

S-IGA（重合パッチ法）によるき裂進展解析システムの構築に関する研究

A Study on the Development of a Crack Propagation Analysis Using S-version Isogeometric Analysis(S-IGA).

徳留拓海¹⁾ 黒澤太加志²⁾ 土山雄飛³⁾ 岡田裕⁴⁾

Takumi Tokutome, Takashi Kurosawa, Yuhi Tsuchiyama, and Hiroshi Okada

¹⁾学(工) 東京理科大学大学院 創域理工学研究科 機械航空宇宙工学専攻

(〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, Email: 7524538@ed.tus.ac.jp)

²⁾修(工) 東京理科大学大学院 創域理工学研究科 機械航空宇宙工学専攻

(〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, Email: 7523525@ed.tus.ac.jp)

³⁾修(工) 東京理科大学大学院 創域理工学研究科 機械航空宇宙工学専攻

(〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, Email: 7524701@ed.tus.ac.jp)

⁴⁾Ph.D 東京理科大学 創域理工学部 機械航空宇宙工学科 教授

(〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, Email: hiroshi.okada@rs.tus.ac.jp)

S-version Isogeometric Analysis (S-IGA) is a method that offers higher accuracy than the Finite Element Method (FEM) due to the exact geometry representation of IGA, and also allows local refinement, which is difficult in standard IGA. Cracks are a major cause of structural failure, so evaluating them is important for structural integrity. Crack analysis requires methods that can capture stress singularities. In IGA, methods like XIGA have been studied for this purpose. Singular patch method can also represent stress singularities, but it has not been applied to crack propagation due to issues like remeshing. In this study, we develop a method that combines S-IGA with Singular patch method to build a high-accuracy crack propagation analysis system. We then examine its accuracy and applicability.

Key Words : *Isogeometric Analysis, S-version Isogeometric Analysis, Crack propagation*

1. 緒言

Hughes らによって提案されたアイソジオメトリック解析 (Isogeometric Analysis, IGA)[1] は FEM の形状関数に B スプライン (B-spline) または非一様有理 B スプライン (Non-Uniform Rational B-spline, NURBS) を用いる解析手法である。円弧や楕円といった複雑な形状も厳密に表現することが可能であり、FEM において精度悪化の原因となる形状誤差が生じない。また IGA の基底関数は次数を容易に上げることが可能であり、FEM の形状関数に比べて高い連続性を持つ。以上の特徴から、IGA は FEM に対して高い解析精度を持つ。一方で、IGA は解析モデルの局所細分化が容易ではない。IGA では解析モデルを自然座標系で定義される B スプラインもしくは NURBS 基底関数の乗算 (テンソル積と呼ばれる) によって表現している。そのため、局所的な細分化の影響が解析モデル全体に波及してしまい、計算コストが大幅に増加してしまうという問題がある。

重合パッチ法 (S-version Isogeometric Analysis, S-IGA)[2] は、FEM の手法である重合メッシュ法 [3] のアイデアを IGA に応用した解析手法である。重合パッチ法では構造物を全体構造を表現する比較的粗いグローバル IGA 解析モデルと、詳細な挙動を知るために細かく分割したき裂等を表現するローカル IGA 解析モデルを組み合わせて表現する。各パッチは独立して

おり、ローカル IGA 解析モデルに対して局所細分化を行っても、その影響はローカル IGA 解析モデルを構成するテンソル積のみに留まる。したがって、重合パッチ法は IGA に対して計算量を抑えることができる。またローカル IGA 解析モデルはグローバル IGA 解析モデル上の任意の位置に配置可能である。き裂を配置する場合には、そのき裂を有するローカル IGA 解析モデルのみ新規に作成すればよい。そのため、破壊力学解析との親和性が高い。

