

# 応力制御のボイド生成項をもつ GTN モデルの陰的解法

Implicit solution for GTN model with stress-controlled void nucleation term

油川英史<sup>1)</sup> 全世原<sup>2)</sup> 中村均<sup>3)</sup> 呂学龍<sup>4)</sup> 松井和己<sup>5)</sup> 山田貴博<sup>6)</sup>

Hidefumi Yukawa, Sewon Jeon, Hitoshi Nakamura, Xuelong Lyu, Kazumi Matsui and Takahiro Yamada

<sup>1)</sup>修(学) 横浜国立大学 大学院環境情報学府 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7, E-mail: yukawa-hidefumi-kr@ynu.jp)

<sup>2)</sup>修(情) 横浜国立大学 大学院環境情報学府 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7, E-mail: jeon-sewon-yk@ynu.jp)

<sup>3)</sup>横浜国立大学 大学院環境情報学府 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7, E-mail: nakamura-hitoshi-xk@ynu.ac.jp)

<sup>4)</sup>博(工) 横浜国立大学 大学院環境情報学府 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7, E-mail: lu-xuelong-tc@ynu.ac.jp)

<sup>5)</sup>博(工) 横浜国立大学 大学院環境情報研究院 准教授 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7, E-mail: kzm@ynu.ac.jp)

<sup>6)</sup>博(学) 横浜国立大学 大学院環境情報研究院 教授 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7, E-mail: tyamada@ynu.ac.jp)

In most of recent studies about ductile failure, Gurson–Tvergaard–Needleman (GTN) model is used with a strain-controlled void nucleation term, which needs parameter fitting as a plastic softening theory. However, Nakamura et al. proposed a local failure criterion based on a combination of yield stress and mean stress, and incorporated it into the GTN model by modifying stress-controlled void nucleation term. In this study, we formulated and implemented the GTN model in the format of ABAQUS UMAT with a modified void nucleation term that considers the failure stress index into the implicit solution method. Verification of the code was performed by comparing the results of the GTN model with the results of ANSYS Workbench and checking the transition diagram of the behavior of stress and void fraction in the cell model.

**Key Words :** GTN model, Local failure, Ductile fracture

## 1. はじめに

圧力容器などの機器の終局的な破壊条件を求める加圧試験 [1] では、格納容器の破断に先行して局所的な破損が生じることが示されている。機器が局所的に顕著な塑性変形を受ける状態を想定した場合、応力三軸度を考慮した延性破壊限界、すなわち局所破損 [2] が注目すべき破損モードの一つとなる。延性材料の破壊における限界ひずみは、応力三軸度の増加に伴って低下することが知られており、このような限界特性を把握するために、切欠き付き試験片による引張試験が実施される。

延性破壊をモデル化する手法の一つである GTN モデル [7][8][9] は、もともとひずみ制御条件および応力制御条件の両方に基づくボイド核生成項を有しており、その増分形式での定式化は東郷 [3] により示された。近年の多くの研究 [4] では、GTN モデルのひずみ制御によるボイド核生成項が使用されているが、この場合、応力三軸度の影響を考慮することができず、塑性軟化理論としてのパラメータフィッティングが必要となる。

中村ら [5][6] は降伏応力と平均応力の組み合わせによる限界破損応力指標を提案し、これを局所応力クライテリアンとして GTN モデルの応力制御型のボイド核生成項に組み込んだ。そして、切欠き丸棒の引張り試験を 2D 軸対称モデルで解析し、材料破壊（ボイドの連結）直前における急激なボイド生成および成長を適切に表現することができ、切欠き丸棒試験片における破壊過程を再現している。

本研究の目的は 3D の延性破壊解析に破損応力指標を考慮した修正ボイド生成項を含む GTN モデルを用いる

ため、修正 GTN モデルを陰解法で定式化し、汎用プログラムである ABAQUS のユーザーサブルーチンである UMAT に実装・検証することである。

## 2. GTN モデルの定式化

この章では GTN モデルの構成則及び、定式化について説明する。

全ひずみ  $\varepsilon$  を弾性ひずみ  $\varepsilon^e$  と塑性ひずみ  $\varepsilon^p$  に加算分解する。

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (1)$$

等方性材料としたときの弾性構成則は次式のとおりである。

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{D}^e : \varepsilon^e \\ &= 2G\varepsilon_d^e + K\varepsilon_v I \end{aligned} \quad (2)$$

