

J積分やJ積分範囲 ΔJ を用いた大変形弾塑性き裂進展解析のための基礎的検討

Fundamental study on finite strain elastoplastic crack propagation analysis using J-integral and J-integral range ΔJ

荒井 翔一郎¹⁾, 岡田 裕²⁾

Koichiro Arai and Hiroshi Okada

1) 博(工) HEXAGON (〒101-0054 東京都千代田区神田錦町2-2-1, mail: koichiro.arai@hexagon.com)

2) 博(工) 東京理科大学 創域理工学部 機械航空宇宙工学科 教授 (〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641, E-mail: hiroshi.okada@rs.tus.ac.jp)

In 3D crack propagation analysis for elastoplastic material, to reproduce arbitrary shaped crack propagation behaviors such as a thumbnail-like crack in ordinary nonlinear finite element analyses, it is necessary to use the so-called rezoning technique, which update the mesh while mapping physical quantities such as stress and strain. However, rezoning technique breaks the relationship between the deformed and undeformed configuration. J-integral for finite strain is defined on undeformed configuration, so it is difficult to apply to crack propagation analysis using general rezoning technique. In this paper, we will discuss how to evaluate J-integral and J-integral range ΔJ for finite strain elastoplastic finite element analysis with rezoning technique and show some examples of analysis.

Key Words : J-integral, Elastoplastic Crack Propagation, Nonlinear Finite Element Analysis

1. はじめに

き裂を有する構造物の健全性評価法として、破壊力学に基づく評価法は広く用いられている。例えば、高サイクル疲労き裂進展問題では線形破壊力学に基づく評価法が用いられており、負荷サイクルにおける応力拡大係数範囲 ΔK の値から、Paris則に基づくき裂進展量の予測や余寿命評価が行われる。近年では上記に基づくき裂進展解析を汎用有限要素法解析ソフトウェアで実施することも可能であり、複雑な構造物を対象とした評価も一般化されつつある。しかしながら、これらの手法は線形破壊力学に基づくものであるため、低サイクル疲労問題などの塑性変形を伴うき裂進展問題には適用できない。このような問題に適用するための非線形破壊力学に基づく評価法が検討されている。

非線形破壊力学パラメータとしてJ積分[1]が広く用いられている。J積分は導出の過程で比例負荷問題であることを仮定していることから、繰り返し塑性問題や有限変形弾塑性問題に適用することはできない。このような問題に適用した場合、いわゆる経路独立性が失われ、評価に用いるのは困難であることが知られている。また、低サイクル疲労問題ではJ積分の実験評価法を繰り返し荷重問題に応用したJ積分範囲 ΔJ [2]が提案されており、疲労き裂進展速度 da/dN と ΔJ の関係を求めることで低サイクル疲労問題におけるき裂進展特性が特徴付けられる。しかしながら、数値解法でJ積分範囲 ΔJ の評価を行う際に用い

る経路・領域積分表示にはJ積分同様、経路独立性に関する課題がある。

著者らはJ積分およびJ積分範囲 ΔJ の再定義を行い、有限変形弾塑性問題に対しても経路独立性を有する三次元J積分[3]およびJ積分範囲 ΔJ [4]の定式化を提案し、定常き裂進展問題[5]や極低サイクル疲労き裂進展問題[6,7]への適用を試みてきた。これまでの検討では、き裂進展の表現方法として、リガメント部に与えた変位拘束を解放することでき裂進展を表現する、いわゆる節点解放法を用いてきた。この方法は、応力・ひずみ場を厳密に保持した状態でき裂進展挙動を表現できる一方で、き裂進展量や形状、進展方向が初期のメッシュパターンによって制限される。実際のき裂進展挙動は、いわゆるサムネイル型のきれつ形状となる場合があるが、節点解放法でこのようなき裂進展挙動を予測することは困難であり、いわゆるリゾーニング手法を用いたメッシュの更新が必要となる。しかしながら、既存の弾塑性問題におけるき裂進展解析は節点解放法によるものが多く、リゾーニングを前提としたき裂進展解析を実施するためには様々な課題がある。