き裂は構造物破壊の主要因であり、様々な重大事故や故障を引き起こしてきた。き裂の進展を評価することは、構造物の構造健全性評価の観点で重要である。き裂解析では、き裂の持つ応力特異性を表現する必要がある。IGA 分野ではこれまでに XIGA[4] を用いたき裂解析が広く行われてきた。XIGA は基底関数に拡張関数と呼ばれるき裂の応力特異性と不連続性を表現する関数を加えて解析を行う手法である。き裂を暗示的に表現するため進展の際にリメッシングの必要が無いという利点がある。IGA 同様、局所細分化が容易ではないという課題がある。近年では局所細分化が可能な LR B スプラインや T スプラインを組み合わせた研究 [5,6] が進められている。

一方で、特異パッチ法 [7] は FEM の Barsoum の特異要素 [8] の考え方を利用した手法である。き裂を明示

的に表現し、き裂近傍の応力特異性を正確に表現できる。二次元問題に対して Okada ら [7] によって提案され、Omar ら [9] により IGA の三次元問題、砂岡ら [10] により S-IGA の三次元き裂問題へ適用された。しかし、リメッシング等の課題からき裂進展では適用例がまだない。

本研究では構造物に生じるき裂の進展挙動を高精度に予測可能な解析システムを構築するため、重合パッチ法と特異パッチ法を組み合わせた手法を開発し、その結果や精度について検討する。

2. 解析手法

(1) 重合パッチ法 (S-version Isogeometric Analysis, S-IGA)[1,2]

重合パッチ法はグローバル IGA 解析モデルとローカル IGA 解析モデルを重ね合わせて同時に解析を行う。ここでは線形弾性問題を仮定し、S-IGA を定式化する。

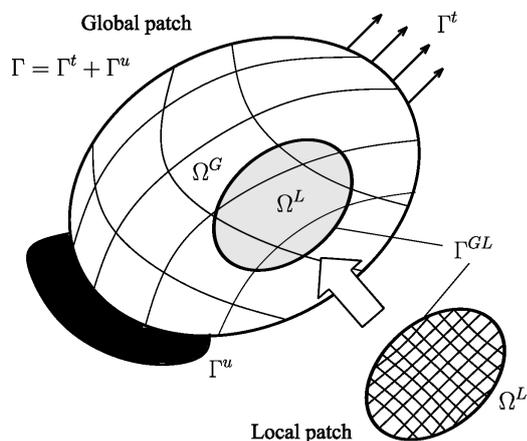


図-1 重合パッチ法の模式図。

グローバル領域 Ω^G とローカル領域 Ω^L において、各領域の変位 \mathbf{u} は次のように定義される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}^G(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega^G - \Omega^L \\ \mathbf{u}^G(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^L(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega^G \end{cases} \quad (1)$$

ここで、ローカル IGA 解析モデル境界 Γ^{GL} で変位の C^0 連続性を保証するため、次の条件を課す。

$$\mathbf{u}^L(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma^{GL} \quad (2)$$

ひずみは式 (1) を偏微分することで得られ、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^G & \text{in } \Omega^G - \Omega^L \\ \boldsymbol{\varepsilon}^G + \boldsymbol{\varepsilon}^L & \text{in } \Omega^G \end{cases} \quad (3)$$

領域 Ω^G, Ω^L においては、変位場およびひずみ場は基底関数とコントロールポイント変数ベクトルによって離

散化される。

$$\mathbf{u}^G = \mathbf{N}^G \mathbf{d}^G \quad (4)$$

$$\mathbf{u}^L = \mathbf{N}^L \mathbf{d}^L \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^G = \mathbf{B}^G \mathbf{d}^G \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^L = \mathbf{B}^L \mathbf{d}^L \quad (7)$$

ここで $\mathbf{N}^G, \mathbf{N}^L$ は NURBS 基底関数マトリクス、 $\mathbf{d}^G, \mathbf{d}^L$ はコントロールポイント変数ベクトル、 $\mathbf{B}^G, \mathbf{B}^L$ は変位・ひずみマトリクスである。