$G$  と  $K$  はそれぞれせん断弾性係数と体積弾性係数である。塑性変形が進行すると降伏条件  $\phi = 0$  が満たされる。ここで、GTN モデルにおける降伏関数  $\phi$  は以下で示される。

$$\phi = \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_y} \right)^2 + 2fq_1 \cosh \left( -\frac{3q_2p}{2\sigma_y} \right) - (1 + f^2) \quad (3)$$

ここで、 $\sigma_e$  は相当応力、 $\sigma_y$  は等価塑性ひずみ  $\alpha$  の関数として定義される降伏応力、 $f$  はボイド率、 $p$  は静水圧応力、 $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_3$  は GTN モデルの材料定数である。

降伏関数を流れポテンシャルとする関連流れ則を用

いたときの塑性流れ則を以下に示す。

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \left( \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \\ &= \left( -\frac{1}{3} \frac{\partial \phi}{\partial p} \mathbf{I} + \frac{3S}{2\sigma_e} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_e} \right)\end{aligned}\quad (4)$$

多孔質体の塑性仕事と母材の塑性仕事は等しいので以下の式が成立する。

$$(1-f)\sigma_y \dot{\alpha} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5)$$

上記の式について  $\dot{\gamma}$  について解き、関連流れ則の式に代入すると以下の式が得られる。

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{(1-f)\sigma_y \dot{\alpha}}{p \frac{\partial \phi}{\partial p} + \sigma_e \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_e}} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (6)$$

よってひずみの加算分解の式に代入することで以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \\ &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{(1-f)\sigma_y \dot{\alpha}}{p \frac{\partial \phi}{\partial p} + \sigma_e \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_e}} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\end{aligned}\quad (7)$$

ボイド体積率の変化は通常、既存のボイドの成長による寄与と新しいボイドの核生成による寄与の和として表される。

$$\dot{f} = \dot{f}_{\text{grow}} + \dot{f}_{\text{nuc}} \quad (8)$$

GTN モデルはひずみ制御条件と応力制御条件の両方のボイド核生成項を含んでいるが、本研究では応力制御条件を採用する。既報 [5] では、式 (9) に示す相当応力  $\sigma_e$  と平均応力  $p$  の線形和である破損応力指標 (failure stress index)  $S$  を用いて、切欠き断面中心の破壊条件を近似的に記述できることを報告した。

$$S = \sigma_e + c\sigma_m, \text{ where } \sigma_m = -p \quad (9)$$

これを ABAQUS の定義に従って表すと以下のようになる。

$$S' = \sigma_y - cp \quad (10)$$

$S$  の限界値である  $S_L$  は、局所応力クライテリオン (材料の破損条件) が、第 1 応力不変量 ( $\sigma_m$ ) のと第 2 応力不変量 ( $\sigma_e$ ) の組み合わせで表現できるとみなしたものである。本研究では延性破壊の局所応力クライテリオンとして  $S_L$  を GTN モデルの応力制御のボイド生成項に組みこむ。

$$\dot{f}_{\text{nuc}} = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_y - cp - \sigma_N}{s_N} \right)^2 \right] (\dot{\sigma}_y - c\dot{p}) \quad (11)$$

また、ボイド成長項は、

$$\begin{aligned}\dot{f}_{\text{grow}} &= (1-f)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p = (1-f)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \mathbf{I} \\ &= (1-f) \frac{(1-f)\sigma_y \dot{\alpha}}{p \frac{\partial \phi}{\partial p} + \sigma_e \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_e}} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{I} \\ &= (1-f) \frac{(1-f)\sigma_y \dot{\alpha}}{p \frac{\partial \phi}{\partial p} + \sigma_e \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_e}} \frac{\partial \phi}{\partial p}\end{aligned}\quad (12)$$

である。新しいボイドが発生するときの応力の範囲は平均値  $\sigma_N$ 、標準偏差  $s_N$  を持つ正規分布とボイド発生粒子の体積  $f_N$  に従う。

ボイド率  $f$  が限界値  $f_c$  に到達すると、材料の荷重伝達能力がボイド結合によって急速に減少する。ボイド率が  $f_F$  に達すると荷重伝達能力は完全に失われる。修正されたボイド率は以下のように表される。

$$f = \begin{cases} f, & \text{if } f \leq f_c \\ f_c + \left( \frac{1}{q_1} - f_c \right) \frac{f-f_c}{f_F-f_c}, & \text{if } f > f_c \end{cases} \quad (13)$$

