾ 藤原 宏志²⁾
Yoshihiro Yamada and Hiroshi Fujiwara

¹⁾博 (工) 日本製鉄 (株) (〒 293-8511 千葉県富津市新富 20-1, E-mail: yamada.38d.yoshihiro@jp.nipponsteel.com)

²⁾博 (情報) 京都大学大学院情報学研究科教授 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: fujiwara@acs.i.kyoto-u.ac.jp)

Aiming to efficient and fast industrial numerical simulation of incompressible high Reynolds number flow with complex large domain, we develop the dual reciprocity boundary element methods for incompressible viscous fluid flow. We adopt this method to the three dimensional cavity flow to estimate the availability for the industrial use, and found that this method can calculate several times higher Reynolds number flow without turbulence model compared with the BEM with inner integration, but should be developed the calculation speed more than 1000 times faster by developing inverse calculation of the large dense matrices.

Key Words : Dual Reciprocity Boundary Element Methods, Navier-Stokes Equations, Radial Basis Functions Approximation

1. はじめに

これまで、非圧縮性流体に対する数値計算に対し、境界要素法に Dual Reciprocity Method (DRM)[1] を適用する計算手法を提案 [2]~[4] し、この DR-BEM による Navier-Stokes 方程式の数値計算の困難点、特に DRM で標準的にもちいられる radial basis Functions の妥当性について論じた [5] が、本報告では、産業利用に於ける課題を論じる。

非圧縮性流れの数値計算の産業利用においては、計算領域の複雑化と大規模化に伴って要求される計算資源が増加する傾向にあり、その高効率化と高速化が重要な課題である。著者らは計算コスト低減のために境界要素法に着目し、登坂の直接法 [6] をもとにして新たな計算手法を開発してきた [2]~[4]。粘性流体の典型的な数理モデルである Navier-Stokes 方程式への境界要素法の適用においては、特にその非線型性が問題となるが、その取扱いに Brebbia 等が提唱した DRM が有効的と考えて新たな低コスト計算手法の開発に取り組んでいる。

産業利用においては、大規模領域の取り扱いと、複雑形状への対応が課題となる。大規模領域に関しては、例えば数メートル規模の 3 次元領域で、流速 0.1~10 [m/s]、密度 $\rho = 1\sim 1000$ [kg/m³]、粘性 $\mu = 10^{-5}\sim 10^{-3}$ [Pa 秒] 程度の対象を想定しており、Reynolds 数では $10^5\sim 10^6$ の高 Reynolds 数に対応する必要がある。また複雑形状への対応として、内部格子点を容易に生成し、その点での物理量の勾配等を精度良く求める必要がある。

速度勾配を含む非同次項を持つ BEM 流体解析の場合、従来は、移流項の内部積分計算で、速度勾配計算する際、FEM 等と同じ計算量を必要とするため、境界要素法の利点が活かせなかったが、DRM では Radial

Basis Functions 近似を用いており、勾配計算が Radial Basis Functions をあらかじめ微分するだけで近似できるため、内部選点の分布が規則的でなくても勾配が得られ、飛躍的に計算の煩雑さが低下すると考えられる。

本稿では、非圧縮性流体解析に DRM を適用することに随伴する、大規模密行列の逆行列の計算コスト、内部点計算のフリーメッシュ的な取り扱いの利点に焦点をあてて課題を整理する。

2. 数理モデル

流体の占める 3 次元の有界領域を Ω とし、その境界 $\Gamma = \partial\Omega$ は区分的に C^2 級とする。本研究では、定常の非圧縮粘性流体を対象とし、その数理モデルとして次の運動方程式 (1)、構成方程式 (2) と連続の条件 (3) による境界値問題を考える。

$$\rho u_j u_{i,j} = \tau_{ij,j} \quad (1)$$

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (3)$$

ここで $u = (u_1, u_2, u_3)$ は流速、 p は圧力、 τ は応力テンソル、 ρ は密度、 μ は粘性係数である。

3. DR-BEM に基づく計算スキーム

本節では (1), (2) より得られる

$$u_{i,jj} + u_{j,ij} - \frac{1}{\mu} p_{,j} \delta_{ij} = \frac{\rho}{\mu} u_j u_{i,j} \quad (4)$$