仮想仕事の原理は次の式により表される。

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (8)$$

これらの式を代入、整理すると、次の離散化方程式のようになる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^G & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{LG} & \mathbf{K}^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}^G \\ \mathbf{d}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^G \\ \mathbf{f}^L \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ここで、上式におけるそれぞれのマトリクスは、変位・ひずみマトリクス \mathbf{B} と弾性マトリクス \mathbf{D} により、以下のように定義される。

$$\mathbf{K}^G = \int_{\Omega^G} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}^G d\Omega \quad (10)$$

$$\mathbf{K}^L = \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{LT} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \quad (11)$$

$$\mathbf{K}^{GL} = \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{GT} \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \quad (12)$$

$$\mathbf{K}^{LG} = \int_{\Omega^L} \mathbf{B}^{LT} \mathbf{D} \mathbf{B}^G d\Omega \quad (13)$$

$$\mathbf{f}^G = \int_{\Omega^G} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^G} \mathbf{N}^{GT} \mathbf{t} d\Gamma \quad (14)$$

$$\mathbf{f}^L = \int_{\Omega^L} \mathbf{N}^{LT} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^L} \mathbf{N}^{LT} \mathbf{t} d\Gamma \quad (15)$$

$\mathbf{K}^G, \mathbf{K}^L$ はそれぞれ、グローバル IGA 解析モデルおよびローカル IGA 解析モデル上で定義される通常の剛性マトリクスである。 $\mathbf{K}^{GL}, \mathbf{K}^{LG}$ は両パッチの連成を表すマトリクスであり、このマトリクスを結合剛性マトリクスという。

(2) 特異パッチ法 [7]

Okada ら [7] によって提案された特異パッチ法は、IGA でき裂近傍の応力特異性を表現する手法である。

き裂先端近傍に自然座標系 (ξ, η) と極座標系 (r, θ) が定義される場合を考える。ここで関数 ϕ が自然座標 ξ と η の多項式関数で表現されると仮定すると

$$\Phi(\xi, \eta) = a_{00} + a_{10}\xi + a_{01}\eta + a_{20}\xi^2 + a_{02}\eta^2 + a_{11}\xi\eta + \dots \quad (16)$$

また関数 ϕ の空間微分は

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \quad (17)$$

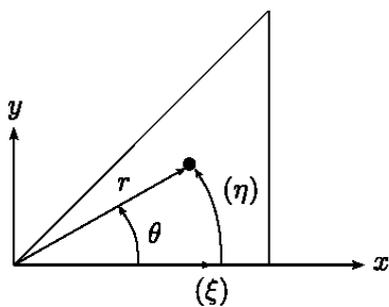


図-2 特異パッチの座標系.

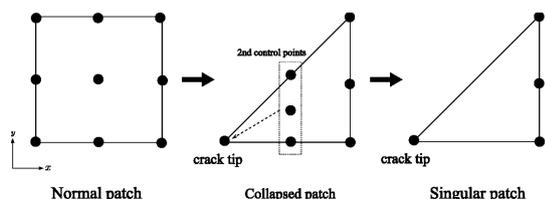


図-3 特異パッチ生成のプロセス.

き裂先端近傍で、き裂先端からの距離 r が ξ^2 に比例し、 θ が η に比例すると設定すると、 r, θ は以下のように表される。

$$r \propto C\xi^2 \quad (18)$$

$$\theta \propto D\eta \quad (19)$$

さらにそれぞれを r, η で微分すると

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} \propto \frac{1}{2\sqrt{Cr}} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \propto D \quad (21)$$

これらの関係が、式 (17) に示す関数 ϕ の空間微分に対してき裂先端近傍で $1/\sqrt{r}$ 特異性を与えることができる。二次 B スプライン基底関数を仮定し、 ξ 方向のコントロールポイントのインデックスを $0, 1, 2, \dots, n+1$ 、それに対応する座標値を $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$ とする。 r はき裂先端からの距離であり、 $r_0 = 0$ である。ここで $r_0 = r_1 = 0$ とおくと、き裂先端近傍の r は

$$r = \frac{1}{2}\xi^2\alpha \quad (0 \leq \xi < 1) \quad (22)$$

次に r_2, r_3, \dots, r_n を以下のように設定する。

$$r_i = \frac{i(i-1)}{2}\alpha \quad (2 \leq i \leq n) \quad (23)$$

また r_{n+1} は次のように表される。

$$r_{n+1} = \frac{n^2}{2}\alpha \quad (24)$$

ノット区間 ($0 \leq \xi \leq n$) の範囲で、 $r = \frac{1}{2}\xi^2\alpha$ を満足する。ここまでの議論では簡単のために二次 B スプライン基底関数を用いたが、次数を増やす場合はオーダーエレベーションを用いることで対応するパッチを作成することができる。