ある時間間隔  $[t_n, t_{n+1}]$  において、後退 Euler 法を用いて離散化する。全ての速度形の状態量を今考えている時間内の対応する増分形式に置き換え、次のステップ  $n+1$  までの増加量を求めるので  $(\cdot)_{n+1} - (\cdot)_n = \Delta(\cdot)_{n+1}$  のように置き換える。したがって、下記のような満たすべき方程式が得られる。

$$\begin{aligned}g_{\varepsilon^e} &= \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \\ &= \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \frac{(1+f_{n+1})\sigma_{yn+1}\Delta\alpha_{n+1}}{p_{n+1} \frac{\partial \phi}{\partial p} \Big|_{n+1} + \sigma_{en+1} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_e} \Big|_{n+1}} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{n+1} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = 0\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}g_f &= \Delta f_{n+1} + (1-f_{n+1}) \\ &\times \frac{(1+f_{n+1})\sigma_{yn+1}\Delta\alpha_{n+1}}{p_{n+1} \frac{\partial \phi}{\partial p} \Big|_{n+1} + \sigma_{en+1} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_e} \Big|_{n+1}} \frac{\partial \phi}{\partial p} \Big|_{n+1} \\ &- \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_y - cp - \sigma_N}{s_N} \right)^2 \right] (\Delta\sigma_y - c\Delta p) = 0\end{aligned}\quad (15)$$

$$g_\phi = \left( \frac{\sigma_{en+1}}{\sigma_{yn+1}} \right)^2 + 2f_{n+1}q_1 \cosh \left( -\frac{3q_2 p_{n+1}}{2\sigma_{yn+1}} \right) - q_3 f_{n+1}^2 - 1 = 0 \quad (16)$$

これらの方程式における変数は  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e, \Delta \alpha_{n+1}, \Delta f_{n+1}$  であり、非線形方程式の解を求めるために Newton-Raphon 法を用いる。

### 3. コードの検証

応力制御のボイド生成項は、ひずみ制御のボイド生成のみを持つ GTN モデルの UMAT[10] に組み込んだ。応力制御によるボイド生成を考慮した GTN モデルの陰解法による定式化を行い、ABAQUS のユーザーサブルーチンである UMAT に実装した。まず、六面体 1 要

素を用いた静水圧下での一軸引張解析を行い、プログラムコードの検証を実施した。引張方向に 400[MPa] の静水圧を付加し、材料が破壊に至るまで強制変位を加えた。用いた材料は SGV410[5] であり、材料パラメータを Table.1 に示す。

Table. 1 Material properties of SGV410 for GTN model,  $c=1.0$

$E$ [MPa]	$\nu$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
202000	0.3	1.5	1.0	2.25
$f_0$	$f_c$	$f_N$	$\sigma_N$	$s_N$
0	0.15	0.04	1040	31.2
$\sigma_{y0}$	$c$	$f_F$		
182.6	1.0	0.2		

本研究で実装した UMAT を用いて、補正係数を  $c = 1$  と設定し、同様な条件の下で ANSYS Workbench で行った解析結果の応力-ひずみ線図を Fig. 1 に示す。Fig. 1 より、GTN モデルの応力-ひずみ線図は、ANSYS の応力-ひずみ線図と概ね一致していることが確認できた。また、補正係数  $c$  を変更することによる材料挙動の変化を確認するため、既報 [5] の切り欠き丸棒の試験値から得られた  $c = 0.35$  に変更したときの応力-ひずみ線図およびボイド率の遷移図を Fig. 2 に示す。本解析では、局所応力クライテリオン  $S'$  が正規分布に基づく区間  $3s_N$  以内、つまり  $S - 3s_N = 946.4$ [MPa] に達した時点でボイド生成が開始されるように設定した。Fig. 2 の黒い横線は 946.4[MPa] を示しており、黒い縦線はボイドが生成され始める点を示している。これらが交差する点が  $S' = \sigma_y - cp$  上 946.4[MPa] であることが確認できた。さらに、Fig. 2 より、ボイド率  $f$  が急激に増加する直前応力がピーク値に達し、ボイド率が  $f_c = 0.15$  に達した時点から応力が急激に低下することが確認できた。また、静水圧の大きさを 500[MPa] および 550[MPa], 600[MPa], 650[MPa], 700[MPa], 750[MPa] に設定した場合についても同様の解析を行い、応力三軸度  $T = \sigma_e / -p$  および破損応力指標  $S'_L$  の結果を Fig. 3 に示す。Fig. 3 から、局所応力クライテリオンが応力三軸度に依存せず一定であることが分かり、 $S'_L$  が限界破損応力指標として表現されていることが示されている。以上により、本プログラムコードの実装ができていたことが数値解析の結果より示された。

