

# 反応拡散方程式を用いたレベルセット法による トポロジー最適化における不等式制約を含む 複数の制約条件の考慮について

On the Consideration of Multiple Constraints Including Inequality Constraints  
in the Level Set-Based Topology Optimization Using Reaction-Diffusion Equation

月野誠<sup>1)</sup>, 近藤継男<sup>2)</sup>

Makoto Tsukino and Tsuguo Kondoh

1) 博(工) 株式会社くいと (〒183-0055 東京都府中市府中町1-14-1 朝日生命府中ビル10F,  
E-mail: tsukino@quint.co.jp)

2) 工博 京都大学 工学研究科 研究員 (〒615-8530 京都府西京区京都大学桂, E-mail: kondoh.tsuguo.6s@kyoto-u.ac.jp)

The level set-based topology optimization using unsteady reaction-diffusion equation employing topological derivatives for sensitivity has already been implemented in commercial software. However, it is practically important to be able to consider multiple constraints including equality and inequality constraints. In this study, we applied a method based on the augmented Lagrangian method and a method using a time evolution equation such that the converged solution satisfies the KKT conditions for updating Lagrange multipliers for multiple constraint conditions. We verified the validity of these methods by obtaining reasonable results through numerical experiments.

**Key Words :** Topology optimization, Level set method, Reaction-diffusion equation, Multi-constraints

## 1. はじめに

近年、トポロジー最適化は飛躍的に実用化が進み、多くの市販ソフトウェアにも搭載され、ごく一般の設計者でも手軽に利用できる環境が整ってきた。従来は均質化法やSIMP法などに基づく手法が主流であったが、近年ではレベルセット法による形状表現に基づく手法も広く用いられるようになってきた[1]。また最適解を非定常反応拡散方程式の収束解として時間発展的に求める手法の研究も進み、実用化されてきている。

トポロジー最適化において、等式・不等式制約を含む複数の制約条件を考慮できることは、実用上重要な要件である。制約付き最適化問題に対しては、ラグランジュ乗数法に基づく手法を用いるのが一般的であるが、最適解におけるラグランジュ乗数は未知であるため、時間発展的に最適解を求める手法においては、ラグランジュ乗数もKKT条件を満足するような解に収束するように漸次更新していく必要がある。その際、過剰な反復回数を要することなく、最適化過程が安定的に進むような更新手法の選択が極めて重要である。

本研究では、感度にトポロジー導関数を用いる非定常反応拡散方程式を利用したレベルセット法によるトポロジー最適化[2]において、ラグランジュ乗数の更新方法として、拡張ラグランジュ法に基づく手法と、収束解がKKT条件を満足するような時間発展方程式を解く手法[3]を適用する。またこれらの手法を、平均コンプライアンス制約および重心位置制約からなる複数の不等式制約条件を有

する問題に適用し、妥当性を検証する。

なお本研究における数値実験は、著者の1人が開発しているSOLIDWORKSアドイン形式の汎用構造最適化ソフトウェアHiramekiWorks[4]のソルバーに実装して実施した。市販ソフトウェアとして実用化するには、与えられたさまざまな問題に対して、ユーザーが各種パラメータを都度マニュアルで調整することなく利用できることが極めて重要である。本研究ではこの観点も踏まえた上で検証を行った。

## 2. レベルセット法によるトポロジー最適化

### (1) レベルセット関数による形状表現と最適化問題

固定設計領域 $D$ 内の物体領域 $\Omega$ を、次式で定義するレベルセット関数 $\phi$ を用いて陰的に表現する(図-1)。

$$\begin{cases} 0 < \phi(x) \leq 1, & \forall x \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega \\ 0 > \phi(x) \geq -1, & \forall x \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (1)$$

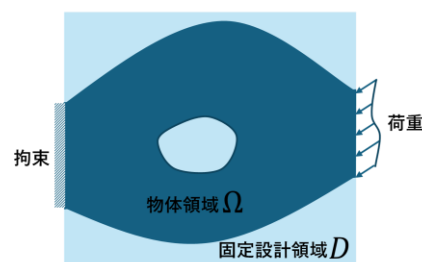


図-1 固定設計領域と物体領域

線形弾性体の変形を対象とする構造最適化問題は、 $\phi$ を用いて次式のように定式化される。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } F[\mathbf{u}[\phi(\mathbf{x})]; \phi(\mathbf{x})] \\ & \text{s.t. } G_i[\mathbf{u}[\phi(\mathbf{x})]; \phi(\mathbf{x})] \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2)$$