(3) 相互積分法 [11]

相互積分法は、線形弾性体に対してエネルギー解放率を J 積分が等価となることを利用して、混合モード破壊問題での各モードの応力拡大係数を分離して計算する手法である。

実際に応力拡大係数を求めたい実場を上付き文字 (1)、き裂近傍の厳密解である補助場を上付き文字 (2) で表す。この 2 つの場の重ね合わせを考え、この状態を上付き文字 (0) で表すと変位、ひずみ、応力は次のように書くことができる。

$$u_i^{(0)} = u_i^{(1)} + u_i^{(2)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(0)} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad \sigma_{ij}^{(0)} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \quad (25)$$

同様に応力拡大係数は次のように表される。

$$K_I^{(0)} = K_I^{(1)} + K_I^{(2)}, \quad K_{II}^{(0)} = K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)}, \quad K_{III}^{(0)} = K_{III}^{(1)} + K_{III}^{(2)} \quad (26)$$

そして、ひずみエネルギー密度 W は式 (25) を用いて次の式で表される。

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)})(\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \\ &= \frac{1}{2}D_{ijkl}(\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)})(\varepsilon_{kl}^{(1)} + \varepsilon_{kl}^{(2)}) \\ &= \frac{1}{2}D_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{(1)}\varepsilon_{kl}^{(1)} + \frac{1}{2}D_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{(2)}\varepsilon_{kl}^{(2)} + D_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{(1)}\varepsilon_{kl}^{(2)} \\ &= W^{(1)} + W^{(2)} + W^{(1,2)} \end{aligned} \quad (27)$$

ここで $W^{(1,2)}$ は相互ポテンシャルエネルギー密度と呼ばれる。重ね合わせ場の J 積分値は

$$\begin{aligned} J^{(0)} &= G_{total}^{(0)} = \frac{1}{E'}(K_I^{(0)2} + K_{II}^{(0)2}) + \frac{1+\nu}{E}K_{III}^{(0)} \\ &= \frac{1}{E'}((K_I^{(1)} + K_I^{(2)})^2 + (K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)})^2) + \frac{1+\nu}{E}(K_{III}^{(1)} + K_{III}^{(2)})^2 \\ &= J^{(1)} + J^{(2)} \\ &\quad + \frac{2}{E'}(K_I^{(1)}K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)}K_{II}^{(2)}) + \frac{2(1+\nu)}{E}K_{III}^{(1)}K_{III}^{(2)} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} J^{(0)} &= -\frac{1}{\Delta} \int_V (\delta_{li}W^{(0)} - \sigma_{ij}^{(0)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_1}) \frac{\partial q}{\partial x_i} dV \\ &= -\frac{1}{\Delta} \int_V (\delta_{li}W^{(1)} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1}) \frac{\partial q}{\partial x_i} dV \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \int_V (\delta_{li}W^{(2)} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_1}) \frac{\partial q}{\partial x_i} dV \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \int_V \left(\delta_{li}W^{(1,2)} - \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} \right] \right) \frac{\partial q}{\partial x_i} dV \\ &= J^{(1)} + J^{(2)} \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \int_V \left(\delta_{li}W^{(1,2)} - \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} \right] \right) \frac{\partial q}{\partial x_i} dV \end{aligned} \quad (29)$$

ここで E' は

$$E' = \begin{cases} E & \text{(plane stress)} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{(plane strain)} \end{cases}$$