本論文では、J積分やJ積分範囲 ΔJ に基づく有限変形弾塑性き裂進展解析を実現するため、いわゆるリゾーニングを前提とした計算手法について基礎的な検討を行い、検討した手法を用いた数値解析結果を示す。

2. 再定義されたJ積分およびJ積分範囲 ΔJ の概要

本章では、著者らが提案する再定義されたJ積分[3]およびJ積分範囲 ΔJ [4]の概要を示す。

J積分の導出初期段階で三次元問題であることを考慮し、き裂の進展に伴って図1に示すき裂前縁近傍の有限な領域 V_ε^0 に散逸するエネルギーを評価する式としてJ積分の再定義を行い、領域積分法を導入することで以下の式が得られる。

$$J = -\frac{1}{\Delta A} \int_{V^0} \left(W^0 \delta_{1i} - \Pi_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial X_1} \right) \frac{\partial q(\mathbf{X})}{\partial X_i} dV^0 \quad (1)$$

$$-\frac{1}{\Delta A} \int_{V^0 - V_\varepsilon^0} \left(\frac{\partial W^0}{\partial X_1} - \Pi_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial X_i \partial X_1} \right) q(\mathbf{X}) dV^0$$

ここで、 W^0 は初期配置に基づくひずみエネルギー密度、 u_j は変位、 Π_{ij} は公称応力、 ΔA は初期配置に基づく仮想き裂進展面積であり、 $q(\mathbf{X})$ は積分領域の中心部に位置するき裂前縁上で $q(\mathbf{X}) > 0$ 、積分領域表面上で $q(\mathbf{X}) = 0$ であり、領域 V_ε^0 内部の X_1 - X_2 面内で $q(\mathbf{X})$ は一定であり、 X_3 方向にのみ変化する連続かつ微分可能なスカラー一値関数である。

従来のJ積分は式(1)の右辺第二積分を全ひずみ理論を仮定して消去したものと等価である。式(1)の右辺第二積分を考慮することで、有限変形弾塑性問題や繰り返し塑性問題に対しても積分領域に依存しない、いわゆる経路独立性が保証される。

また、再定義されたJ積分[3]の被積分関数を図2に示す負荷サイクル中の参照点-評価点間における物理量に置き換えることで、以下に示すJ積分範囲 ΔJ の三次元領域積分表示[4]を導くことができる。

$$\Delta J = -\frac{1}{\Delta A} \int_{V^0} \left(\Delta W^0 \delta_{1j} - \Delta \Pi_{ij} \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_1} \right) \frac{\partial q(\mathbf{X})}{\partial X_i} dV^0 \quad (2)$$

$$-\frac{1}{\Delta A} \int_{V^0 - V_\varepsilon^0} \left(\frac{\partial \Delta W^0}{\partial X_1} - \Delta \Pi_{ij} \frac{\partial^2 \Delta u_j}{\partial X_i \partial X_1} \right) q(\mathbf{X}) dV^0$$

ここで Δu_j 、 $\Delta \Pi_{ij}$ はそれぞれ参照点-評価点間の変位、公称応力の差であり、 ΔW^0 は以下の式で定義される。

$$\Delta W^0 = \int_{(\varepsilon_{mn})_k}^{(\varepsilon_{mn})_l} (\tau_{ij} - (\tau_{mn})_k) d\varepsilon_{ij} \quad (3)$$

式(2)は極低サイクル疲労問題のような大変形を伴う弾塑性繰り返し荷重問題においても経路独立性が保証される。これまでの研究では、実際に式(2)を用いた da/dN - ΔJ 関係の同定や、得られた関係式からき裂進展量を予測する計算を行っている[6, 7]。