を Ω で積分し、左辺に対応する基本解をもちいて境界積分方程式を導出する。その際、右辺は DRM によって境界積分で表す。

(1) 基本解による定式化

式 (3) と (4) をあわせた

$$\begin{pmatrix} \Delta + D_1^2 & D_1 D_2 & D_1 D_3 & -\frac{1}{\mu} D_1 \\ D_2 D_1 & \Delta + D_2^2 & D_2 D_3 & -\frac{1}{\mu} D_2 \\ D_3 D_1 & D_3 D_2 & \Delta + D_3^2 & -\frac{1}{\mu} D_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ p \end{pmatrix} = \frac{\rho}{\mu} \begin{pmatrix} u_1 D_1 u_1 + u_2 D_2 u_1 + u_3 D_3 u_1 \\ u_1 D_1 u_2 + u_2 D_2 u_2 + u_3 D_3 u_2 \\ u_1 D_1 u_3 + u_2 D_2 u_3 + u_3 D_3 u_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

の左辺を Lu , 右辺を f と記す。ただし $D_i = \partial/\partial x_i$ および $u = (u_1, u_2, u_3, p)^T$ である。Euclid 空間の標準内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とすると, Ω の近傍で適当な滑らかさの $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ により

$$\int_{\Omega} \langle Lu, v \rangle dx = \int_{\Omega} \langle f, v \rangle dx$$

となるが左辺は Green の公式により

$$\int_{\Omega} \langle u, \mathcal{L}^T v \rangle dx + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma} (\tau_i v_i - \sigma_i u_i) d\sigma = \int_{\Omega} \langle f, v \rangle dx$$

となる。ただし $d\sigma$ は Γ に沿う境界積分であり, $n = (n_1, n_2, n_3)$ を境界 Γ における 外向き単位法線として

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \Delta + D_1^2 & D_1 D_2 & D_1 D_3 & \frac{1}{\mu} D_1 \\ D_2 D_1 & \Delta + D_2^2 & D_2 D_3 & \frac{1}{\mu} D_2 \\ D_3 D_1 & D_3 D_2 & \Delta + D_3^2 & \frac{1}{\mu} D_3 \\ -D_1 & -D_2 & -D_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau_i = \sum_{j=1}^3 (D_i u_j + D_j u_i - \frac{1}{\mu} p \delta_{ij}) n_j,$$

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^3 (D_i v_j + D_j v_i - v_4 \delta_{ij}) n_j$$

である。ここで, (1) と (3) の和である (4) に対して Green の公式を適用したことで, 表面力 (traction) τ が現れていることに注意する。

さて 3 重 Laplacian に対する基本解

$$\phi(y; x) = \mu \frac{|x - y|^3}{96\pi}$$

と, \mathcal{L} の余因子行列 M に対して, $v_{ki} = M_{ki} \phi$ とする。このとき超関数の意味で $\Delta_y^3 \phi = -\mu \delta(y - x)$ を満たす。そこで $v_k = (v_{k1}, v_{k2}, v_{k3}, v_{k4})^T$ とすると, $x \in \Omega$ に対して

$$u_k(x) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma} (\tau_i(y) v_{ki}(y; x) - \Sigma_{ki}(y; x) u_i(y)) d\sigma_y - \int_{\Omega} \langle f(y), v_k(y; x) \rangle dy, \quad k = 1, 2, 3 \quad (6)$$

を得る。ただし

$$\Sigma_{ki}(y; x) = \sum_{j=1}^3 (D_i(y) v_{kj}(y; x) + D_j(y) v_{ki}(y; x) - v_{k4}(y; x) \delta_{ij}) n_j$$

である。頂点を除く $z \in \Gamma$ に対して $x \in \Omega$ として横断的に $x \rightarrow z$ とすると, jump relation により

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma} v_{ki}(y; z) \tau_i(y) d\sigma_y \\ &= \frac{1}{2} u_k(z) + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma} \Sigma_{ki}(y; z) u_i(y) d\sigma_y + \int_{\Omega} \langle f(y), v_k(y; z) \rangle dy, \\ & \quad z \in \Gamma \setminus \{\text{頂点}\}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (7) \end{aligned}$$

を得る。ここで Γ の滑らかさより Cauchy の主値積分は現れないことに注意する。また, z の近傍で Γ が直線ならば $\Sigma_{ki}(y; z) = 0$ なので, 特に Ω が多角形ならば

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma} v_{ki}(y; z) \tau_i(y) d\sigma_y = \frac{u_k(z)}{2} + \int_{\Omega} \langle f(y), v_k(y; z) \rangle dy, \quad z \in \Gamma \setminus \{\text{頂点}\}, \quad k = 1, 2, 3$$

