

アセンブリ構造物の一部コンポーネントを次数低減モデルとした領域分割型解析手法の実現に向けた検討

Study on a Domain Decomposition-Based Analysis Method for an Assembly Structure with Certain Components Modeled by a Reduced-Order Model

宮村倫司¹⁾, 齊藤泰仁¹⁾, 遊佐泰紀²⁾

Tomoshi Miyamura, Taiji Saito and Yasunori Yusa

1) 日本大学工学部情報工学科 (〒963-8642 郡山市田村町徳定字中河原1)

2) 電気通信大学大学院情報理工学研究科機械知能システム学専攻 (〒182-8585 東京都調布市調布ケ丘 1-5-1)

A preliminary study is conducted to reduce the number of degrees of freedom in a high-dimensional model (HDM) of an assembly structure. Certain components of the assembly are modeled using a Galerkin projection reduced-order model (ROM), while the remaining components are modeled as an HDM. The ROMs and HDM are combined using a domain decomposition technique, where the ROM is treated as a subdomain and the HDM is decomposed into a number of subdomains. A ROM for a structure with Dirichlet boundary conditions as parameters is constructed and tested in this study.

Key Words : *Assembly Structure, Finite Element Method, Reduced Order Model, ROM, Domain Decomposition*

1. はじめに

多くの人工物は多数のコンポーネント(部品)で構成されており、複雑な形状をしている。その構造解析(アセンブリ構造解析)を有限要素法(FEM)で行うためには、形状を正確にモデル化するだけでも多くの要素が必要であり、解析精度を高めるためには、さらに細かい要素分割が必要である。並列解析技術や計算機の性能の向上により、そのような大規模高精細モデル(High-Dimensional Model, HDM)による解析も可能になっている。しかし、より実用的な解析をするためには、計算速度の高速化が必要である。

本研究では最終的には、アセンブリ構造物の詳細な有限要素解析において、関心があるコンポーネントは詳細なメッシュ(HDM)でモデル化し、それ以外のコンポーネントは次数低減モデル(Reduced Order Model, ROM)とすることで、全体の自由度を削減し、かつ、複数のコンポーネントの連成効果は考慮できるような手法の実現を目指す。ROMとしてはGalerkin射影に基づく手法[1][2]を用い、部分構造型領域分割法の1個の部分領域として他のコンポーネントと接合する。ここでは、ROMを部分領域とするために必要な、ディリクレ境界条件をパラメータとしたコンポーネントのROMの作成を試み、それを部分構造型領域分割法に組み込むための定式化を行う。

2. Galerkin射影に基づくROM

文献[1][2]を参考にしてGalerkin射影に基づくROMについて整理する。時間依存のない偏微分方程式を離散化し

た次元 N のHDMは、一般に次式のように表される。

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\mu}); \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

ここに、 $\boldsymbol{\mu}$ はパラメータのベクトル、 $\mathbf{u}(\boldsymbol{\mu}) \in R^N$ は解ベクトル、 $\mathbf{r}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) \in R^N$ は $\boldsymbol{\mu}$ と $\mathbf{u}(\boldsymbol{\mu})$ に依存するベクトルである。構造解析におけるパラメータ $\boldsymbol{\mu}$ として、材料定数、解析領域(対象)の形状、境界条件等が考えられる。次に、解 $\mathbf{u}(\boldsymbol{\mu})$ をアフィン部分空間により近似する。

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\mu}) \approx \mathbf{u}_{ref} + \mathbf{V}\mathbf{y}(\boldsymbol{\mu}) \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{V}$ は次数低減基底(Reduced Order Basis, ROB)であり、また、 $\mathbf{u}_{ref}$ は適当に与える。これを用いると、式(1)に対する Petrov-Galerkin 射影に基づく ROM の基礎式が以下のように得られる。

$$\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{y}(\boldsymbol{\mu}); \boldsymbol{\mu}) \equiv \mathbf{W}^T \mathbf{r}(\mathbf{u}_{ref} + \mathbf{V}\mathbf{y}(\boldsymbol{\mu}); \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