これらの式は変形前の初期配置に基づいて定義されており、エネルギーの散逸を評価する領域 V_ε^0 も初期配置に基づいて定義する必要がある。これまでの研究では有限要素法解析結果から、初期配置に基づく各物理量を算出し、初期メッシュに基づいた積分計算を行ってきた。

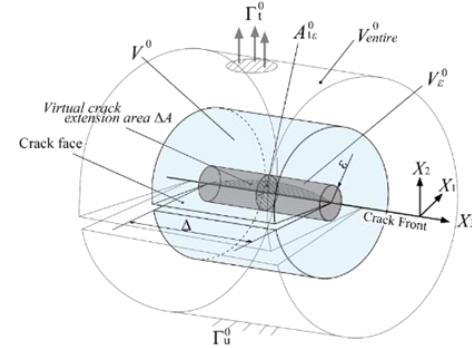


図1 積分領域 V^0 とエネルギーの散逸を評価するき裂前縁近傍の有限な領域 V_ε^0

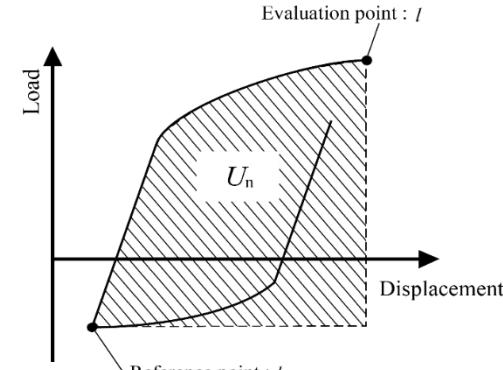


図2 J積分範囲 ΔJ の計算で使用する参照点と評価点

3. リゾーニングを前提とした大変形弾塑性き裂進展解析手法の検討

前章で示した通り、有限変形問題におけるJ積分やJ積分範囲 ΔJ の定式化は初期配置に基づいて行われる。一方で、一般的なリゾーニングは変形後形状に基づいてメッシュの更新を行い、物理量のマッピングを行う。このような処理を実施する場合、初期配置(初期メッシュ)とリゾーニング後の解析結果の間の関係が絶たれるため、式(1)のような初期配置に基づくJ積分定式化を適用することが困難となる。

そこで、以下の二つの方法を検討した。

1. J積分定式化の基準配置を変更する方法
2. 初期配置に基づいたリゾーニングを行う方法

1.の方法は、式(1)を任意の配置にプッシュフォワードし、一般的なリゾーニング後の配置でJ積分計算を行う方法である。この方法は既存のリゾーニング手法をそのまま活用できるが、J積分は依然として初期配置に基づくエネルギーを評価する式であることに注意が必要である。特に著者らの提案する再定義されたJ積分は、エネルギーの散

逸を評価する領域 V_ε^0 を設定する必要がある。例えば、この領域を変形後形状に基づいて設定することを考える場合、変形に伴って領域は変化していくため、同一の領域を対象とした評価が困難となる。また、詳細は省略するが、式(1)の右辺第二積分をプッシュフォワードすることを考えると、極めて計算が困難な項が得られる。このような背景からも、このようなアプローチは現実的ではない。

2.の方法は1.とは対照的に、J積分の定式化には手を加えず、リゾーニングの運用方法に手を加えることでリゾーニング後でも初期配置に基づくJ積分計算を可能とする方法である。

そもそも一般的なリゾーニングは、大変形によって要素形状が悪化し、有限要素法解析の進行が困難となる場合の対処法として使用される。そのため、変形後形状に基づいたメッシュの再生成を行うことで要素形状を整える必要がある。一方で極低サイクル疲労のような大変形を伴う弾塑性き裂進展問題では、多くの場合大変形が生じる箇所はき裂前縁近傍に集中する。そのため、初期配置でメッシュの再生成を行った上で、初期メッシュにおける変位量を新しいメッシュにマッピングして変形後形状とする方法でも変形挙動の記述は十分に可能である。また、任意のき裂進展挙動を記述するために必要となるのは、き裂前縁近傍の要素の更新に限定される。このことからも、変形後形状ではなく、初期配置に基づくメッシュの更新と物理量のマッピングで対応が可能と考えられる。

