

接触変形をともなう 2次元アーチ破壊の解析

The crack propagation of two-dimensional arch deformed by contact with a flat plate

佐藤 惣一郎¹⁾ 高石 武史²⁾ 田中 正史³⁾
Soichiro Sato, Takeshi Takaishi and Masafumi Tanaka

¹⁾修 (工) 武蔵野大学大学院 工学研究科 (〒 135-8181 東京都江東区有明三丁目 3 番 3 号, E-mail: g2386002@stu.musashino-u.ac.jp)

²⁾博 (理) 武蔵野大学 工学部 教授 (〒 135-8181 東京都江東区有明三丁目 3 番 3 号, E-mail: taketaka@musashino-u.ac.jp)

³⁾博 (工) 東海大学 建築都市学部 准教授 (〒 259-1292 神奈川県平塚市北金目 4 丁目 1 番 1 号, E-mail: masafumi_tanaka@tokai.ac.jp)

The crack propagation of arch deformed by contact with a flat plate is investigated by two-dimensional numerical simulation using a gradient flow-type phase field model suitable for unilateral contact condition. It is found that the position and propagation of the initial crack differed depending on the width of the arch and the fixing condition of the bottom.

Key Words : crack growth, phase field, contact problem, FEM

1. はじめに

アーチ形状は、建造物に開口部を設けるために用いられるが、上部からかかる荷重を圧縮力として伝えるために石組み構造の橋などでもよく用いられている。その一方で、変形した場合には荷重への耐久性が下がることが予想される。本研究では接触変形による変形とそこから生じるき裂の進展に注目した。例えば、タイヤと地面の抵抗力を計算する場合には、接触することによって弾性変形を生じ、また、その変形によって接触面が変わることを考慮する必要がある。本研究ではアーチ形状におけるき裂の発生と進展について調べた。アーチ形状に上部から水平な板が接触しながら変形するとともに、き裂が発生、進展する場合について、アーチの厚みとき裂形状の関係を数値シミュレーションを用いて調べた。計算にあたっては、フェーズフィールドき裂進展モデルと接触変形問題を組み合わせることで、裁断機による断裂面の形状がブレードの間隔によって変化することを数値シミュレーションによって示した際の手法を用いた [1]。

2. 非貫入条件を反映したモデル方程式

従来のフェーズフィールドき裂進展モデルではき裂面が再度接触する場合に弾性エネルギーが上昇しないため、unilateral contact condition [2] を導入することでき裂面が再度交差することを回避した。ここでは、2次元弾性体としてアーチ形状におけるき裂進展について考える。弾性体をき裂を含む有界な領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ として考え、物体の変位を $u \in \mathbf{R}^2$ とする。ここで、き裂を表現するフェーズフィールドとして、き裂領域で 1 き裂のない領域で 0 となるような連続関数 $\phi \in [0, 1]$ を考える。T-Kimura が導出したき裂進展モデル [3] に対して、Chambolle-Conti-Francfort によって提案された unilateral contact condition [4] を組み込むと、次のようなき裂面

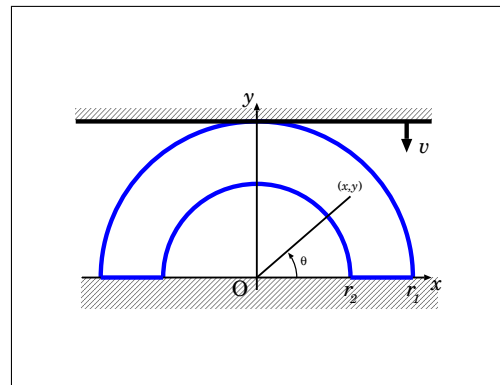


図-1 外径 r_1 、内径 r_2 のアーチと接触している水平な板の降下

の非貫入条件を満たす勾配流モデルが導出される [2]:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}((1-\phi)^2\sigma_+[u] + \sigma_-[u]) = f(x, t) \\ \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(\epsilon \operatorname{div}(\gamma(x)\nabla \phi) - \frac{\gamma(x)}{\epsilon} \phi + (1-\phi)w_+[u] \right)_+ \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\sigma_+[u] := \tilde{\lambda}(\operatorname{div}u)_+I + 2\mu e_D[u]$, $\sigma_-[u] := \tilde{\lambda}(\operatorname{div}u)_-I$, 及び、 $w_+(u) := \frac{1}{2}\tilde{\lambda}(\operatorname{div}u)_+^2 + 2\mu|e_D[u]|^2$, $e_D[u] := e[u] - \frac{1}{d}(\operatorname{div}u)I$ とする。また、 $(\operatorname{div}u)_+ = \max(\operatorname{div}u, 0)$ と $(\operatorname{div}u)_- = (-\operatorname{div}u)_+$ はそれぞれ正または負の $\operatorname{div}u$ であり、 $\tilde{\lambda} := \lambda + 2\mu/d$ である。

