

# FPM(Fragile Points Method) による 二次元混合モードき裂解析に関する研究

Research on two-dimensional mixed-mode crack analysis  
with FPM(Fragile Points Method)

村越健吾<sup>1)</sup> 吉田海高<sup>2)</sup> 岡田裕<sup>3)</sup>

Kengo Murakoshi, Kaikou Yoshida and Hiroshi Okada

<sup>1)</sup>学士 (工) 東京理科大学大学院 創域理工学研究科 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, E-mail: 7521119@ed.tus.ac.jp)

<sup>2)</sup>修士 (工) 東京理科大学大学院 創域理工学研究科 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, E-mail: 7523568@ed.tus.ac.jp)

<sup>3)</sup>Ph.D. 東京理科大学 創域理工学部教授 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, E-mail: hiroshi.okada@rs.tus.ac.jp)

FPM(Fragile Points Method) is a meshless analysis method and discretizes problem domain using points. FPM can introduce cracks by cutting off the interaction between two points across the crack. So, it is very easy to simulate crack analysis in FPM. In this study, mixed-mode crack analysis was performed using the interaction integral method. In one of the numerical examples in this study, a plate with an edge slant crack subjected to remote tension was analyzed. From the results, when we had a large number of degrees of freedom, the stress intensity factors were evaluated accurately.

**Key Words** : Fragile Points Method, Mixed-mode crack

## 1. 緒言

今日、構造解析手法として有限要素法 (FEM) が広く用いられている。一方、FEM は解析精度が要素の形状とその粗密に大きく依存する。特に破壊力学のき裂解析では、き裂先端近傍で非常に細かく要素分割を行う必要があり、モデル作成に経験やコストが必要とされる [1]。Fragile Points Method(以下、FPM) は Local Galerkin Weak Form に基づいたメッシュレス解析手法として近年提案された [2]。FPM では、問題領域内に配置されたポイント群とそれらポイントごとの影響領域を示すサブドメインによって離散化が行われる。FPM での試行

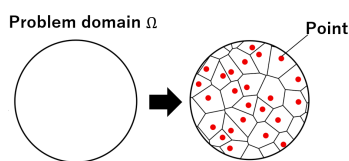


図-1 FPM でのモデル離散化図

関数、試験関数は区分的に連続な多項式によりそれらのポイントごとに定められる。また、他の大きな特長としてき裂をポイント間の接続関係を切断することで表現できることがある。非常に簡易な操作で破壊解析を行うことができるため、要素分割等の労力から大きく緩和される。

本研究では、破壊力学解析に高い親和性を持つ FPM に対し、相互積分法を適用し、混合モード応力拡大係数計算を行い計算精度の検証をしてきた。また、二次元き裂進展解析の検討も行ってきた。以下ではまず、Local Galerkin Weak Form に基づく FPM の定式化の概要を述べる。次に本研究で実装した相互積分法とき裂進展解

析の考え方と方法について説明する。最後に、相互積分法による混合モード応力拡大係数の計算精度検証と二次元き裂進展問題解析について述べる。

## 2. FPM(Fragile Points Method) の定式化

### (1) 形状関数の導出

問題領域  $\Omega$  で満足される線形弾性条件下の支配方程式は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \sigma_{ij,j}(\mathbf{u}) + f_i &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u}) &= D_{ijkl}\epsilon_{kl}(\mathbf{u})\end{aligned}\quad (1)$$

境界条件は次式のとおりでである。

$$\begin{aligned}u_i &= \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_u \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j &= \bar{t}_i \quad \text{on } \Gamma_t\end{aligned}\quad (2)$$

ここで、 $\bar{u}_i$ ,  $\bar{t}_i$  はそれぞれ外部境界  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_t$  に課される変位と力である。FPM では図 2 に示す  $P_0$  での試行関数