が成立する。 z が Γ の頂点の場合は, 右辺第 1 項は Γ が z でなす内角の大きさを持ちいて表される。

(2) DRM による非線型項を含む領域積分の取り扱い

式 (7) では, 未知函数 $u = (u_1, u_2, u_3)$ について非線型な $f = (f_1, f_2, f_3)$ の領域積分が現れる。これを DRM によって境界積分で表す。

正整数 S, S' をとめて, Ω 上の点 $\{x_s^{\text{in}}; 1 \leq s \leq S\}$, Γ 上の点 $\{x_s^{\text{bd}}; 1 \leq s \leq S'\}$ に対して $x_s = x_s^{\text{in}}, 1 \leq s \leq S$, $x_{S+s} = x_s^{\text{bd}}, 1 \leq s \leq S'$ とする。そこで適当な函数の集合 $\{\varphi_s^{(1)}; 1 \leq s \leq S + S'\}$ をもちいて

$$\begin{pmatrix} f_k(x_1) \\ \vdots \\ f_k(x_{S+S'}) \end{pmatrix} \approx F_1 \alpha_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}^{S+S'}, \quad k = 1, 2, 3$$

とする。ただし F_1 は $\varphi_j^{(1)}(x_i)$ を (i, j) -成分とする $S + S'$ 次の正方形行列である。さらに $\{\varphi_s^{(2)}; 1 \leq s \leq S + S'\}$ を適当にとり

$$u_k(x) \approx \sum_{s=1}^{S+S'} \varphi_s^{(2)}(x) \beta_{ks}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (8)$$

と近似し, 同様に $S + S'$ 次の正方形行列 F_2 を定めて

$$U_k \approx F_2 \beta_k, \quad \beta_k \in \mathbb{R}^{S+S'}, \quad k = 1, 2, 3$$

と近似する。ただし $U_k = (u_k(x_1) \cdots u_k(x_{S+S'}))^T$ である。DRM では (8) より

$$\begin{aligned} D_j u_k(x_i) &\approx \sum_{s=1}^{S+S'} D_j \varphi_s^{(2)}(x_i) \beta_{ks} = D_j F_2 \beta_k \\ &\approx (D_j F_2) F_2^{-1} U_k, \quad k, j = 1, 2, 3 \quad (9) \end{aligned}$$

とする。ただし $D_j F_2$ は $D_j \varphi_s^{(2)}(x_i)$ を (i, s) -成分とする正

方行列, $\beta_k = (\beta_{k1} \ \dots \ \beta_{k,S+S'})^T$ である. このもとで

$$\begin{aligned} \alpha_k &\approx F_1^{-1} \begin{pmatrix} f_k(x_1) \\ \vdots \\ f_k(x_{S+S'}) \end{pmatrix} \\ &\approx \frac{\rho}{\mu} F_1^{-1} ((\text{diag} U_1) D_1 F_2 + (\text{diag} U_2) D_2 F_2 \\ &\quad + (\text{diag} U_3) D_3 F_3) F_2^{-1} U_k \end{aligned} \quad (10)$$

である. そこで $\frac{1}{\mu} \Delta^3 \psi_s = \varphi_s^{(1)}$ となる特解 ψ_s をひとつとり, L の余因子行列 M に対して $W_{jm}^s = M_{jm} \psi_s$ および

$$\mathcal{T}_{im}^s = \sum_{j=1}^3 \left(D_i W_{jm}^s + D_j W_{im}^s - \frac{1}{\mu} W_{3m}^s \delta_{ij} \right) n_j$$

とすると, $k = 1, 2, 3$ で

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \langle f(y), v_k(y; x) \rangle dy \\ &\approx \sum_{m,s} \left(-W_{km}^s(x) + \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma} (\mathcal{T}_{im}^s v_{ki} - \Sigma_{ki} W_{im}^s) d\sigma_y \right) \alpha_{ms} \end{aligned} \quad (11)$$

が成立する.

(3) 計算スキーム

以上の (7), (10), (11) で構成される積分方程式に選点法を適用する. Γ を, 角を含まない E 個の部分集合に分割し, これに付随する $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ の区分定数近似を表す $T \in \mathbb{R}^{3E}$ と, $(u_1(x_1) \ \dots \ u_1(x_S) \ \dots \ u_3(x_1) \ \dots \ u_3(x_S))^T$ に相当する $U \in \mathbb{R}^{3S}$ が, 適当な $V_{\Gamma} \in M_{3S,3S}(\mathbb{R})$ と $\Phi_1 : \mathbb{R}^{3S} \rightarrow M_{3E,3S}(\mathbb{R})$ によって