式 (28) と式 (29) を比較すると

$$\begin{aligned} &\frac{2}{E'}(K_I^{(1)}K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)}K_{II}^{(2)}) + \frac{2(1+\nu)}{E}K_{III}^{(1)}K_{III}^{(2)} \\ &= \frac{1}{\Delta} \int_V \left(\delta_{li}W^{(1,2)} - \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} \right] \right) \frac{\partial q}{\partial x_i} dV \end{aligned} \quad (30)$$

上式において、適切な補助場を設定することで各モードの応力拡大係数を取り出すことができる。

例えばモード I の変形のみを受ける補助場を上付き文字 2I とすると、応力拡大係数は

$$K_I^{(2I)} = 1, K_{II}^{(2I)} = 0, K_{III}^{(2I)} = 0 \quad (31)$$

このとき

$$K_I = -\frac{E'}{2} \frac{1}{\Delta} \int_V \left(\delta_{1i} W^{(1,2I)} - \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(2I)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2I)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} \right] \right) \frac{\partial q}{\partial x_i} dV \quad (32)$$

同様にモード II, モード III の変形の補助場を上付き文字 2II, 2III で表すと

$$K_{II} = -\frac{E'}{2} \frac{1}{\Delta} \int_V \left(\delta_{1i} W^{(1,2II)} - \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(2II)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2II)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} \right] \right) \frac{\partial q}{\partial x_i} dV \quad (33)$$

$$K_{III} = -\frac{E}{2(1+\nu)} \frac{1}{\Delta} \int_V \left(\delta_{1i} W^{(1,2III)} - \left[\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_j^{(2III)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2III)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_1} \right] \right) \frac{\partial q}{\partial x_i} dV \quad (34)$$

き裂前縁の IGA 要素は、有限要素法解析モデルのき裂前縁要素に比べて非常に大きいので、IGA 要素ごとの積分では J 積分の点ごとの評価が難しい。そのため、Tabaza ら [9] は特異パッチ内で薄いスライス上の積分領域を設定する手法を提案しており、本研究でも採用している。図 4 に積分領域の概略図を示す。青色で示された領域が薄くスライスされた領域である。

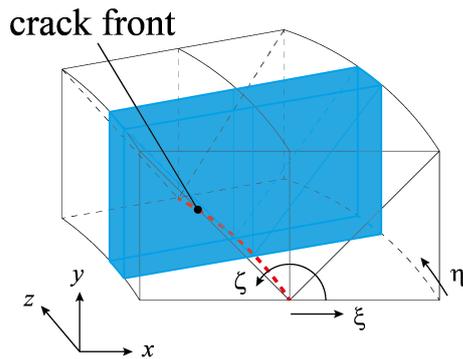


図-4 積分領域の概略図。

(4) き裂進展解析

Paris 則 [12] は次の式で表される。

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eq})^n \quad (C = 2.05 \times 10^{-12}, n = 3.3) \quad (35)$$

ここで、 C と n は材料定数であり、温室中のステンレス鋼に対する数値を使用した。そして等価応力拡大係数振幅 ΔK_{eq} [13] は次の式で定義される。

$$\Delta K_{eq} = \frac{\Delta K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta K_I^2 + 4(\alpha_1 \Delta K_{II})^2 + 4(\alpha_2 \Delta K_{III})^2} \quad (\alpha_1 = 1.155, \alpha_2 = 1) \quad (36)$$

式 (36) から等価応力拡大係数振幅を求め、式 (35) によりき裂進展速度 $(\frac{da_x}{dN}, \frac{da_y}{dN}, \frac{da_z}{dN})$ とその絶対値 $\frac{da}{dN}$ を計算する。1 き裂進展ステップあたりの最大き裂進展長さ Δa を設定すると、繰り返し荷重サイクル数 N は次の式

$$N = \frac{\Delta a_{max}}{(\frac{da}{dN})_{max}} \quad (37)$$

式 (37) で得られた繰り返し荷重サイクル数 N は、き裂進展前の応力拡大係数のみを参照しているため、繰り返し荷重サイクル数を過大評価してしまう。そこで、き裂進展後の応力拡大係数も参照することで補正した繰り返し荷重サイクル数を以下に示す。

$$N_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta a_{max}}{(\frac{da}{dN})_{before,max}} + \frac{\Delta a_{max}}{(\frac{da}{dN})_{after,max}} \right) \quad (38)$$