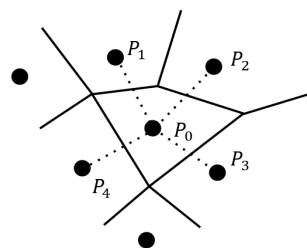


図-2  $P_0$  とその隣り合うポイントの関係図

はテーラー展開を用いて式 (3) のように定義される。なお、本研究では試行関数と試験関数は一次式で与える。

$$\mathbf{u}^h(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} u_1^h \\ u_2^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & \mathbf{h}(x_1, x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{h}(x_1, x_2)$  は  $P_0$  のサブドメイン上の任意の点からポイント 0 との残差ベクトルであり、次式で表される。

$$\mathbf{h}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^0 & x_2 - x_2^0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$\mathbf{a}_i$  はポイント 0 における変位勾配を表し、式 (5) として表される。

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} & \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

ここで各一点のみで決定される変位勾配  $\mathbf{a}_i$  は本研究では Generalized Finite Difference (GFD) 法を用いて求値を行った [3]。GFD 法では、最小二乗法に基づきある点での変位勾配を隣接点での変位の線形和として表現する。 $P_0$  の隣接点を  $P_1, P_2, \dots, P_m$  とし、 $m$  を隣接点の総数とする。式 (6) に示す残差ノルム  $J$  を設定する。

$$J = \|\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^m\|^2 \quad (6)$$

$$\mathbf{u}_i^0 = \begin{bmatrix} u_i^0 & u_i^0 & \dots & u_i^0 \end{bmatrix}_{1 \times m}^T$$

$$\mathbf{u}_i^m = \begin{bmatrix} u_i^1 & u_i^2 & \dots & u_i^m \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(x_1) & \dots & \mathbf{h}(x_m) \end{bmatrix}^T$$

$J$  を最小化する条件を考え、 $P_0$  での変位勾配は式 (8) で得られる。

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}\mathbf{u}_E, \quad (8)$$

$$\mathbf{u}_E = \begin{bmatrix} u_1^0 & u_2^0 & u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_1^m & u_2^m \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{I}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{m \times (m+1)} \quad (9)$$

FPM での形状関数  $N$  は試行関数  $\mathbf{u}^h$  に対して  $\mathbf{u}^h = \mathbf{N}\mathbf{u}_E$  で定義される。式 (3)、式 (8) から  $N$  は下式のように得られる。

$$N = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & \mathbf{h}(x_1, x_2) \end{bmatrix} \mathbf{C} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

## (2) 弱形式の導出

つり合い方程式の両辺に試験関数  $\mathbf{v}$  をかけ、サブドメイン  $E$  に対して部分積分を行い Local Weak Form を得る。さらに問題領域  $\Omega$  全体で総和を行うことで式 (11) を得る。

$$\sum_{E \in \Omega} \int_E \sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_{i,j} d\Omega - \sum_{E \in \Omega} \int_{\partial E} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j v_i d\Gamma = \sum_{E \in \Omega} \int_E f_i v_i d\Omega \quad (11)$$

ここで式 (11) の左辺第二項は式 (2) のトラクション境界条件を考慮し次式で書ける。

$$\sum_{E \in \Omega} \int_{\partial E} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j v_i d\Gamma = \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_u} \int_e \{\sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j\} [v_i] d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_t} \int_e \bar{t}_i v_i d\Gamma \quad (12)$$

ここでサブドメイン間での試行、試験関数の不連続性を抑制するために数値補正項を導入する。内部境界上で厳密解となる時に 0 となる境界積分項  $-\sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_u} \int_{\partial E} \sigma_{ij}(\mathbf{v}) n_j v_i d\Gamma$ ,  $\sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_u} \frac{\eta}{h_e} \int_e [u_i][v_i] d\Gamma$  を式 (11) の両辺に加える。

$$\begin{aligned} & \sum_{E \in \Omega} \int_E \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega - \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \{\sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j\} [v_i] d\Gamma \\ & - \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_u} \int_e \{\sigma_{ij}(\mathbf{v}) n_j\} [u_i] d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_u} \frac{\eta}{h_e} \int_e [u_i][v_i] d\Gamma \\ & = \sum_{E \in \Omega} \int_E f_i v_i d\Omega + \sum_{e \in \Gamma_t} \int_e \bar{t}_i v_i d\Gamma \\ & - \sum_{e \in \Gamma_u} \int_e \sigma_{ij}(\mathbf{v}) n_j \bar{u}_i d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_u} \frac{\eta}{h_e} \int_e \bar{u}_i v_i d\Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