ここまで検討をふまえ、初期配置に基づくリゾーニングを用いたき裂進展解析のイメージを図3に示す。具体的には以下の手順で計算を行う。

- (i) 初期メッシュを用いた有限要素法解析を実施する。
- (ii) 得られた解析結果から式(1)や式(2)を用いて破壊力学パラメータの計算を行う。
- (iii) き裂進展量や進展方向を決定し、形状は初期形状を保持したまま、き裂を進展後形状に更新した新たなメッシュを作成する。
- (iv) 作成したメッシュに対して初期メッシュから変位や応力、塑性ひずみなどの物理量をマッピングする。
- (v) リゾーニング前と同条件の境界条件の下で釣り合い計算を行う。
- (vi) き裂進展(拘束の除去)や、後続の解析を行う。

これらの手順を繰り返すことで、有限変形弾塑性問題における任意のき裂進展挙動を表現することが可能と考えられる。

ただし、リゾーニングは物理量のマッピングに伴う数値誤差が発生するため、J積分値への影響が生じるのは明らかである。そこで、前述の手順を用いた簡単なテスト解析を行い、リゾーニングによる数値誤差がJ積分値に与える影響を確認する。

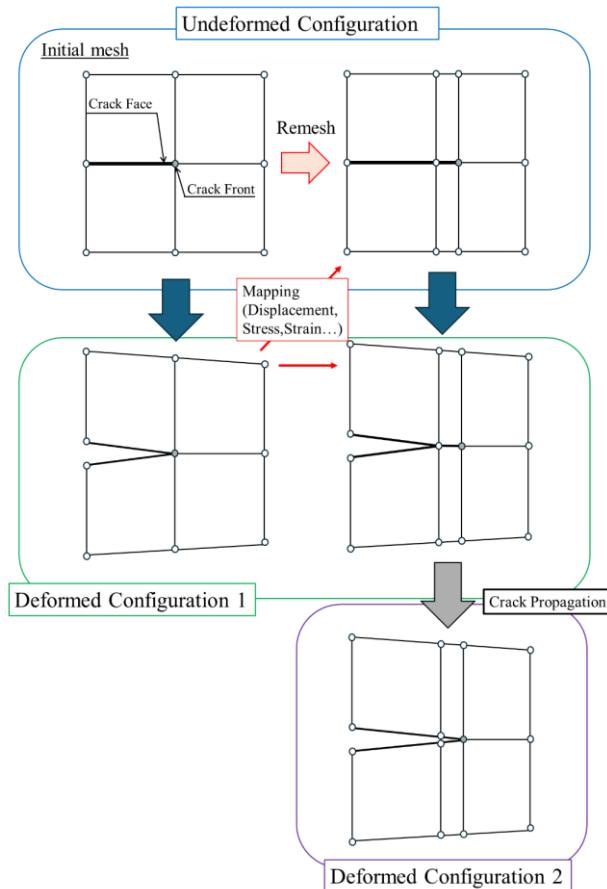


図3 初期配置に基づくリゾーニングを用いたき裂進展解析のイメージ

4. 数値解析例

(1) 解析条件

図4(a)に示す貫通き裂を有する構造を対象とした有限変形弾塑性解析を行った。解析にはMarc2024.2[8]を用いた。解析モデルは図4(b)に示す1/4モデル形状とし、対称境界条件とモデル上面に対して $Y=0.5\text{mm}$ の強制変位を与えた。材料はヤング率 $E = 200,000 \text{ MPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とし、図5に示す相当応力-相当塑性ひずみ線図を使用した。通常の有限要素法解析を行うベースモデルの初期メッシュ図を図6(a)に示す。