$$V_{\Gamma} T = b + \Phi_1(U) U,$$

を満たすとする. ただし $M_{mn}(\mathbb{R})$ は実数を成分とする m 行 n 列の行列全体である. さらに (6), (10), (11) も同様に離散化し, $V_{\Omega} \in M_{3E,3S}(\mathbb{R})$ と $\Phi_2 : \mathbb{R}^{3S} \rightarrow M_{3S,3S}(\mathbb{R})$ によって

$$U = V_{\Omega} T - c - \Phi_2(U) U$$

を満たすとする. ここで, V_{Γ} と V_{Ω} の各要素は v_{ki} の線積分を含み, $b \in \mathbb{R}^{3E}$, $c \in \mathbb{R}^{3S}$ は境界値 $u_i(x_s^{\text{bd}})$ を含む.

以上で得られる $(T, U) \in \mathbb{R}^{3E} \times \mathbb{R}^{3S}$ の満たす非線型方程式の逐次近似法として次のふたつのスキームを提案する. 文献 [1] では Navier-Stokes 方程式は扱われていないが, スキーム 2 はそこで他の方程式に対して提案されているものに相当する.

- スキーム 1** 1. 内点での流速の初期推定 U^0 を設定する. 反復回数を表すインデックスを $n = 1$ とする.
2. 積分方程式を離散化した $V_{\Gamma} T^n = b + \Phi_1(U^{n-1}) U^{n-1}$ を解き, T^n を求める.
3. 境界値から内部の点への関係式 $U^n = V_{\Omega} T^n - c - \Phi_2(U^{n-1}) U^{n-1}$ により, U^n を求める.

4. $\|U^n - U^{n-1}\|$ が充分小さければ U^n, T^n を近似解として終了する. そうでなければ n をひとつ増やして, ステップ 2 へ戻る.

- スキーム 2** 1. 内点での流速の初期推定 U^0 を設定する. 反復回数を表すインデックスを $n = 1$ とする.
2. T^n, U^n についての連立線型方程式

$$\begin{pmatrix} V_{\Gamma} & -\Phi_1(U^{n-1}) \\ V_{\Omega} & -I_{2S} - \Phi_2(U^{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^n \\ U^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

を解く. ただし I_{2S} は $2S$ 次の単位行列である.

3. $\|U^n - U^{n-1}\|$ が充分小さければ U^n, T^n を近似解として終了する. そうでなければ n をひとつ増やして, ステップ 2 へ戻る.

スキーム 1 で現れる境界積分方程式は, 未知数が境界要素と同じ数であり, また方程式の係数は反復回数に依存しない. 一方, スキーム 2 の連立方程式は反復ごとに変化し, かつ境界点と内点の両方を未知数とする大規模問題となり, スキーム 1 に比して計算コストが高くなる.

4. 3次元キャビティ流れに対する数値実験結果

$\Omega = (0, 1)^3 \subset \mathbb{R}^3$ とし, 境界条件を上辺で $u(x_1, x_2, 1) = (1, 0, 0)$, 他では $u = (0, 0, 0)$ として数値実験をおこなった.

N を正整数とし, Γ の各面を N^2 個の正方形に等分して境界要素法を適用し, 分割された各正方形の中心を $\{x_s^{\text{bd}}; 1 \leq s \leq 6N^2\}$ とした. また Ω を N^3 の立方体に等分割し, その中心の全体を $\{x_s^{\text{in}}; 1 \leq s \leq N^3\}$ とした. 本報告ではスキーム 1 を用いて, 通常の内部積分を行った BEM と DRM による近似との比較を行った. 通常の内部積分は文献 [1] と同じであるが, 移流項に対しては上流差分近似を適用した. DRM を用いない通常 BEM の内部積分では, 規則的な内部点配置に対しては上流差分を比較的容易に適用できる.

形状関数 $\varphi_s^{(i)}$ には, DRM で標準的にもちいられる radial basis 函数

$$\varphi_s^{(i)}(x) = c_0^{(i)} + c_1^{(i)} r + c_2^{(i)} r^2 + c_3^{(i)} r^3, \quad r = |x - x_s| \quad (12)$$

を利用する. v_{ki} を含む積分は距離の逆数 $1/r$ の特異性が現れるため, 正則化 [7] の利用も有効だが, 本研究では特異点を各正方形境界要素の中心にとり, 複合中点則により $(2k)^2$ 個の標本点を取ってこの特異点が陽に現れないようにした. また初期推定を $U^0 = 0$ とし, U^n と U^{n-1} の ℓ^2 ノルムでの差が 10^{-8} 以下となったときに反復を停止した. 一方, 反復回数が 100 回を超えた場合は収束しないと判断した.