$h_e$  はエッジパラメータと呼ばれ、本研究では境界の長さとした。 $\eta$  はペナルティパラメータである。式 (13) に式 (2) で表される変位境界条件を考慮し、次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \sum_{E \in \Omega} \int_{\partial E} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega - \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \{\sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j\} [v_i] d\Gamma \\ & - \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \{\sigma_{ij}(\mathbf{v}) n_j\} [u_i] d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_h} \frac{\eta}{h_e} \int_e [u_i][v_i] d\Gamma \\ & = \sum_{E \in \Omega} \int_E f_i v_i d\Omega + \sum_{e \in \Gamma_t} \int_e \bar{t}_i v_i d\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

式 (14) を適切に求積することで全体剛性マトリクス  $K$  を得ることができる。

## (3) FPM でのき裂のモデリング

FPM ではき裂を生成する際に対応するポイント間のコネクティビティを切断することでき裂の表現を行う。切断されたコネクティビティに応じ、対応するポイントの試行関数、試験関数の修正を行う。修正に伴って全体剛性マトリクスが変化するが、自由度は変わらないため、FPM ではこのような単純な操作でき裂の生成が可能である。

## 3. 線形破壊力学解析

### (1) 相互積分法

相互積分法は混合モードき裂の応力拡大係数  $K_I$ ,  $K_{II}$  計算手法である [3]。

$$\begin{aligned} M &= - \int_A \left( \delta_{li} W^{(1,2)} - \left[ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} \right] \right) \frac{\partial q}{\partial x_1} dA \\ &= \frac{2}{E} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}) \end{aligned} \quad (15)$$

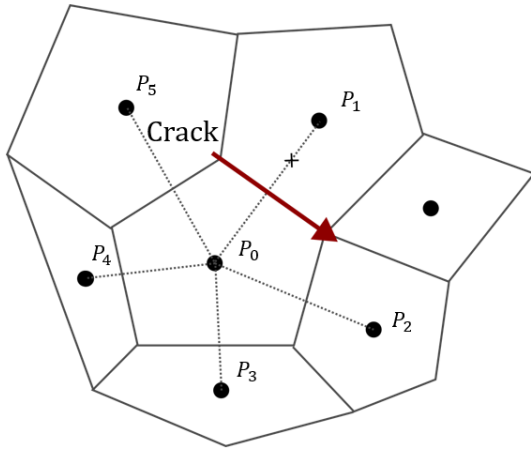


図-3 FPM でのき裂のモデリング図

上添え字に (1), (2) を持つ変数はそれぞれ実際の解の場合, 既知の応力, ひずみを与える補助場を意味する. (0) のパラメータはそれらの重ね合わせを表す.  $W^{(1,2)}$  は相互ひずみエネルギー密度を表し, 次式で与えられる.

$$W^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij}^{(1)} \epsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \epsilon_{ij}^{(1)} \right) \quad (16)$$

ここで  $q$  で表される重み関数について, 本研究では図 4 のようにき裂先端からの距離  $r_a$ ,  $r_b$  を用いて式に従いポイントごとに与えた.

$$\begin{aligned} q &= 1, & r < r_a \\ q &= \frac{r - r_b}{r_a - r_b}, & r_a \leq r \leq r_b \\ q &= 0, & r_b < r \end{aligned} \quad (17)$$