ここで $F$ は目的関数、 $G_i$ は制約関数、 $m$ は制約の個数、 $\mathbf{u}$ は線形弾性体の平衡方程式を満足する変位を表す。

以下のラグランジュ関数 $\bar{F}$ を定義する。

$$\bar{F}[\phi(\mathbf{x}); \lambda] = F + \int_{\Omega} \mathbf{u}' \text{div} \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \sum_m \lambda_i G_i \quad (3)$$

ただし $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル、 $\mathbf{u}'$ は随伴変位であり、右辺第2項は平衡方程式の重み付き残差積分を表す。また $\lambda_i$ は制約 $G_i$ に対するラグランジュ乗数である。 $\mathbf{u}$ が平衡方程式の解であり、かつ次式で表されるKKT条件を満足するという条件の下で $\bar{F}$ を最小化する $\phi$ と $\lambda_i$ を定めれば、得られた $\phi$ は式(2)で表される最適化問題の解となる。

$$\lambda_i G_i = 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad G_i \leq 0 \quad (4)$$

## (2) 最適化アルゴリズム

Yamadaら[2]は、レベルセット法によるトポロジー最適化として、レベルセット関数の更新にトポロジー導関数と非定常反応拡散方程式を用いる手法を提案している。本研究ではこの手法に基づき、次式の非定常反応拡散方程式で表される時間発展問題として $\phi$ を更新する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = C_0 d_t \bar{F} + \tau_0 \nabla^2 \phi \quad (5)$$

ここで $d_t f$ は $f$ のトポロジー導関数[5]を表す。右辺第2項の拡散項は最適化問題を正則化する作用を持ち、拡散係数 $\tau_0(>0)$ によりその強度を調整することができる。また $C_0(>0)$ は1ステップ当たりの $\phi$ の更新量を調整するための係数である。

式(5)を後退オイラー法により次式のように離散化する。

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = C \widehat{d_t \bar{F}} + \tau L^2 \nabla^2 \phi^{n+1} \quad (6)$$

ただし $\widehat{d_t \bar{F}}$ は $d_t \bar{F}$ を最適化の各ステップにおいて次式により正規化したものである。

$$\widehat{d_t \bar{F}} = \widehat{d_t F} + \sum_m \lambda_i \widehat{d_t G_i}, \quad \widehat{d_t f} = \frac{d_t f}{\int_{\Omega} |d_t f| d\Omega / \int_{\Omega} d\Omega} \quad (7)$$

このように感度を正規化することでラグランジュ乗数が無次元化され、さまざまな評価関数に統一的に適用可能となる。また拡散係数も $\tau = \tau_0 / L^2$ により代表長さ $L$ で正規化する。 $C(>0)$ は $\phi$ の更新量を調整する係数である。

有限要素法を用いて式(6)を解くことにより、 $\phi^n$ から $\phi^{n+1}$ を得る。その際 $|\phi^{n+1}| \leq 1$ を満足するようにレベルセット関数値を切り捨てる。

## 3. ラグランジュ乗数の更新方法

### (1) 拡張ラグランジュ法に基づく手法

式(6)を時間発展的に解くにあたり、ラグランジュ乗数 $\lambda$ も最終的に式(4)のKKT条件を満足するように適切に更新する必要がある。さまざまな更新方法が考えられるが、代表的なものとして拡張ラグランジュ法に基づく手法が挙げられる。本手法では最適化の1ステップごとに、次式によりラグランジュ乗数を更新する。

$$\lambda^{n+1} = \max(0, \lambda^n + \alpha \tilde{G}) \quad (8)$$

ここで $\tilde{G}$ は $G$ を初期値で正規化するなどして扱いやすくしたものであり、 $G$ と同符号かつ $G$ に対して単調増加するものとする。また $\alpha(>0)$ は $\lambda$ の更新量を調整する係数である。

### (2) KKT条件を満足する時間発展方程式を解く手法

近藤ら[3]はラグランジュ乗数の更新方法として、収束解がKKT条件を満足するような時間発展方程式を解く手法を提案している。まず以下の発展方程式を考える。

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \beta \lambda(t) \tilde{G}, \quad \lambda(0) > 0 \quad (9)$$

ここで $\beta(>0)$ は $\lambda$ の更新量を調整する係数である。式(9)が収束すれば、その解 $\lambda$ は式(4)のKKT条件を満足することが期待できる[3]。本研究では、式(9)を拡張した以下の発展方程式を用いてラグランジュ乗数を更新する。