次に、強制変位量が $Y=0.5\text{mm}$ となった時点で図6(b)~(c)に示すき裂前縁近傍のリガメント部のメッシュを修正したモデルにリゾーニングを行い、強制変位を保持した状態で釣り合い計算を行った。物理量のマッピングはMarc2024.2のPreStateオプションを介して行った。なお、図6(b),(c)はベースモデルのリガメント側の要素をそれぞれ1/2,1/3に細分化したモデルであり、図6(d)はサムネイル型のき裂進展を想定し、図6(c)のモデルのリガメント部の節点位置をき裂中央部にかけて移動したモデルである。

それぞれの解析で得られた強制変位量が $Y=0.5\text{mm}$ の時点の有限要素法解析結果から式(1)の計算を行うインハウスコードを用いてJ積分値を算出した。式(1)でエネルギーの

散逸を評価する領域 V_e^0 は、図6(a)に示すベースモデルのき裂前縁近傍2層の要素を含有するように探索半径を0.883883mmとして設定した。

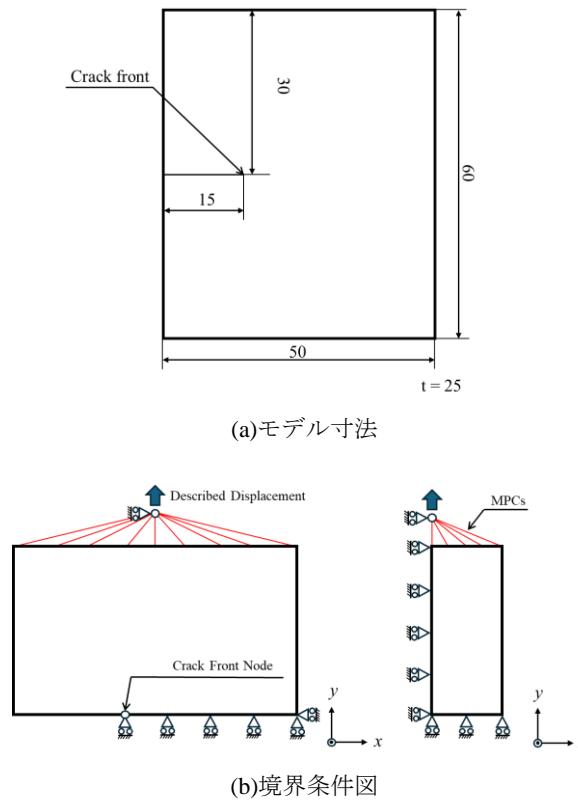


図4 解析対象の寸法、境界条件図

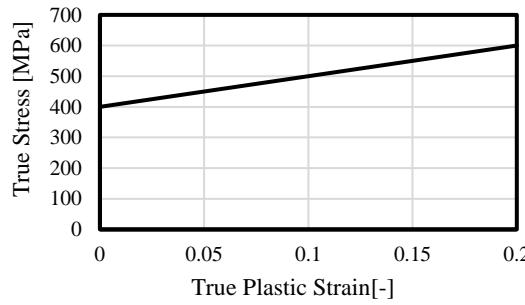


図5 相当応力-相当塑性ひずみ線図

(2) 解析結果

強制変位量がY=0.5mm時点の変形図および全相当塑性ひずみ分布図を図7に示す。図7(a)がリゾーニングを行わない通常の有限要素法解析結果であり、図7(b)～(d)は図6(b)～(d)に示す各モデルにリゾーニングを実施し、釣り合い計算を行った後の計算結果である。全相当塑性ひずみの最大値を確認すると、通常の有限要素法解析結果に対してリゾーニングを実施した結果は増加していることがわかる。これはリゾーニングに伴うマッピング誤差である。図7(c)と(d)の結果を確認すると、き裂前縁近傍のリガメント部の節点を移動した影響はあまり大きくなく、メッシュの分割数の違いの影響が大きいことが示唆される。