式 (38) の $(\frac{da}{dN})_{before,max}$, $(\frac{da}{dN})_{after,max}$ は各ステップの進展前、進展後の最大き裂進展速度を表す。き裂前縁で求めた 1 き裂進展ステップあたりのき裂進展を表すベクトルをき裂進展ベクトルと定義する。き裂進展ベクトルは、以下の式により求められる。

$$(\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z) = N_k \left(\frac{da_x}{dN}, \frac{da_y}{dN}, \frac{da_z}{dN} \right) \quad (39)$$

き裂進展ベクトルにより、進展後のき裂前縁曲線が決定する。リメッシングを行うためには、進展後のき裂前縁曲線上の離散点からコントロールポイントを求める必要がある。パラメトリック空間におけるき裂前縁の離散点を次の式で表す。

$$\xi_i = \begin{pmatrix} \xi_i^1 \\ \xi_i^2 \\ \vdots \\ \xi_i^m \end{pmatrix} \quad (40)$$

ここで i はパラメトリック空間での方向、 m はサンプル点の数である。進展後のき裂前縁曲線 $C(\xi)$ は基底関数 $N(\xi)$ とコントロールポイント座標 B の線形結合により表され

$$C(\xi_i) = \sum_{j=0}^n N_j(\xi_i) B_j = (N_0(\xi_i) \quad N_1(\xi_i) \quad \dots \quad N_n(\xi_i)) \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \mathbf{NB} \quad (41)$$

ここで、き裂前縁曲線上の離散点の座標を表すベクトルを \mathbf{p} とする。このとき二乗誤差関数 $E(\mathbf{B})$ は次の式で表される。

$$E(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{NB} - \mathbf{p}\|^2 \quad (42)$$

これを展開すると

$$\begin{aligned} E(\mathbf{B}) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{NB} - \mathbf{p}\|^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{NB} - \mathbf{p})^T (\mathbf{NB} - \mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{B}^T \mathbf{N}^T \mathbf{NB} - \mathbf{B}^T \mathbf{N}^T \mathbf{p} - \mathbf{p}^T \mathbf{NB} + \mathbf{p}^T \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (43)$$

式 (43) を \mathbf{B} で偏微分すると

$$\frac{\partial E(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{p} - \mathbf{N}^T \mathbf{p} \quad (44)$$

式 (43) を最小化するには、 $\frac{\partial E(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} = 0$ を満足する必要がある。このとき \mathbf{B} は次の式で表される。

$$\mathbf{B} = (\mathbf{N}^T \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{p} \quad (45)$$

式 (45) により、進展後のき裂前縁の離散点に対応するコントロールポイント座標の計算を行う。

3. 数値解析例

一様引張応力を受ける表面楕円き裂を有する平板のモード I き裂進展解析を行った. 解析対象を図 5 に示す.

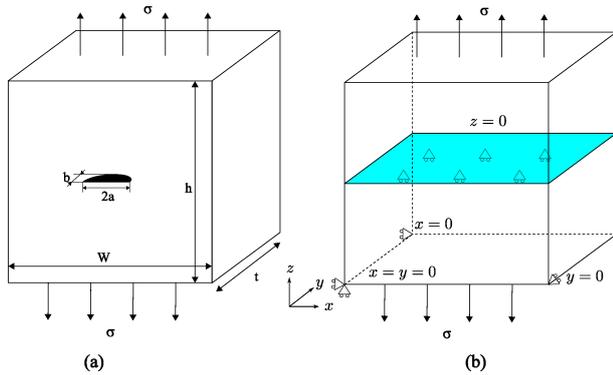


図-5 (a) 表面楕円き裂を有する平板の引っ張り問題 (b) 境界条件.