DRM で利用する radial basis 函数は (12) の係数 $c_j^{(i)}$ を $\{0, 1\}$ から選択する $c_j^{(i)}$ の組み合わせは全部で 256 通りあり, 収束する $c_j^{(i)}$ の組み合わせに明確な規則性を見出すことはできていないが, ここでは収束した $\varphi_s^{(1)}(x) = r$, $\varphi_s^{(2)}(x) = r + r^2$ で数値実験を行った.

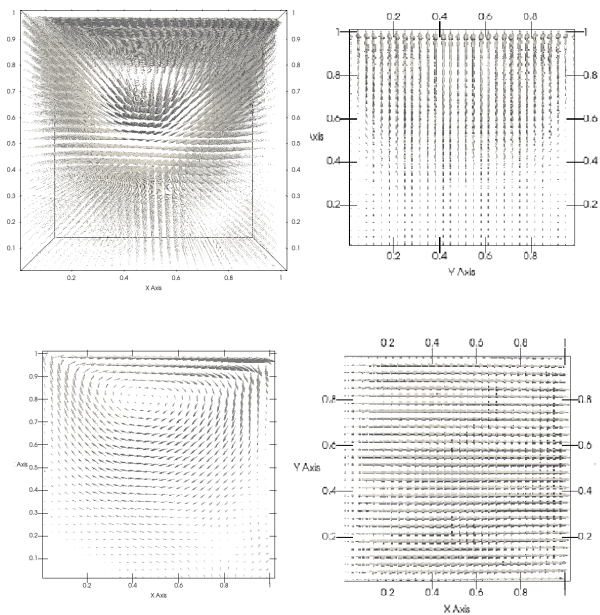


図-1 BEMによるCavityFlow流速場の3D分布と $x=0, y=0, z=0$ への射影, $Re=60, N=30$

(1) 収束性の Reynolds 数依存性, 分割数依存性

Reynolds 数依存性を調べるため, $\rho=1$ とし, μ を変化させて数値計算をおこなった. また分割数 N への依存性も検討した.

計算が収束したものの中で, Re が高いものについて流速分布を示すと BEM では図 1 に, DRM では図 2,3,4 に示す u が得られる.

BEM の収束性として $\|U^n - U^{n-1}\|_2$ の履歴の Re 依存性を図 5,6 に示す. BEM の場合, $Re \geq 70$ では発散している.

また BEM の収束性の分割数 N 依存性を図 7 に示すが, $N=8$ では収束が悪く, $N=9, 10, 20, 30$ で収束性が良くなるが $N=20$ が最も良く, $N=40$ ではエラーになった. BEM では最適分割数の存在が示唆される.

DRM の収束性として $\|U^n - U^{n-1}\|_2$ の履歴の Re 依存性を図 8,9 に示す. DRM の場合, $Re \approx 300$ 程度までは収束し, $Re \geq 1000$ では発散しないものの振動する. DRM では BEM より高い Reynolds 数までの対応可能性が示唆される.

(2) 収束時間の Reynolds 数依存性, 内部点数依存性

収束時間の Reynolds 数依存性について分割数 $N=8$ について BEM と DRM で比較し図 10 に示した. BEM は Reynolds 数が 40 までしか収束しなかったが, DRM の 1000 分の 1 の計算時間となった.

収束時間の内部点数依存性について $Re=1$ について BEM と DRM で比較し図 11 に示した. DRM は内部点数が 500 から 1000 に増えるにしたがって, BEM の 1000 倍, 3000 倍と計算時間が増加する傾向が見られた. BEM と FEM の計算時間は並列化等のチューニングが異なるため厳密な比較とはならないが, 同等の計算速