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \beta_1 \lambda(t) \sinh \frac{\tilde{G}}{\beta_2} + \beta_3 \lambda(t) \frac{d\tilde{G}}{dt}, \quad \lambda(0) > 0 \quad (10)$$

$\beta_1 \sim \beta_3(>0)$ は各項の作用を調整する係数である。式(10)では、 $\tilde{G}$ に対する $\lambda$ の変化をより速やかにするために式(9)の $\tilde{G}$ を双曲線正弦関数に置き換えている。また右辺第2項を加えることにより、 $\tilde{G}$ や $\lambda$ の過大な変動を抑制している。なお最適解に近づいたとき、不活性な制約に関する $\lambda$ は非常に小さくなる。そこで本研究では式(10)の右辺第2項のように $\lambda$ を乗ずることにより、最適化終盤で不活性な制約に関する $\tilde{G}$ の変動が収束性に悪影響を及ぼさないようにした。

## 4. 数値解析例

### (1) 複数の活性な制約を含む問題

本手法の有効性を確認するために、複数の活性な平均コンプライアンス制約がある問題に適用した例を示す。なお、平均コンプライアンスおよび体積に関するトポロジー導関数は[5]に示されるとおりであり、平均コンプライアンスに関する $\tilde{G}$ として次式を用いた。

$$\tilde{G} = \frac{S_{const} - S}{S_{init}} \quad (11)$$

ここで $S$ は平均コンプライアンスの逆数(すなわち剛性)、 $S_{const}$ 、 $S_{init}$ はそれぞれその制約値および初期値である。平均コンプライアンスは最適化中に非常に大きな値になり得るため、このように逆数を用いることで $\tilde{G}$ を $-1 \sim 1$ の範囲に限定し、 $\lambda$ の過剰な変化を抑制できる。加えて、最

表-1 解析パラメータ

$\lambda$ 初期値	0.1	$\beta_1$	0.75
$\alpha$	0.3	$\beta_2$	0.5
		$\beta_3$	0.5

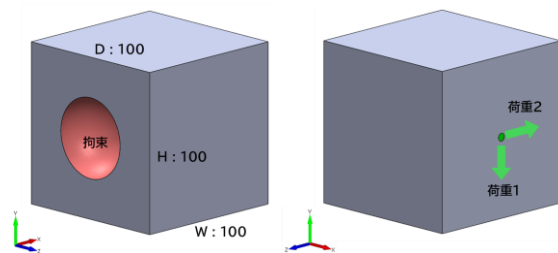


図-2 解析モデル

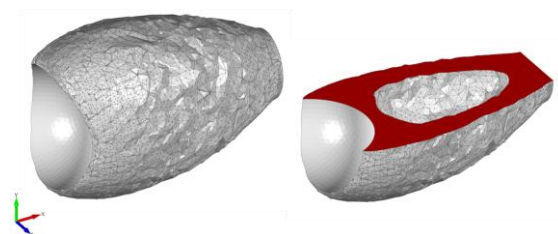


図-3 最適化結果(更新手法 B)

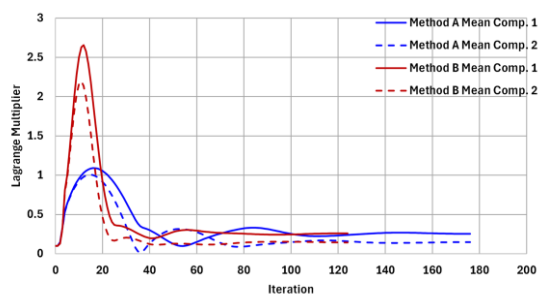


図-4 ラグランジュ乗数の履歴

適化の初期段階で急激な形状変化を抑制する目的で、最適化ステップ40回目までは、式(11)の $S_{const}$ の代わりに次式の $S'_{const}$ を用い、段階的に最終的な制約値に近づけるようにした[5].

$$S'_{const} = S_{init} - \frac{(S_{init} - S_{const})n}{40} \quad (12)$$

ラグランジュ乗数の更新は、前章に示した拡張ラグランジュ法に基づく手法（以下、更新手法A）とKKT条件を満足する時間発展方程式を解く手法（以下、更新手法B）の2つを用いた。使用したパラメータを表-1に示す。また目的関数の収束判定条件は変化率が0.0001未満、制約関数の収束判定条件は $|\bar{g}| \leq 0.001$ 、または $\bar{g} \leq 0$ かつ $\lambda^n \leq \lambda^{n-1}$ とし、目的関数および制約関数が所定回数連続して収束判定条件を満足した場合に収束とした。