次に、図6(a)のベースモデルで通常の有限要素法解析を

行った結果から算出したJ積分値を用いて、リゾーニングを実施した解析結果から算出したJ積分値を正規化した結果を図8に示す。解析条件は固定していることから、誤差なくリゾーニングが行えていれば正規化されたJ積分値は1となる。図8より、リゾーニングを実施した解析では板厚中央部となる正規化された板厚0から表面部にかけて3~5%，表面部近傍で5~7%程度の誤差が生じていることがわかる。この結果を各メッシュの全相当塑性ひずみの最大値の変化量と照らし合わせると、マッピング誤差の大きかったリゾーニングメッシュ2,3の誤差が顕著であることがわかる。

5. おわりに

本論文では、J積分やJ積分範囲 ΔJ を用いた有限変形塑性き裂進展解析のための基礎的検討として、リゾーニングを前提としたき裂進展解析手法について検討を行った。検討した手法を用いることで、リゾーニング後もJ積分評価を行うことは可能であることは確認できたが、リゾーニングによってJ積分値に数%の影響が生じていた。今後はリゾーニングによる各物理量の誤差や、ひずみエネルギーの変化、リメッシュ後のメッシュパターンによる誤差の程度などの検証を行った上で、き裂進展問題への適用を検討する。

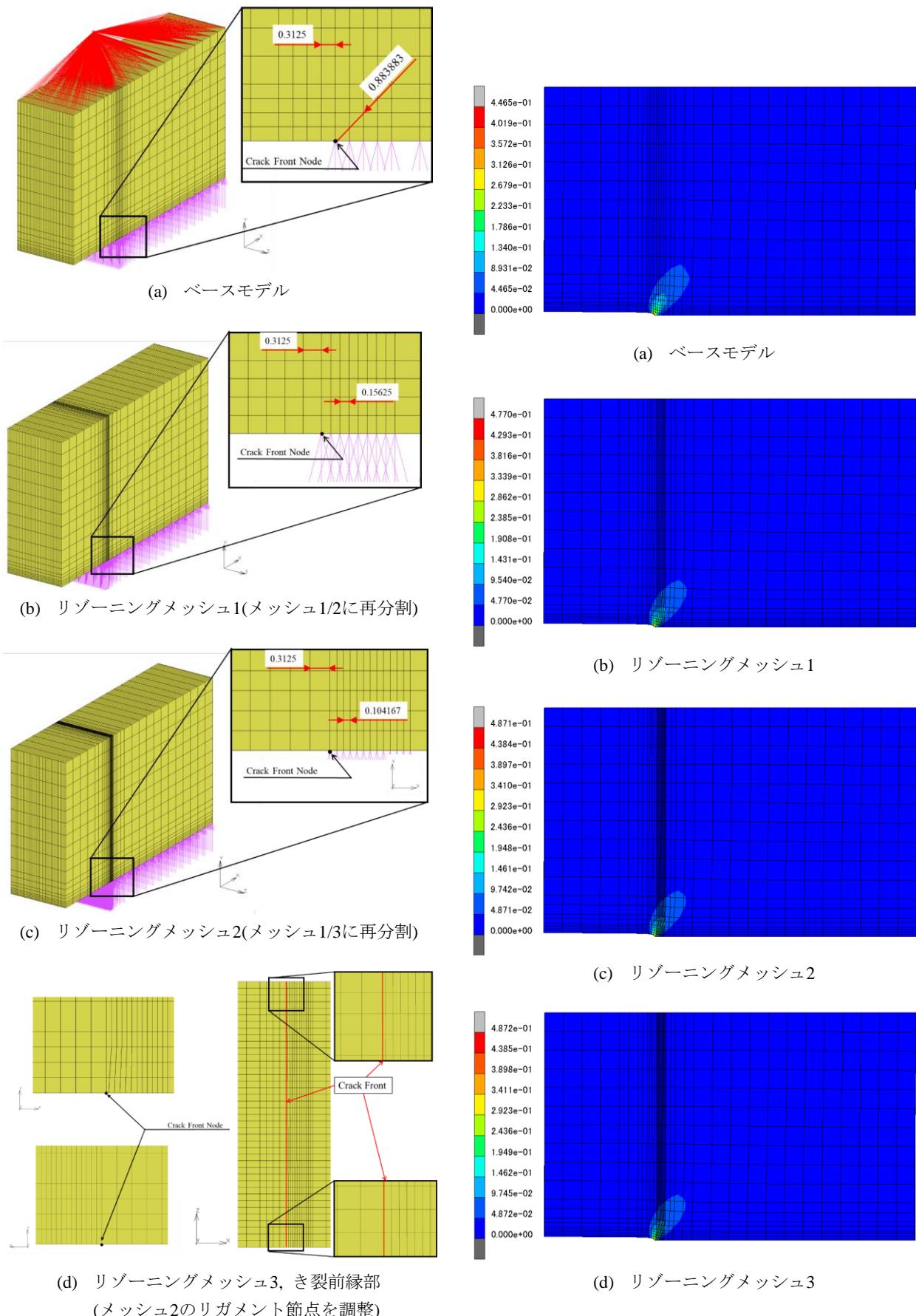


図6 解析モデル図

図7 強制変位0.5mm時の全相当塑性ひずみ分布図

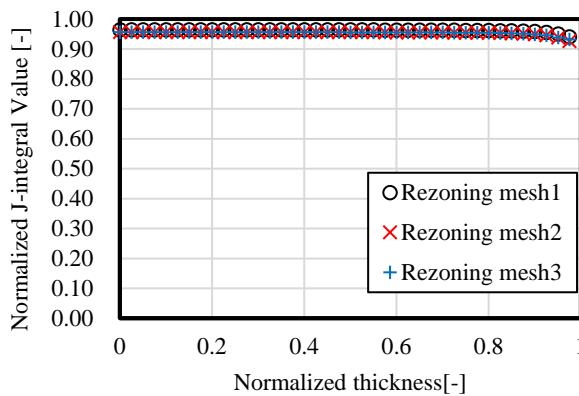


図8 ベースモデルでの計算結果で正規化したリゾーニング後のJ積分値分布

参考文献

- [1] Rice, J. R., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, Journal of Applied Mechanics, Vol.35, No.2 (1968), pp.379-386.
- [2] Dowling, N. E. and Begley, J. A., Fatigue crack growth during gross plasticity and J-integral, American Society for Testing and Materials, ASTM STP 590 (1976), pp.82-103.