ここで $\sigma = 100\text{MPa}$, 初期き裂のアスペクト比 $b/a = 1.0$, 板厚 t とき裂表面寸法 a の比 $a/t = 0.2$ とした. 本解析で使用したグローバル IGA 解析モデルとローカル IGA 解析モデル, 2つの解析モデルを重ねた S-IGA 解析モデルを図 6, 図 7 に示す.

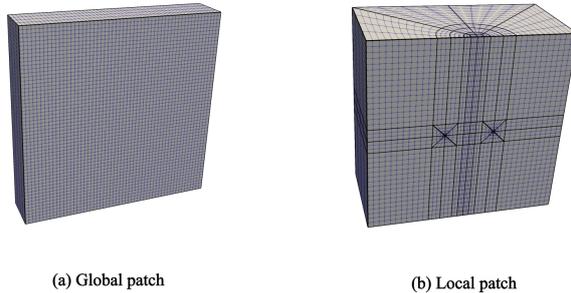


図-6 (a) グローバル IGA 解析モデルと (b) ローカル IGA 解析モデル.

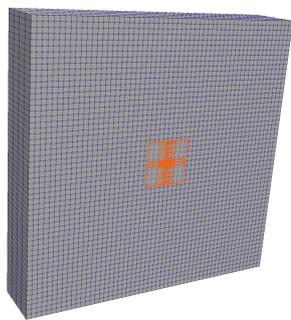


図-7 S-IGA 解析モデル.

グローバル IGA 解析モデル, ローカル IGA 解析モデルのコントロールポイント数はそれぞれ 24389, 26844 で

ある.

図 8 にき裂面を含む断面の z 方向応力分布を示す. き裂

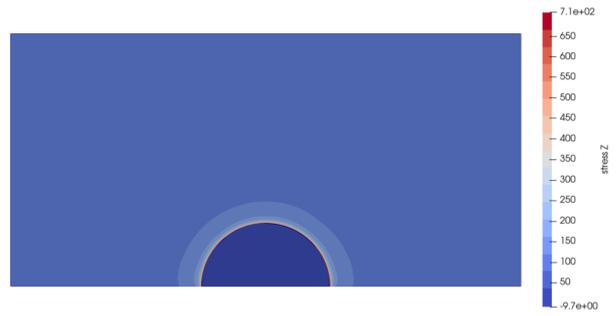


図-8 応力分布図.

前縁近傍で応力集中が発生していることがわかる. 図 9 では計算したモード I 応力拡大係数と Raju-Newman の解 [14] の比較する.

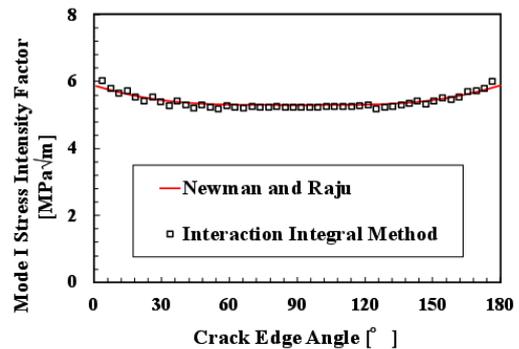


図-9 モード I 応力拡大係数.

図 9 から S-IGA で解析した応力拡大係数が Raju-Newman の解 [14] とよく一致することがわかる. 計算した応力拡大係数をもとにき裂進展ベクトルを計算し, 求めた進展後のき裂前縁座標を図 10 に, 進展前と進展後にリメッシングしたローカル IGA 解析モデルを図 11 にそれぞれ示す.

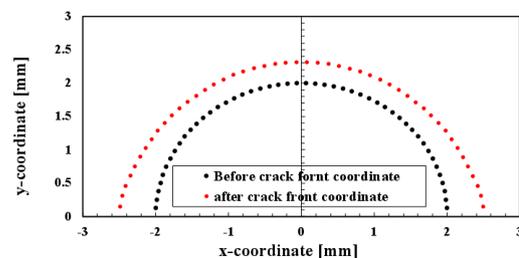


図-10 き裂進展前後のき裂前縁座標.