解析モデルおよび荷重・拘束条件を図-2に示す。図中の2つの荷重パターンそれぞれに対して、平均コンプライアンス200%以下および250%以下の制約条件の下で体積最小化を行った。また $\tau$ ,  $L$ ,  $C$ はそれぞれ0.0005, 0.07, 1.1とした。

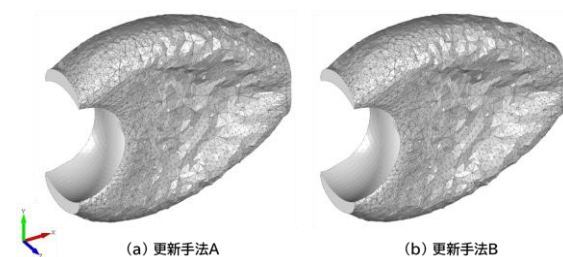


図-5 最適化結果

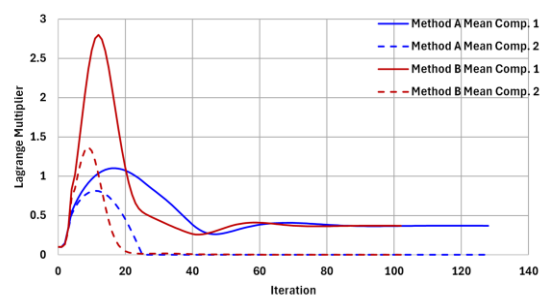


図-6 ラグランジュ乗数の履歴

更新手法Bにより得られた最適化結果（ゼロ等位面）を図-3に示す。更新手法Aによる結果もほぼ同様である。各更新手法による最適化結果の体積はそれぞれ初期の15.8%, 15.7%となった。いずれの結果においても、2つの荷重パターンに対する平均コンプライアンス制約が活性となり、妥当な最適化結果が得られた。収束までに要した反復回数は、更新手法Aは177回、更新手法Bは125回であった。また図-4にラグランジュ乗数の履歴を示す。20ステップ以降の最適化後半では、更新手法Bの方がラグランジュ乗数の変動が安定的な傾向が見られ、より少ない反復回数で収束している。

## (2) 不活性な制約を含む問題

前節の問題の荷重2に対する平均コンプライアンス制約のみを2,000%以下に変更して解析を行った。このケースでは荷重2に対する制約は不活性となる。

2つの更新手法により得られた最適化結果を図-5に示す。最適化結果の体積はともに初期の12.1%となった。荷重1に対する平均コンプライアンス制約はともに活性となったのに対し、荷重2に対する平均コンプライアンスはそれぞれ1,134%, 1,123%と不活性となり、いずれも妥当な結果が得られている。収束までに要した反復回数は、更新手法Aは129回、更新手法Bは103回であった。ラグランジュ乗数の履歴を図-6に示す。

## (3) より多くの制約を含む問題

より実用的な問題への適用を想定し、多数の制約を含む問題を取り上げる。ここでは平均コンプライアンス制約に加えて、異なる物理量に関する制約として、重心位置制約も考慮する。

原点を通り単位法線ベクトル $\mathbf{V}$ を持つ平面が与えられたとき、平面から $\mathbf{V}$ の向きに距離 $D$ 以内に重心位置が収まるような制約を考えると、制約関数およびそのトポロジ一導関数は次のように与えられる。

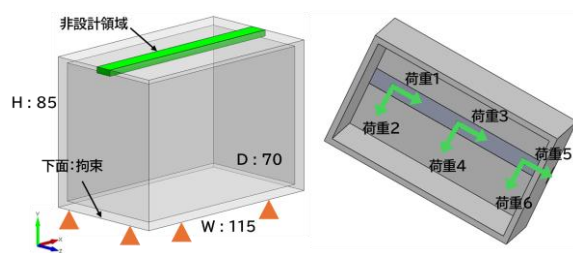


図-7 解析モデル

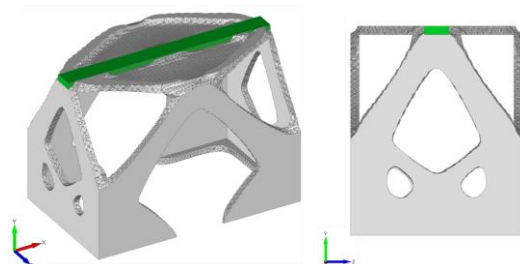


図-8 最適化結果

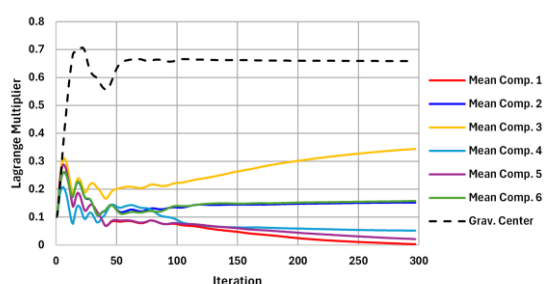


図-9 ラグランジュ乗数の履歴 (更新手法 A)