4. 結言

本研究では修正 GTN モデルの陰解法による定式化を行い、ABAQUS のユーザーサブルーチンである UMAT に実装した。その結果、汎用コードである ANSYS と応力-ひずみ関係が概ね一致していることが確認できた。また、応力とボイドの挙動よりモデルが設計したとおりに動作していることが確認できた。最後に、 $S'_L$  が応力三軸度に依存せず一定であることが示すことで、 $S'_L$  が限界破損応力指標として表現できた。

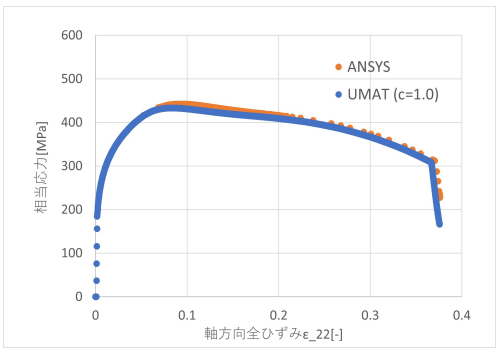


Fig. 1 Comparison of equivalent stress- total axial strain curves between UMAT and ANSYS

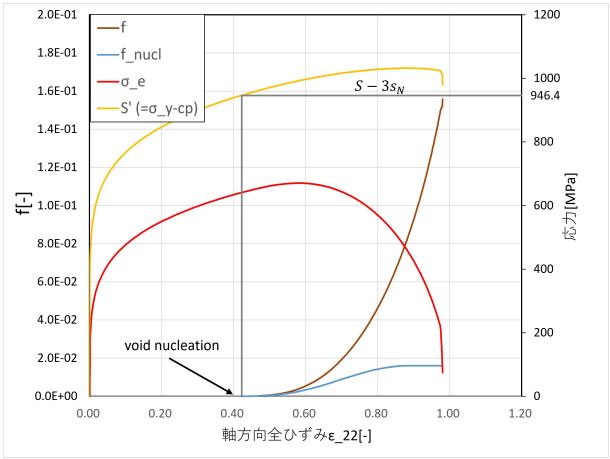


Fig. 2 Transition diagram of the behavior of stress and void fraction in the cell model when  $c = 0.35$

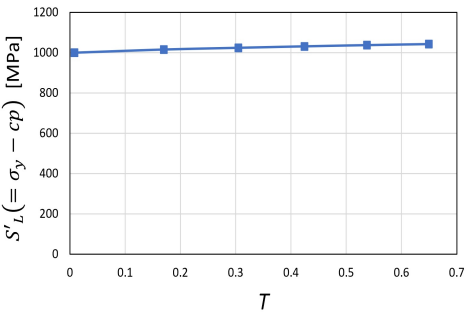


Fig. 3 Relationship between stress triaxiality  $T$  - limit failure stress index  $S'_L$

参考文献

[1] 財団法人原子力発電技術機構, 重要構造物安全評価 (原子炉格納容器信頼性実証事業) に関する総括報告書 平成 15 年 3 月, 2003.

[2] ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section VIII, Division 2 Alternative Rules, Article 5.3 Protection Against Local Failure, *The American Society of Me-*

*chanical Engineers*, 2007.

- [3] 東郷敬一郎, 材料強度解析学材料強度解析学：基礎から複合材料の強度解析まで, 内田老鶴圃, 2004.
- [4] H. Gholipour, F. R. Biglari, and K. Nikbin, Experimental and numerical investigation of ductile fracture using GTN damage model on in-site tensile tests, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.164, 2019.
- [5] 中村均; 荒井健作; 菊池正明. 原子炉格納容器鋼材の局部破損の限界条件（母材・溶接部材の切欠き付丸棒引張試験）. 日本機械学会論文集, Vol.89, No.925, 2023.
- [6] H. Nakamura, K. Arai and M. Kikuchi, Experimental evaluation of local failure criterion and its implementation in a damage mechanics model, *International Journal of pressure vessels and piping*, Vol. 194, Part A, 2021a.
- [7] A. L. Gurson, Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part 1-Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol.99, pp.2-15, 1977.
- [8] A. Needleman, Void nucleation effects in biaxially stretched sheets, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol.102, pp.249-256, 1980.
- [9] V. Tvergaard, On localization in ductile material containing spherical void, *International Journal of Fracture*, Vol.18, pp.237-252, 1982.
- [10] BanuMusa, Anisotropic GTN Damage Model VU-MAT, User documentation, 2020.
- [11] J. C. Simo and R. L. Taylor, Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol.48, pp.101-118, 1985.
- [12] E. A. de Souza Neto, D. Peric, and D. R. J. Owen, 寺田健二郎 監訳：非線形有限要素法 弾塑性解析の理論と実践, 森北出版, 2012.