構造解析では重み $\mathbf{W}$ を $\mathbf{V}$ とすることができる。この場合には Galerkin 射影に基づく ROM となる。

次数低減基底 $\mathbf{V}$ を求める方法を以下に述べる。まず、 k 個の $\boldsymbol{\mu}$ ($\boldsymbol{\mu}_i$ ($i=1 \sim k$)と表す)に対して HDM により解析を行う。その解ベクトル $\mathbf{u}(\boldsymbol{\mu}_i)$ ($i=1 \sim k$)をスナップショットと呼ぶ。 $\mathbf{u}(\boldsymbol{\mu}_i)$ を並べて次の行列を定義する。

$$\mathbf{S}^{(k)} = [\mathbf{u}(\boldsymbol{\mu}_1) - \mathbf{u}_{ref}, \dots, \mathbf{u}(\boldsymbol{\mu}_k) - \mathbf{u}_{ref}] \quad (4)$$

$\mathbf{u}_{ref}$ はスナップショット $\mathbf{u}(\boldsymbol{\mu}_i)$ の平均や $\mathbf{0}$ 等に設定する。

次に、 $\mathbf{S}^{(k)}$ の特異値分解を次式のように求める。

$$\mathbf{S}^{(k)} = \mathbf{U}_{SVD} \boldsymbol{\Sigma}_{SVD} \mathbf{W}_{SVD} \quad (5)$$

$\mathbf{V}$ は $\mathbf{U}_{SVD}$ の列の中から、適当な閾値よりも絶対値が大きい特異値($\boldsymbol{\Sigma}_{SVD}$ の対角成分)に対応する列を抽出するこ

とで作成する。

以下では、有限要素法に基づき離散化された静的線形構造解析のモデルを HDM として、これに対する ROM を作成する。HDM に対する釣り合い式は次式となる。

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{p}(\boldsymbol{\mu}) \quad (6)$$

ここに、 $\mathbf{K}(\boldsymbol{\mu})$ は剛性行列、 $\mathbf{p}(\boldsymbol{\mu})$ は荷重ベクトルである。また、解ベクトル $\mathbf{u}(\boldsymbol{\mu})$ は節点変位ベクトルとなる。式(6)を式(1)の形式に書き直すと次式となる。

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\mu}); \boldsymbol{\mu}) \equiv \mathbf{p}(\boldsymbol{\mu}) - \mathbf{K}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{u}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0} \quad (7)$$

式(2)を代入した式(7)を式(3)に代入し、 $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ 、 $\mathbf{u}_{ref} = \mathbf{0}$ とすると次式となる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{y}(\boldsymbol{\mu}); \boldsymbol{\mu}) &\equiv \mathbf{V}^T (\mathbf{p}(\boldsymbol{\mu}) - \mathbf{K}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{V}\mathbf{y}(\boldsymbol{\mu})) \\ &= \mathbf{V}^T \mathbf{p}(\boldsymbol{\mu}) - (\mathbf{V}^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{V})\mathbf{y}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)を整理すると次のように Galerkin 射影 ROM (以下、ROM と呼ぶ) の基礎式が得られる。

$$(\mathbf{V}^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{V})\mathbf{y}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{V}^T \mathbf{p}(\boldsymbol{\mu}) \quad (9)$$

式(9)を $\mathbf{y}(\boldsymbol{\mu})$ について解き、式(2)に代入すれば節点変位ベクトルの近似を計算できる。

3. ディリクレ境界条件をパラメータ $\boldsymbol{\mu}$ としての ROM

ここではパラメータ $\boldsymbol{\mu}$ がディリクレ境界条件を表す場合について検討する。ディリクレ境界条件を付与すると、節点変位ベクトルの成分の一部が既知の値となるため、剛性行列の構造が変化する。最初に、様々なディリクレ境界条件の処理手法について整理する。

ディリクレ境界上の自由度を添字 $\mathbf{B}$ で、それ以外の自由度を添字 $\mathbf{I}$ で表す。ディリクレ境界も含めた (有限要素法により離散化された) 釣り合い式は次式のように表される。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IB} \\ \mathbf{K}_{BI} & \mathbf{K}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \hat{\mathbf{u}}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_I \\ \mathbf{r}_B \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここに、 $\hat{\mathbf{u}}_B$ と $\hat{\mathbf{p}}_I$ は境界条件として与えられた既知のベクトルであり、 $\hat{\mathbf{u}}_B$ はディリクレ境界上で指定された変位、 $\hat{\mathbf{p}}_I$ は等価節点荷重である。また、 $\mathbf{r}_B$ はディリクレ境界上で発生する反力である。ディリクレ境界処理の最も基本的な方法は、ディリクレ境界自由度を除く方法である。式(10)より $\mathbf{K}_{II}$ を係数行列とする次式が得られる。

$$\mathbf{K}_{II}\mathbf{u}_I = -\mathbf{K}_{IB}\hat{\mathbf{u}}_B + \hat{\mathbf{p}}_I \quad (11)$$