図 10 よりき裂が進展し, き裂が拡大する様子が確認できる. またき裂の進展に伴いリメッシングされたローカル IGA 解析モデルのき裂面も拡大している.

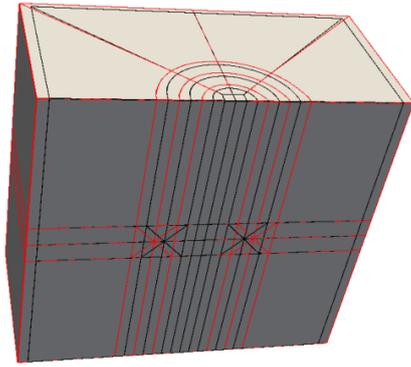


図-11 き裂進展前後のローカル IGA 解析モデル。

4. 結言

本研究では高精度なき裂進展解析システム構築のため、重合パッチ法と特異パッチ法を組み合わせた手法を開発した。モード I き裂進展に対する適用が可能であることを確認した。今後は混合モードき裂進展に対しての適用方法を検討する予定である。

参考文献

- [1] Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R. and Bazilevs, Y.: Isogeometric Analysis Toward Integration of CAD and FEA, Wiley, pp.1-75,2009.
- [2] 渡邊梨乃.: 重合パッチ法 (S-version Isogeometric Analysis Method, S-IGA) の提案, 東京理科大学大学院理工学研究科機械工学専攻 2020 年度修士論文, 2021.
- [3] Fish, J.: The s-version of the finite element method, Computers & Structures, Vol. 43, No.3, pp.539-547,1992.
- [4] Benson, D.J., Bazilevs, Y., De Luycker, E., Hsu, M.C., Scott, M., Hughes, T.J.R. and Belytschko, T.: A generalized finite element formulation for arbitrary basis functions: From Isogeometric analysis to XFEM, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.83, pp.765-785, 2010.
- [5] S.Sh. Ghorashi, N. Valizadeh, S. Mohammadi and T. Rabczuk.: T-spline based XIGA for fracture analysis of orthotropic media, Computers and Structures, Vol. 147, pp. 138-146, 2015.
- [6] Jiming Gu, Tiantang Yu, Le Van Lich, Thanh-Tung Nguyen, Satoyuki Tanaka and Tinh Quoc Bui.: Multi-inclusions modeling by adaptive XIGA based on LR B-splines and multiple level sets, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 148, pp. 48-66, 2018.
- [7] Okada, H., Nakahara, D., Nagashima, A., Watanabe, R., Sunaoka, Y., Yusa, Y., and Ootoguro, Y.: Singular patch method for linear elastic fracture mechanics analysis using isogeometric analysis, Mechanical Engineering Journal, Vol.9, No.6, p.22-00291, 2022.
- [8] Barsoum, R.S.: On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol.10, pp.25-37, 1976.
- [9] Omar, T, Okada, h and Nakahara, D.: An IGA based domain integral method for the evaluation of the J-integral using the singular patch method, Mechanical Engineering Journal, vol.9, No.6, p.22-00308, 2022.
- [10] 砂岡優輔.: IGA 重合パッチ法 (s-version Isogeometric Analysis, s-IGA) による三次元線形破壊力学解析, 東京理科大学大学院創域理工学研究科機械航空宇宙工学専攻 2023 年度修士論文, 2024.
- [11] Yau, J.F., Wang, S.S. and Corton, H.T.: A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity, Journal of Applied Mechanics, Vol.47, pp.335-341, 1980.
- [12] P. Paris and F. Erdogan: A Critical Analysis of Crack Propagation Laws, Transactions of the ASME, series D, Vol.85, No.4, pp.528-534,1963.
- [13] Richard, H. A., Fulland, M. and Sander, M.: Theoretical crack path prediction, Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, Vol. 28, pp. 3-12, 2005.
- [14] Raju, I.S. and Newman J.R.: Stress-Intensity Factors for a Wide Range of Semi-Elliptical Surface Cracks in finite-Thickness Plates, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 11, pp. 817-829, 1979.