- [3] 荒井皓一郎, 岡田裕, 遊佐泰紀, 任意の荷重経路と有限変形を許容する新しい三次元J積分法の提案, 日本機械学会論文集, 84巻863号-18-00115頁(2018)
- [4] 荒井皓一郎, 岡田裕, 遊佐泰紀, 有限変形弾塑性問題に適用可能なJ積分範囲 ΔJ の三次元領域積分表示の提案, 日本機械学会論文集, 84巻867号No.18-00309頁 (2018)
- [5] Hiroshi Okada, Takahiko Gouda, Koichiro Arai, Redefined three-dimensional J-integral as finite strain elastic-plastic crack parameter (Energy release rate and contribution of weakly singular terms), THEORETICAL AND APPLIED FRACTURE MECHANICS, Volume 130(2024), 104310,
- [6] Keigo Shoda, Koichiro Arai, Sora Nakamura, Hiroshi Okada, Application of redefined J-integral range ΔJ for ultra-low cycle fatigue problems with large magnitude of elastic-plastic deformation, THEORETICAL AND APPLIED FRACTURE MECHANICS, Volume 126(2023), 103938
- [7] 荒井皓一郎, 岡田裕, 佐々木由実, 坂部猛志郎, 遊佐泰紀, 有限変形弾塑性問題に適用可能なJ積分範囲 ΔJ の繰返し荷重下のき裂進展問題への適用, 第24回計算工学講演会論文集(2019)
- [8] Marc® 2024.2 Volume A: Theory and User Information