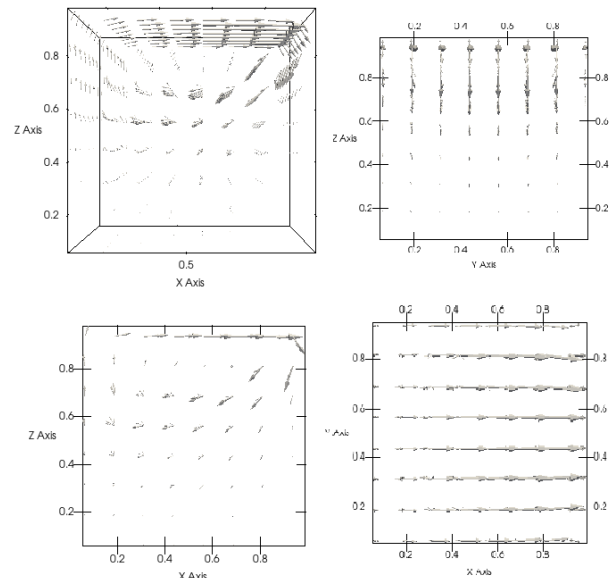


図-2 DRMによるCavityFlow流速場の3D分布と $x=0, y=0, z=0$ への射影, $Re=400, N=8$

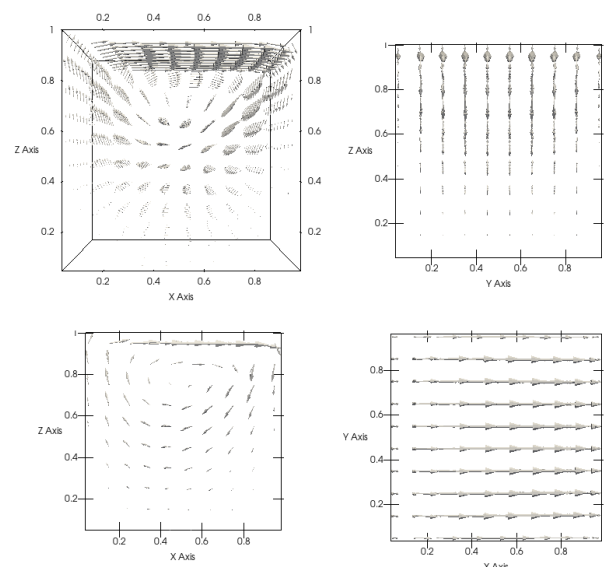


図-3 DRMによるCavityFlow流速場の3D分布と $x=0, y=0, z=0$ への射影, $Re=60, N=10$

度となっている.

5. DRM の利点

(1) 高レイノルズ数計算への対応

BEM と比較して 5 倍程高い Reynolds 数計算ができるようになり, 現実的な Reynolds 数に対しても振動解で不自然な流れになるとはいえ, 発散しない計算ができるようになった. 乱流モデル等により自然な流れが計算できる可能性がありそうである.

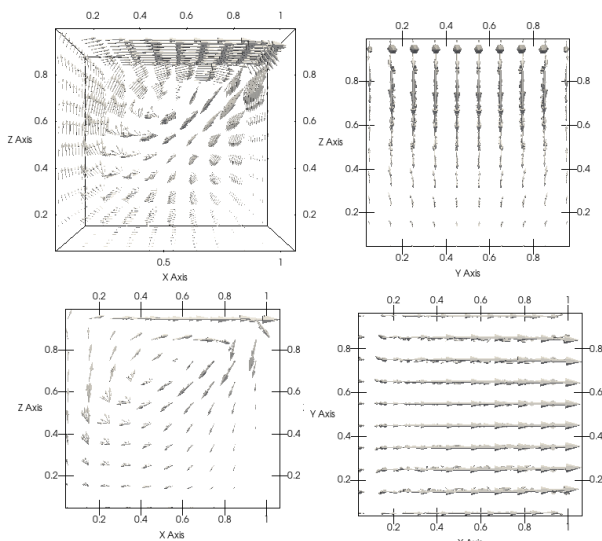


図-4 DRM による CavityFlow 流速場の 3 D 分布と $x = 0, y = 0, z = 0$ への射影, $Re = 300, N = 10$