ただし、 $\hat{\mathbf{u}}_B$ は未知数ではないことに注意する。これを $\mathbf{u}_I$ について解いた後で反力 $\mathbf{r}_B$ を次式のように求める。

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{K}_{BI}\mathbf{u}_I + \mathbf{K}_{BB}\hat{\mathbf{u}}_B \quad (12)$$

式(11)では境界条件を処理する前の式(10)と比べて自由度が減っている。ROM を作成するときには式(9)の $\mathbf{K}$ を $\mathbf{K}_{II}$ に置き換える。

ディリクレ境界の処理後も剛性行列や変位、荷重を格納する配列等の大きさが変わらない方法もあり、実装上の煩雑さを避けられる。その中で、次式のようにディリク

レ自由度に関する係数行列の対角項に1を入れ、それ以外は0とする方法がある。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{IB}\hat{\mathbf{u}}_B + \hat{\mathbf{p}}_I \\ \hat{\mathbf{u}}_B \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここに、 $\mathbf{I}_{BB}$ は単位行列を表す。右辺には $\hat{\mathbf{u}}_B$ に関する項があり、左辺の $\mathbf{u}_B$ は未知数 (方程式を解くと $\mathbf{u}_B = \hat{\mathbf{u}}_B$ となる) であることに注意する。この方法でも反力は式(12)により求める。この他に、次式で表されるペナルティ法がある。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IB} \\ \mathbf{K}_{BI} & \mathbf{K}_{BB} + \alpha \mathbf{I}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_I \\ \alpha \hat{\mathbf{u}}_B \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここに α はペナルティ定数であり適当な大きい数とする。この方法では、ディリクレ境界条件は近似的に満たされる。

式(13)の単位行列ブロックの対角成分の1や式(14)のペナルティに関する成分は、一般的には剛性行列の値と大きく異なる。例えば、ある問題に対して式(14)により ROM を作成したところ、ROM の係数行列や右辺ベクトルの成分は、全体的にペナルティ定数に起因する大きい値となった。この問題ではそれでも HDM を近似する値が得られた。とはいえ、ROM の作成には式(13)、(14)ではなく、式(11)を用いる方が好ましいと考えられる。

4. 部分構造型領域分割法

式(6)の釣り合い式を領域分割法の中でも部分領域内部の自由度を消去する部分構造型領域分割法により解くものとする。これ以降の式では $\boldsymbol{\mu}$ は省略する。まず、解析領域を N 個のオーバーラップのない部分領域に分割する。部分領域 k に対する剛性行列を $\mathbf{K}^{(k)}$ 、節点変位を $\mathbf{u}^{(k)}$ 、節点荷重を $\mathbf{p}^{(k)}$ としたとき、これらの行列、ベクトルを次式のように部分領域内部の自由度と部分領域間境界の自由度に分割する。

$$\mathbf{K}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^{(k)} & \mathbf{K}_{IB}^{(k)} \\ \mathbf{K}_{BI}^{(k)} & \mathbf{K}_{BB}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I^{(k)} \\ \mathbf{u}_B^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_I^{(k)} \\ \mathbf{p}_B^{(k)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここでは、添字 $\mathbf{I}$ は部分領域内部の自由度を、添字 $\mathbf{B}$ は部分領域間境界上の自由度を表す。部分領域間境界全体の自由度数を n_B とする。また、部分領域 k に関係する領域間境界自由度の自由度数を $n_B^{(k)}$ とする。後に示すように、最終的には部分領域間境界はディリクレ境界として表されるため、ここでは式(10)と同じ添字 $\mathbf{I}$ および $\mathbf{B}$ を用いている。