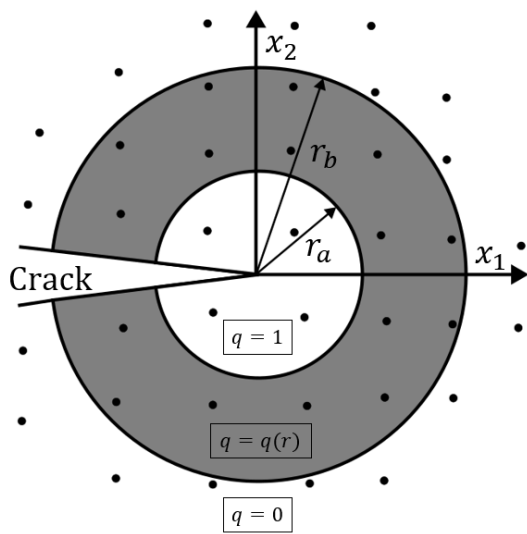


図-4 重み関数定義図

## (2) き裂進展解析

本研究は一回のき裂進展毎に一組のコネクティビティを切断し, き裂進展解析を行った. き裂進展方向  $\theta_c$  の決定には最大周方向応力説を用いた. これは, Erdogan と Sih によって提案され, き裂先端近傍での周方向応力  $\sigma_{\theta\theta}$  が最大となる方向にき裂が進展する仮説である [4].  $\theta_c$  は次式で与えられる.

$$\theta_c = 2 \tan^{-1} \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \quad (18)$$

等価応力拡大係数  $K_{eq}$  を計算し, き裂の進展の判定を行った [5].  $K_{eq}$  は下式の式を用いた [6].

$$K_{eq} = [K_I^4 + 8K_{II}^4]^{0.25} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} K_{eq} &< K_{IC} && \text{進展なし} \\ K_{IC} &\leq K_{eq} && \text{進展} \end{aligned} \quad (20)$$

モード I 破壊靱性  $K_{IC}$  は材料による固有の値である. また, き裂進展解析中は段階ごとのき裂の成長に伴いサブドメイン形状を更新する作業を行った. 概要を図 5 に示す.

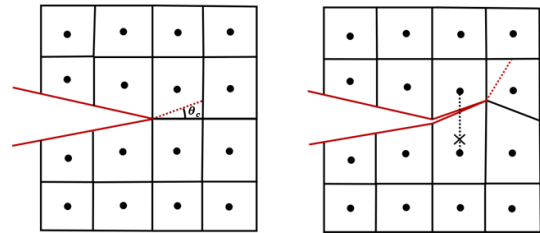


図-5 き裂成長に伴うサブドメイン形状の更新

## 4. 数値解析例

### (1) 混合モード応力拡大係数の精度検証

相互積分によって得られた応力拡大係数の精度検証を行った. まず図 6-a に示す片側き裂を有する平板の引張解析の結果を述べる. ヤング率  $E = 1.0 \text{ GPa}$ , ポアソン比  $\nu = 0.3$  とする. なお, 比較を行う参照値については以下の式を用いた [7].

$$\begin{aligned} K_I^{ref} &= F_I \times \sigma \sqrt{\pi a}, \\ K_{II}^{ref} &= F_{II} \times \sigma \sqrt{\pi a}. \end{aligned} \quad (21)$$

$F_I, F_{II}$  は無次元補正係数である. また, Marc Mentat の前処理によって分割された要素をサブドメインとして, 要素の重心にポイントを設定し FPM モデルを生成した. この解析では図 4 の重み関数を決定づけるき裂先端からの距離  $r_a, r_b$  については,  $r_a = 0.7, r_b = 1.9$  とした. 図 7 は FPM の数値補正項に関わる正のパラメータであるペナルティパラメータ  $\eta$  と応力拡大係数の誤差の関係を表したグラフである. 結果から,  $\eta = E$  であるとき解析精度がもっとも良いことが分かった. 以降の解析では  $\eta$  はヤング率と同じ値と設定した. 次に図 4 の重み関数