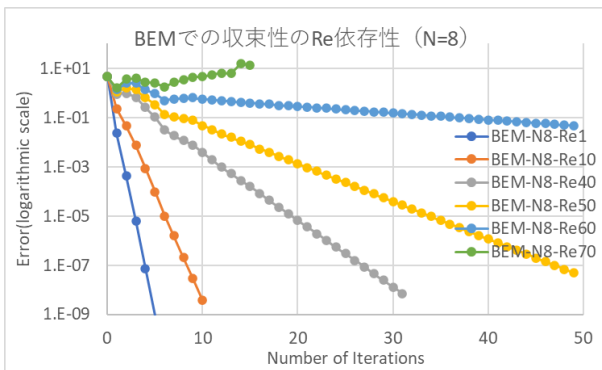


図-5 BEM での $\|U^n - U^{n-1}\|_2$ の履歴の Re 依存性, $N = 8$

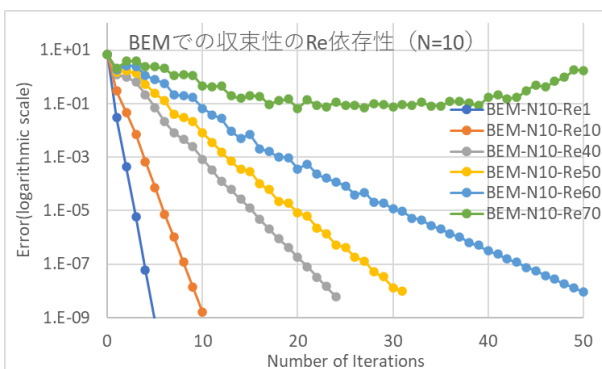


図-6 BEM での $\|U^n - U^{n-1}\|_2$ の履歴の Re 依存性, $N = 10$

(2) 内部積分の勾配の簡易計算

DRM では Radial Basis Functions 近似を用いており、勾配計算が Radial Basis Functions の勾配で近似できるため計算点の分布に依らないため飛躍的に計算の煩雑さが低下する。

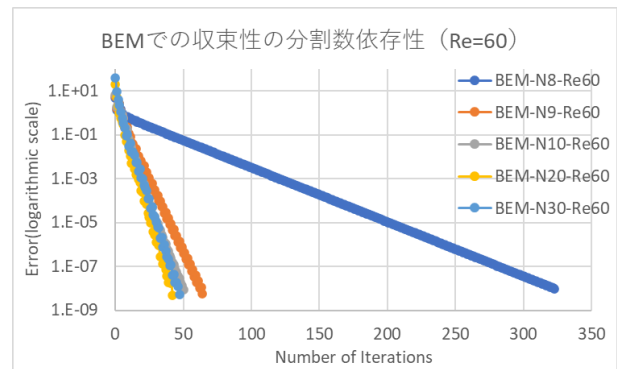


図-7 BEM での $\|U^n - U^{n-1}\|_2$ の履歴の分割数依存性, $Re = 60$

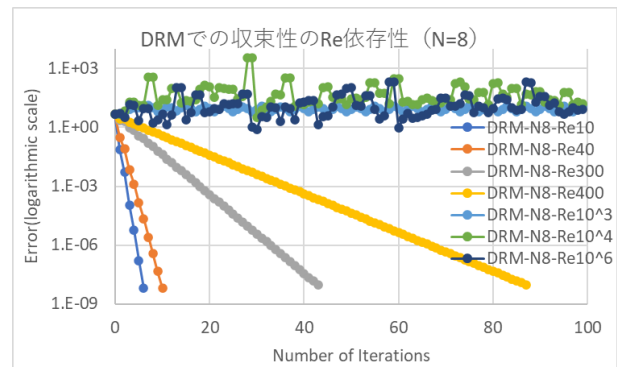


図-8 DRM での $\|U^n - U^{n-1}\|_2$ の履歴の Re 依存性, $N = 8$

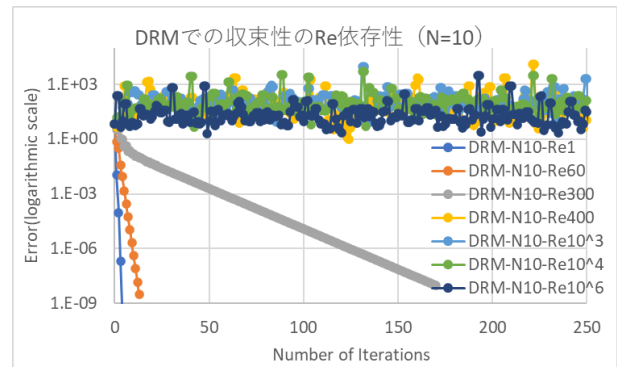


図-9 DRM での $\|U^n - U^{n-1}\|_2$ の履歴の Re 依存性, $N = 10$

(3) 内部積分のメッシュフリー的扱い

内部点の積分に対しては、DRM により定式化が容易になり、メッシュフリーの効果が発揮されている。つまり計算領域内のメッシュ生成は不要で、境界領域のみメッシュ生成することで、メッシュ生成のコストを低減できる。