部分領域の内部の自由度に関する釣り合いは次式のように各部分領域において独立に成立する。

$$\mathbf{K}_{II}^{(k)}\mathbf{u}_I^{(k)} + \mathbf{K}_{IB}^{(k)}\mathbf{u}_B^{(k)} = \mathbf{p}_I^{(k)} \quad (16)$$

一方、部分領域間境界自由度の釣り合いは次式で表され

る。

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{N}_B^{(k)} \mathbf{K}_{BI}^{(k)} \mathbf{u}_I^{(k)} + \sum_{k=1}^N \mathbf{N}_B^{(k)} \mathbf{K}_{BB}^{(k)} \mathbf{u}_B^{(k)} = \sum_{k=1}^N \mathbf{N}_B^{(k)} \mathbf{p}_B^{(k)} \quad (17)$$

ここに、 $\mathbf{N}_B^{(k)}$ は部分領域 k に関する領域間境界自由度を全ての部分領域に対する領域間境界自由度に変換するブーリアン行列である。式(16)は次のように内部節点変位について解くことができる。

$$\mathbf{u}_I^{(k)} = \left(\mathbf{K}_{II}^{(k)} \right)^{-1} \left(\mathbf{p}_I^{(k)} - \mathbf{K}_{IB}^{(k)} \mathbf{u}_B^{(k)} \right) \quad (18)$$

式(18)を式(17)に代入すると次式のようにまとめられる。

$$\mathbf{S} \bar{\mathbf{u}}_B = \bar{\mathbf{p}}_B \quad (19)$$

ここに、 $\mathbf{S}$ はSchur complement, $\bar{\mathbf{u}}_B$ は部分領域間境界上の全ての節点に対する節点変位ベクトル, $\bar{\mathbf{p}}_B$ は部分領域間境界上の自由度に静的縮約された節点荷重ベクトルである。行列 $\mathbf{S}$ は $n_B \times n_B$ 型行列となる。部分領域 k に対するローカルSchur complementを $\mathbf{S}^{(k)}$ とすると、全体のSchur complementである $\mathbf{S}$ は次式となる。

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^N \mathbf{N}_B^{(k)} \mathbf{S}^{(k)} \mathbf{N}_B^{(k)T} \quad (20)$$

ここに、

$$\mathbf{S}^{(k)} = \mathbf{K}_{BB}^{(k)} - \mathbf{K}_{BI}^{(k)} \mathbf{K}_{II}^{(k)-1} \mathbf{K}_{IB}^{(k)} \quad (21)$$

である。

式(19)は前処理付き共役勾配法で解くものとする。 $\mathbf{u}_I^{(k)}$ の静的縮約を行わず、内部自由度も部分領域間境界自由度と共に前処理付き共役勾配法で解くと、いわゆる並列反復ソルバーとなる。この場合、ローカル Schur complement $\mathbf{S}^{(k)}$ の代わりに、ローカル剛性行列 $\mathbf{K}^{(k)}$ となる。

CG法の計算過程では $\mathbf{S}$ とベクトルの積の計算がある。そのために、次式のようなローカルSchur complement $\mathbf{S}^{(k)}$ とベクトルの積の計算が必要である。

$$\mathbf{b}_B^{(k)} = \mathbf{S}^{(k)} \mathbf{a}_B^{(k)} \quad (22)$$

$\mathbf{S}^{(k)}$ を陽に作る代わりに、次式のように本来のディリクレ境界に加えて部分領域境界自由度もディリクレ境界として与えた問題（ディリクレ問題）を解く方が効率的である。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^{(k)} & \mathbf{K}_{IB}^{(k)} \\ \mathbf{K}_{BI}^{(k)} & \mathbf{K}_{BB}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I^{(k)} \\ \mathbf{a}_B^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_I^{(k)} \\ \mathbf{b}_B^{(k)} \end{bmatrix} \quad (23)$$

これは前節の式(10)と同じ形式であり、そこで説明した方法で処理することができる。

5. アセンブリ構造物の一部コンポーネントを次低減モデルとした領域分割型解析手法

図-1は典型的なアセンブリ構造物である原子力発電所

の有限要素メッシュの一部の拡大図である。建屋や格納容器、圧力容器等のコンポーネントで構成されている。建屋や容器はさらに細かいコンポーネントで構成されている。このメッシュでは、これらのコンポーネントを丸ごとモデル化している。