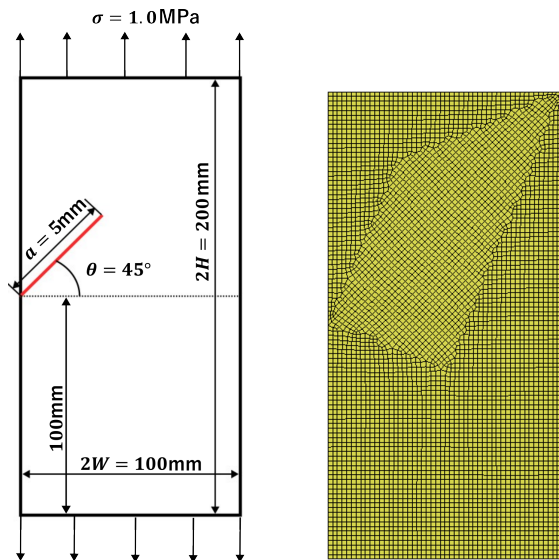


図-6-a 解析条件

図-6-b モデル例 (5134 点)

図-6 片側き裂を有する平板の解析

次に自由度による応力拡大係数の誤差の変化について調べた。結果のグラフを図9に示す。グラフから自由度の増加による誤差の減少が確認でき、特に自由度が11826以上であると解析精度は $K_I$ ,  $K_{II}$ 共に0.5%を下回っており、高い精度で応力拡大係数解析ができた。

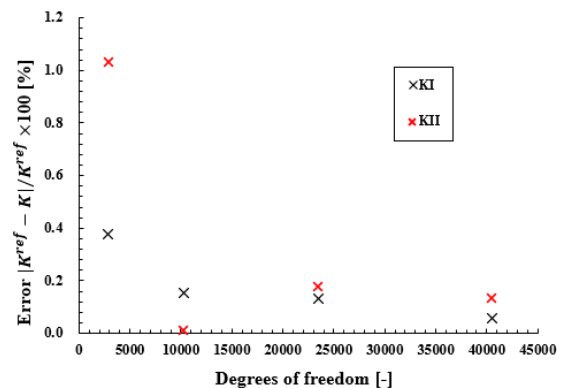
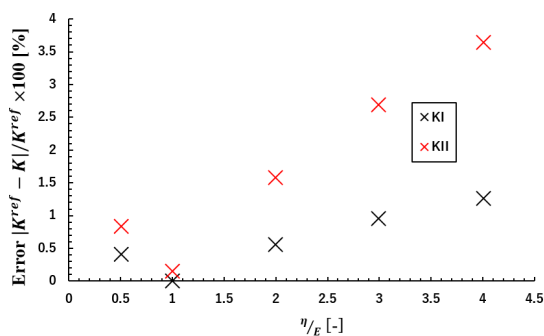


図-9 自由度と応力拡大係数の誤差の関係

図-7 ペナルティパラメータ  $\eta$  と応力拡大係数の誤差の関係

定義域による応力拡大係数の誤差率の変化について調べた。結果を図8に示す。なお $r_a = 1.7$ とした。結果から $r_b$ の変化による解析精度の大きな変化は見られない。これはJ積分が積分領域に依らないことを実証する結果である。

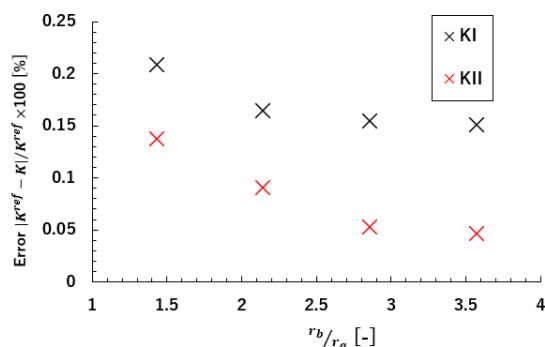


図-8 重み関数定義域と応力拡大係数の誤差の関係

## (2) き裂進展解析

本研究ではNajimiとAboutalebiによってなされた三点曲げ試験を模擬した解析を行った[8]。解析条件を図10に示す。モードI破壊靱性 $K_{IC} = 5.0 \text{ MPa} \sqrt{\text{m}}$ と