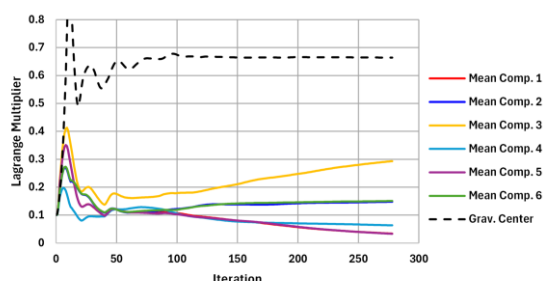


図-10 ラグランジュ乗数の履歴 (更新手法 B)

$$G = \frac{\int_{\Omega} \rho x d\Omega}{\int_{\Omega} \rho d\Omega} \cdot V - D \quad (13)$$

$$d_t G = \frac{\rho}{\int_{\Omega} \rho d\Omega} \left( \frac{\int_{\Omega} \rho x d\Omega}{\int_{\Omega} \rho d\Omega} - x \right) \cdot V \quad (14)$$

なお代表長さを用いて  $\tilde{G} = G/L$  と正規化する。また重心位置制約についても、式(12)と同様の手法で段階的に制約値を調整した。収束判定条件は平均コンプライアンス制約に対するものと同様である。

解析モデルおよび荷重・拘束条件を図-7に示す。モデルは中空になっており、緑色の領域は非設計領域である。図

に示す6パターンの荷重それぞれに対する平均コンプライアンスを250%以下、重心位置を下端から距離40以下に制約し、体積最小化を行った。ラグランジュ乗数の更新に関するパラメータは前節と同じであり、 $\tau$ ,  $L$ ,  $C$ はそれぞれ0.001, 0.04, 1.8とした。

更新手法Bによる最適化結果を図-8に示す。更新手法Aによる最適化結果もほぼ同様となった。各更新手法の最適化結果の体積はそれぞれ初期の39.4%, 39.5%となった。収束までに要した反復回数は、更新手法Aは298回、更新手法Bは279回であった。各更新手法のラグランジュ乗数の履歴を図-9, 図-10に示す。いずれにおいても荷重1, 4および5に対する平均コンプライアンス制約は不活性となり、それに対応してラグランジュ乗数も十分小さな値になっている。その他の制約は重心位置制約も含めて活性となった。いずれの更新手法においても妥当な最適化結果が得られており、異なる物理量を含む多制約問題に対しても適用可能であることが示された。

## 5. おわりに

感度にトポロジー導関数を用いる非定常反応拡散方程式を利用したレベルセット法によるトポロジー最適化において、ラグランジュ乗数の更新方法として、拡張ラグランジュ法に基づく手法と、収束解がKKT条件を満足するような時間発展方程式を解く手法を適用し、妥当性を検証した。いずれの更新手法でも、多数の不等式制約を含む問題において妥当な最適化結果が得られることに加え、問題によっては後者の方がより安定的で、かつ少ない反復回数で収束することを確認した。

また問題ごとにパラメータを調整する必要がなく、固定のパラメータセットを汎用的に利用できることを確認した。これは最適化手法を市販ソフトウェアに搭載する上で極めて重要な要件であり、引き続き実用化に向けて検討を進めたい。

## 参考文献

- [1] 西脇眞二, 泉井一浩, 菊池昇: トポロジー最適化, 丸善出版, 2013.
- [2] Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S., Takezawa, A.: A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.199, pp.2876-2891, 2010.
- [3] 近藤継男, 矢地謙太郎, 西脇眞二: トポロジー最適化の基礎, コロナ社, 2024.
- [4] <https://www.quint.co.jp/jp/pro/hws/index.htm>
- [5] Otomori, M., Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S.: Matlab code for a level set-based topology optimization method using a reaction diffusion equation, *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol.51, pp.1159-1172, 2015.