6. DRM の課題

(1) 計算コスト

BEM は内部点を使わないことで計算点が少なくなることが有利とされていたが、非同次項の計算では内部点での計算が必要となる。その場合 FEM と同等の計算コ

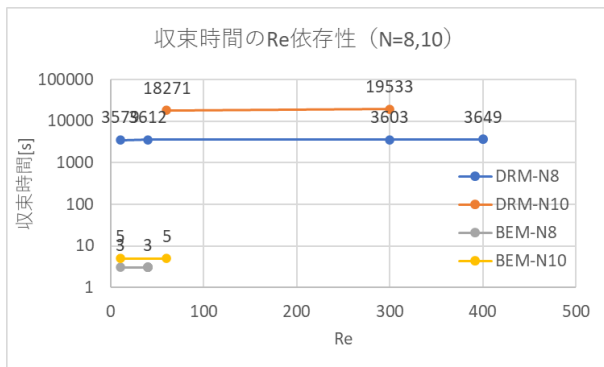


図-10 BEM, DRM の収束時間の Re 依存性, $N = 8, 10$

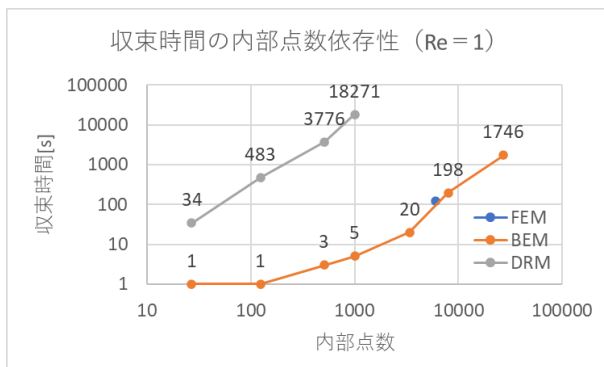


図-11 BEM, DRM の収束時間の内部点数依存性, $Re = 1$

ストになるため、利点とは言えなくなっている。DRM においては F_1 , F_2 の逆行列計算に時間がかかるとともに、圧力と速度成分を同時に解く際に大規模連立方程式を解く必要があり、計算コストが FEM と比較して大きくなる。対策として逆行列計算に領域分割 [8] 等を利用する高速化が考えられる。

7. 検証方法の課題

3次元の Cavity Flow の検証用のデータがスペクトル法を用いた Ku[9] のものしか見当たらなかった。検証と妥当性の確認 (V&V) のためには、実験データの整備が求められる。

8. まとめ

BEM の内部積分の煩雑性に対応するため DRM を検討した。DRM により等方性のある物理量の勾配計算が比較的簡便化され、メッシュフリーの効果が発揮されていることを確認したが、逆行列計算に大きなコストが発生することが定量的に示された。Reynolds 数に関しては、DRM により通常の BEM の数倍程度まで対応でき、数値大きい Reynolds 数に対しては不自然な流れになるが発散しないことがわかった。これらに対し乱流モデルや領域分割などで高速化の可能性の検討が今後の課題として挙げられる。また 3次元 CavityFlow 計算の検証方法の確立も課題と考えられる。

謝辞: 登坂宣好先生には、ご助言とご議論を頂いた。第 2 著者の研究の一部は JSPS 科研費 JP22K18674, JP24K00539 の助成を受けた。

参考文献

- [1] Partridge, P. W. Brebbia, C. A. and Wrobel, L. C.: The Dual Reciprocity Boundary Element Method, Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science, 1992.
- [2] 山田義博, 登坂宣好: 微分作用素の基本解と特解に基づいた非圧縮粘性流れの低コスト非圧縮粘性流れ解析数値スキームの開発, 計算工学講演会論文集 Vol. 27, 2022.
- [3] Yamada, Y. and Tosaka, N.: Development of low-cost solver for incompressible viscous fluid flow based on the fundamental and particular solutions of differential operator, 15th World Congress on Computational Mechanics (WCCM-XV), 2022.
- [4] 山田義博, 登坂宣好: 微分作用素の基本解と特解に基づいた非圧縮粘性流れの低コスト 3 次元数値解法の開発, 計算工学講演会論文集 Vol. 28, 2023.
- [5] 山田義博, 登坂宣好, 藤原宏志: DRM を用いた非圧縮粘性流れの境界要素法の開発, 計算工学講演会論文集 Vol. 29, 2024.
- [6] 数値流体力学編集委員会編: 非圧縮性流体解析, 東京大学出版会, p. 253, 1995.
- [7] Tanaka, M., Sladek, V. and Sladek, J.: Regularization techniques applied to boundary element methods, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 47, pp. 457–499, 1994.
- [8] 岩瀬英仁, 神谷紀夫, 北栄輔: 境界要素解析の並列計算のためのアルゴリズムの検討: 解の収束性, シミュレーション (Japan Society for Simulation Technology), Vol. 15, No.3, PP.187-193, 1996
- [9] Hwar C.Ku, Rishard S. Hirsh, and Thomas D. Taylor: A Pseudospectral Method for Solution of the Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations, *Journal of Computational Physics*, 70, pp439-462, 1987