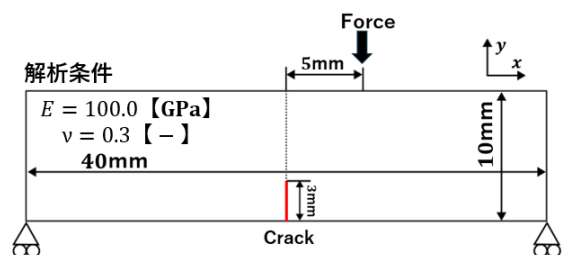


図-10 き裂進展解析条件

した。先行研究によって得られている実験結果を図11に示す。本研究で得られた最終ステップでのき裂進展

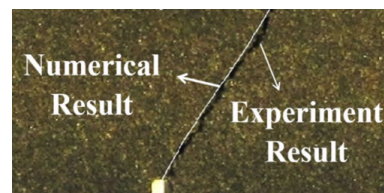


図-11 先行研究によって得られているき裂進展実験結果 [8]

の様相を図12に示す。先行研究では初期き裂から荷重点までまっすぐつながるようにき裂が進展されており、本研究で得られた結果である図12を見ると、荷重点までき裂が成長する傾向は見られるものの、定性的な一致があまり見られない結果となった。また、先行研究で

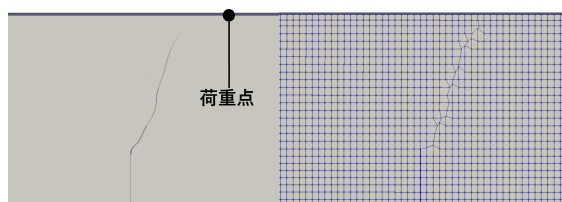


図-12 本研究によって得られたき裂進展解析結果

は初期き裂からの進展角度の結果が  $30^\circ$  と得られていたが、本研究での解析結果では  $70.1^\circ$  であり、大きな差がある。これらの差が生じた原因について、現在原因究明を行っている。

## 5. 結言

本研究では破壊力学解析に高い親和性を持つ FPM に対して相互積分を適用し、混合モード応力拡大係数の精度検証を行った。数値解析例ではペナルティパラメータ、重み関数定義域、自由度が応力拡大係数に与える影響について述べた。重み関数定義域に関しては応力拡大係数計算結果に大きく影響をしない。J 積分のいわゆる経路独立性によるものと考えられる。自由度の増加により解析精度が向上した。

また、本研究ではき裂進展解析法についても検討した。数値解析例では、三点曲げ試験解析を行ったが、先行研究と大きく異なる。差が生まれた原因は現在現在検討中である。

## 参考文献

- [1] Yujie, C., Dexin, S., Umberto, P. and Qun, L., Brittle crack propagation simulation based on the virtual element method and jk-integral fracture criterion, Engineering Fracture Mechanics, Vol.314, (2025), DOI:10.1016/j.engfracmech.2024.110684.
- [2] Yang, T., Leiting, D. and Atluri, S.N., A simple galerkin meshless method, the fragile points method(fpm) using point stiffness matrices, for 2d linear elastic problems in complex domains with crack and rupture propagation, International journal for numerical methods in engineering, Vol.122, (2020), pp.348–385.
- [3] Rice, J.R., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, Journal of Applied Mechanics, Vol.35, (1968), pp.379–386.
- [4] Erdogan f, sih g. on the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. j fluids eng. 1963; 85: 519–525.
- [5] Cungen, W. and Shuhong, W., Modified generalized maximum tangential stress criterion for simulation of crack propagation and its application in discontinuous deformation analysis, Engineering Fracture Mechanics, Vol.259, (2022), pp.108–159.
- [6] Tanaka, K., Fatigue crack propagation from a crack

inclined to the cyclic tensile axis, Engineering Fracture Mechanics, Vol.6, (1974), pp.493–507.

- [7] Bowie, O.L., Solutions of plane crack problems by mapping technique, Mechanics of Fracture, Vol.1,(1973), pp.1–55.
- [8] Najimi, M. and Aboutalebi, F.H., Mixed mode crack initiation and propagation in functionally graded materials: experimental and numerical investigations, Transactions of Mechanical Engineering (2023), pp.1829–1839.