3. アーチの接触変形

アーチが一般的な線形弾性体として変形すると仮定し、上部から水平な板が時間とともに降下することでどのような接触変形を起こすか、数値シミュレーションで確認した。外径 $r_1 = 1.0$ 、内径 $r_2 = 0.8$ の 2次元アーチが、上方に接触し速度 $v = 0.001$ で降下する平板により変形するものとする 1. このとき、材質の変位 $u = (u_1, u_2)$

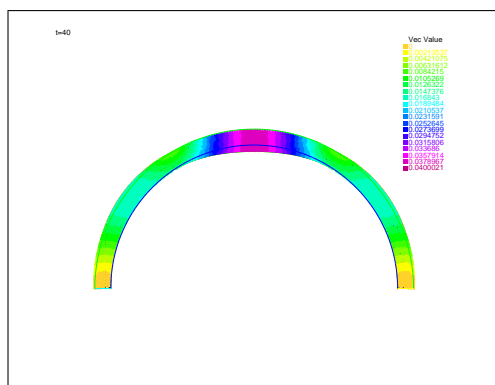


図-2 $r_1 = 1, r_2 = 0.9$ のアーチにおける接触変形 ($t = 40$)

とすると、変形後の y 座標 $y + u_2$ は不等式拘束条件 $0 \leq y + u_2 \leq 1 - vt$ に従うことになる。そこで、変位は次の不等式拘束条件に従うとして FreeFEM[5] において IPOPT パッケージを併用して計算を行う。

$$\begin{cases} -L \leq u_1 \leq L \\ -y \leq u_2 \leq 1 - vt - y \end{cases} \quad (2)$$

ここで L は十分大きな数 (今回は 10^{19}) である。

材料特性として、実験に用いたコンクリート材のヤング率 35(GPa), ポアソン比 1/6 を用い、弾性変形のシミュレーションを行うと、上方の水平な板の接触により、接触領域である上部のみではなく、全体が変形していることがわかる (図-2)。

4. アーチのき裂進展シミュレーション

アーチの内径が $r_2 = 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$ の場合において接触変形におけるき裂進展を、1 を用い、臨界エネルギー解放率 $\gamma = 1.6 \times 10^{-4}(\text{MPa})$ として調べた。数値シミュレーションの結果、アーチの内径が大きい (アーチの厚みが小さい) 場合には変形が大きい内側の中心軸付近からき裂が進展する (図-3(a))。一方、内径が比較的小さい (厚みが比較的大きい) 場合には外側の接触面に近い部分から 2 箇所き裂が生じていることがわかる (図-3(b))。また、外側に近い面と内側に近い面でのフェーズフィールドの値の偏角に対する分布の時間変化を調べると、アーチが薄い場合には明らかに内側から破壊が始まっていることがわかる (図-4)。また、 $\text{div}u$ の分布から、内側からの破壊は引張応力 ($\text{div}u > 0$) に起因していることがわかる (図-5)。一方、アーチが厚い場合には、明らかに外側から破壊が始まっていることがわかり (図-6), $\text{div}u$ の分布から、外側からの破壊は圧縮応力 ($\text{div}u < 0$) に起因していることがわかる (図-7)。

繊維補強コンクリートで打設したアーチを用いた実験結果 (図-8) と比較した。この実験で用いた材料は、予め円柱供試体によりヤング率が 33.7(GPa) であることを確認した。 $r_1 = 0.17(\text{m}), r_2 = 0.15(\text{m})$ で幅 6(m) のアーチを作成し、载荷装置を用いて左側の脚は壁で移動を制限し、右側の脚のみを移動できるようにして、初期き裂が発生するまで荷重をかけていった。その結果、シミュレーション結果と同様に内側の中心軸付近 ($\theta = 90^\circ$) 付近からき裂が生じることが確認できた。

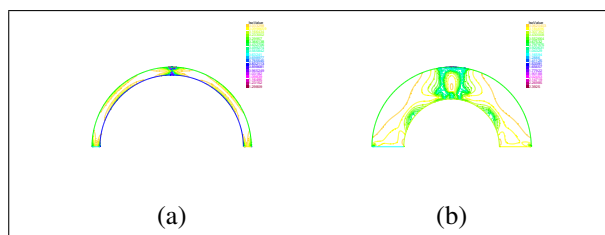


図-3 内径が (a) $r_2 = 0.9$ と (b) $r_2 = 0.6$ のアーチにおける断裂後のフェーズフィールドの値の分布 ($t = 20$)

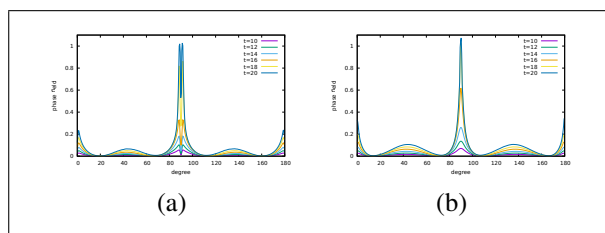


図-4 $r_2 = 0.9$ のアーチにおける (a) $r = 0.98$ と (b) $r = 0.92$ の面における、各時刻でのフェーズフィールドの値の分布