建屋と圧力容器は共に大規模な構造物であるものの、構造物としての役割は異なっている。建屋の構造解析をしたいときには、損傷や弾塑性特性等々の詳細な解析が必要なのは建屋だけであり、他のコンポーネントは、建屋に対する連成効果を正しく評価できる程度の精度で解析できれば十分である。逆に圧力容器の解析をしたいときには、建屋の詳細な挙動には興味がないことになる。

そこで、詳細に解析したいコンポーネントはHDMで、それ以外のコンポーネントはROMでモデル化し、それらを結合したモデルが作成できれば、見たいところは局所的にも精度よく、それ以外の部分は全体的な挙動のみを解析できると考えられる。部分構造型領域分割法における1個の部分領域の問題は、式(23)に示すように、部分領域に対するディリクレ境界問題となるため、これをROMで置き換えることも容易であると考えられる。

この方法では、ROMとするコンポーネントは、コンポーネント全体が1個の部分領域となり、それ以外のHDMでモデル化するコンポーネントは、通常の領域分割法による解析のように、自動的に領域分割する必要がある。図-2に簡単な解析モデルをそのように領域分割した例を示す。この分割モデルは、まず、HDMとする領域を、ADVENTUREプロジェクト⁴⁾が公開する自動的に領域分割を行うソフトであるADVENTURE_Metisにより分割しておき、それにROMとする領域を部分領域として追加するという方法により作成したものである。なお、図-2に示す領域分割は、ADVENTUREプロジェクトの解析ソルバーで用いられる階層型領域分割になっている。この分割では全体をまずパートと呼ばれる単位に分割し、各パートをさらに部分領域に分割する。この場合には、1個のパートをROMで解析するコンポーネントとしており、HDMの領域は図のように2階層の分割になっている。単層分割の場合には、ROMが1個の部分領域になるようにする。

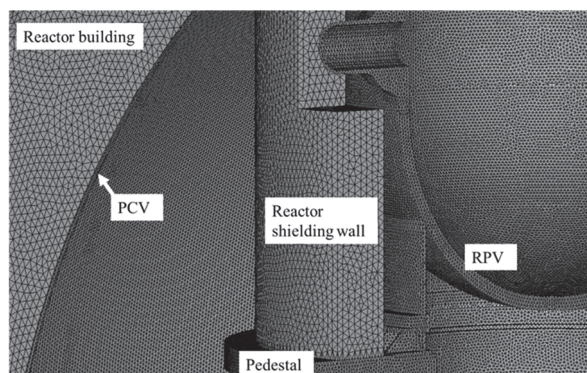


図-1原子力発電所モデルのメッシュ（HDM）（圧力容器下部を拡大）³⁾

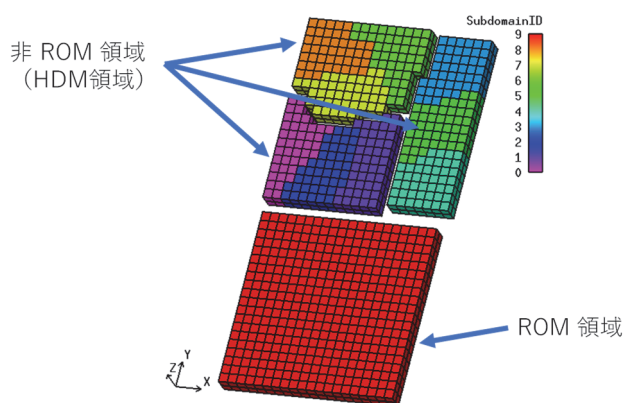


図-2 領域分割

6. ディリクレ境界条件をパラメータとしたROMの数値解析例

図-3 のモデルの底面を拘束し、図-4 のように上面の 9 節点それぞれの変位を指定したときの 9 個の解をスナップショットとして収集する。特異値を表-1 に示す。明確に小さい値の特異値はないため、 U_{svd} の全ての成分を V として用いる。作成した ROM は、9 個のスナップショットを再現することができ、また、図-5 のような 9 個の節点に任意の変位分布を与えるような問題でも HDM と有効桁数の範囲で解が一致した (図-6)。