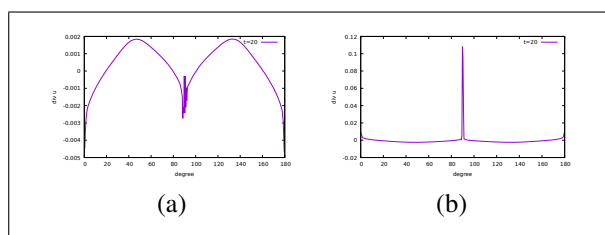


図-5 $r_2 = 0.9$ のアーチにおける (a) $r = 0.98$ と (b) $r = 0.92$ の面における、 $t = 20$ での $\text{div}u$ の値の分布

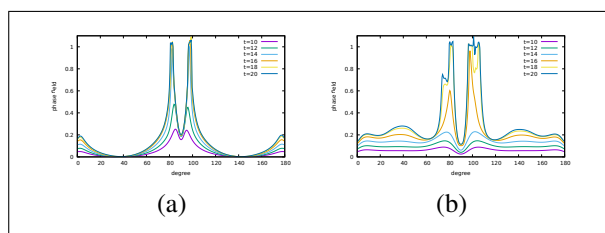


図-6 $r_2 = 0.6$ のアーチにおける (a) $r = 0.9$ と (b) $r = 0.7$ の面における、各時刻でのフェーズフィールドの値の分布

5. まとめ

本研究では、2次元アーチ形状を上方からの接触境界により変形させた場合のき裂の発生と進展について、非貫入条件を反映したフェーズフィールドき裂進展モデルで調べた。アーチの内径が大きい場合 (例えば $r_2 = 0.9$) においては上部境界の接触により大きく変形した後に内側からき裂が進展しているが、アーチの内径があまり大きくない場合 (例えば $r_2 = 0.6$) においては上部境界の接触部分の近傍のみが変形した後に外側から 2 箇所

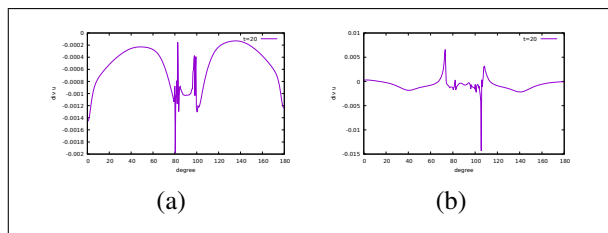


図-7 $r_2 = 0.6$ のアーチにおける (a) $r = 0.9$ と (b) $r = 0.7$ の面における, $t = 20$ での $\text{div} u$ の値の分布

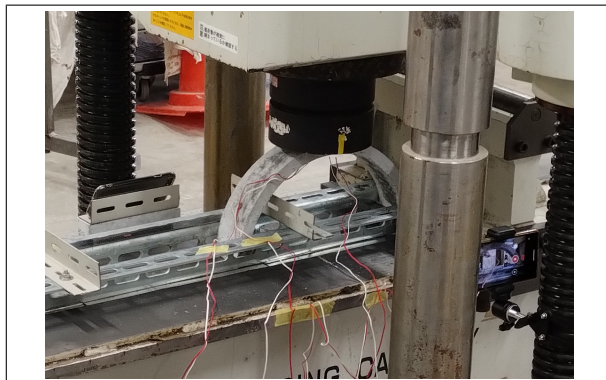


図-8 補強コンクリートで打設したアーチの破壊実験の様子

き裂が進展していることがわかった。フェーズフィールドを用いたき裂進展モデルで調べることで、材料を破壊することなく、破壊が進みつつある様子やその際の圧縮/引張の強さが確認できるため、実際の建造物の破壊の様相の検討に非常に有用であることがわかる。

謝辞: 本研究の一部は JSPS 科研費 JP21K0335 の助成を受けたものです。繊維補強コンクリートの載荷実験については元東海大学工学部建築学科の増淵翔太, 若月

太志の両名に感謝いたします。

参考文献

- [1] 高石武史, 木村正人: 境界接触条件と非貫入条件を反映したフェーズフィールドき裂進展シミュレーション, 計算工学講演会論文集, Vol.28, F-07-01, 2023.
- [2] Kimura, M., Takaishi, T., Alfat, S. et al.: Irreversible phase field models for crack growth in industrial applications: thermal stress, viscoelasticity, hydrogen embrittlement, *SN Appl. Sci.*, Vol.3, 781, 2021.
- [3] Takaishi, T. and Kimura, M.: Phase field model for mode III crack growth, *Kybernetika*, Vol.45, pp.605-614, 2009.
- [4] Chambolle, A., Conti, S. and Francfort, G.A.: Approximation of a brittle fracture energy with a constraint of non-interpenetration, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, Vol.228, pp.867-889, 2018.
- [5] Hecht, F.: New development in freefem++, *J. Numer. Math.*, Vol.20, pp.251-265, 2012.