さらに、各節点の鉛直方向以外の成分を強制変位とした結果も追加して、合計 27 個のスナップショットで ROM を作成したところ、上面にどのような強制変位を与えても HDM を再現できるようになった。したがって、少なくともこのモデルを ROM として、上面を部分領域間境界として他の HDM と接続すれば、5 節に述べた一部のコンポーネントを ROM としたモデルを作成可能であるといえる。

7. おわりに

アセンブリ構造物の一部コンポーネントを次数低減モデルとした領域分割型解析手法の実現に向けた検討を行った。そのために、ディリクレ境界をパラメータとした Galerkin 射影 ROM の作成を試み、簡単なモデルでは HDM を再現するような ROM を作成できた。

実際にひとつの部分領域をこの ROM として、他の部分領域は HDM とした領域分割法において、共役勾配法で解が求められるのかについて、今後、実装を進めた上で検証を行う。一方、例題によっては ROM で HDM をうまく再現できないケースもあったため、ROM の作成手法についてもさらに研究を進める。

謝辞: 本研究は科研費 (24K14984) によるものである。また、防災科学技術研究所の山下拓三研究員からは有用なアドバイスを得た。ここに感謝の意を表する。

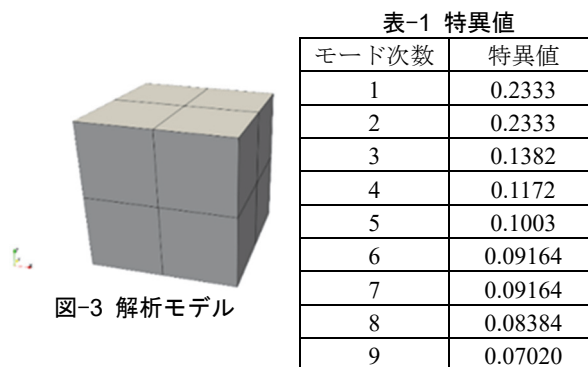


図-3 解析モデル

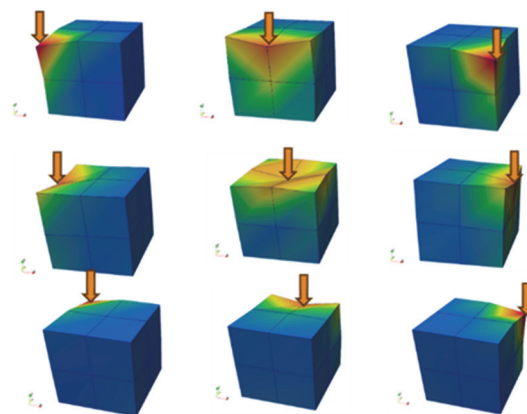


図-4 スナップショット

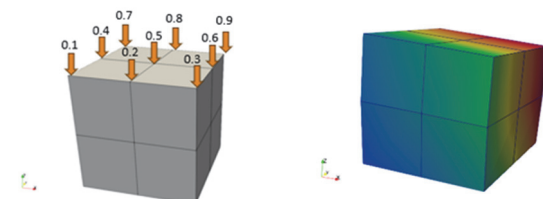


図-5 強制節点変位分布

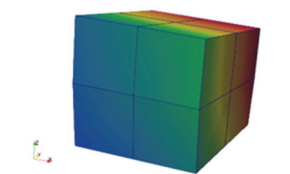


図-6 変形と相当応力分布

参考文献

- [1] Tezaur, R., As'ad, F., Farhat, C.: Robust and globally efficient reduction of parametric, highly nonlinear computational models and real time online performance, *Comput Methods Appl Mech Engrg*, Vol. 399, 115392, 2022.
- [2] Farhat, C., Avery, P., Chapman, T., Cortial, J: Dimensional reduction of nonlinear finite element dynamic models with finite rotations and energy-based mesh sampling and weighting for computational efficiency, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 98, Issue 9, pp. 625-662, 2014.
- [3] 吉村忍, 宮村倫司, 山田知典, 秋葉博, 清浦英明: 3次元有限要素法による2011年東北地方太平洋沖地震本震時の東京電力福島第一原子力発電所1号機の応答解析 (第1報: 解析手法の開発とモデル構築及び解析性能検証), 日本原子力学会和文論文誌, Vol. 18(3), pp. 135-159, 2019.
- [4] ADVENTUREプロジェクトWebサイト, <https://adventure.sys.t.u-tokyo.ac.jp/jp/>