

# 次世代平滑化有限要素法 (EC-SSE-SRI-T4) における 圧力チェッカーボーディング抑制法の検討

A Study on Pressure Checkerboarding Suppression  
in the Next-gen Smoothed Finite Element Method: EC-SSE-SRI-T4

大西有希<sup>1)</sup>  
Yuki Onishi

<sup>1)</sup>博 (工) 東京科学大学 工学院 助教 (〒 152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: yuki.onishi@gmail.com)

A new technique for pressure checkerboarding suppression in the next-gen smoothed finite element method (EC-SSE-SRI-T4) is proposed. EC-SSE-SRI-T4 stands for edge center-based strain smoothing element using 4-node tetrahedral mesh with selective reduced integration. The performance of the conventional EC-SSE-SRI-T4 in nearly incompressible large deformation analyses is relatively good without any locking issues; however, the pressure checkerboarding issue still somewhat remains, which is the only drawback. The new EC-SSE-SRI-T4 adopts the multiple strain smoothing technique, which was introduced in F-barES-FEM-T4, and suppresses pressure checkerboarding in the cases of 0.49 Poisson's ratio. A nearly incompressible cantilever bending analysis in large deformation shows that the new EC-SSE-SRI-T4 provides a sufficiently accurate solution for practical use.

**Key Words :** Smoothed finite element method, Tetrahedral mesh, Volumetric locking, Pressure checkerboarding, Multiple strain smoothing technique.

## 1. はじめに

長らく「次世代有限要素法」と呼ばれて来た平滑化有限要素法 (Smoothed Finite Element Method: S-FEM)[1]) は近年実用化フェーズに移行しており、汎用ソフトへの実装や製品化 [2, 3] が進んでいる。他方、S-FEM 自体の改良研究も近年一段と進んでおり、「次世代平滑化有限要素法」あるいは「S-FEM 2.0」と呼ぶべき新たな S-FEM が登場して来ている。次世代 S-FEM の中でも固体解析分野で筆頭に挙がる手法は 4 節点四面体 (T4) メッシュを用いた Edge Center-based Strain Smoothing Element (EC-SSE-T4)[4] であり、従来まで低精度手法として忌み嫌われて来た T4 メッシュを用いて驚異的なひずみ/応力の解析精度を実現している (図 1 参照)。また、EC-SSE-T4 に選択的低減積分 (Selective Reduced Integration: SRI) を組み合わせた手法である EC-SSE-SRI-T4[5] ではせん断ロッキングのみならず体積ロッキングをも回避しており、微圧縮性の現れる種々の解析 (超弾性・熱粘弾性・塑性など) にも適用可能となっている。EC-SSE-T4 および EC-SSE-SRI-T4 の解析時間は同メッシュを用いた標準的な T4 要素 (FEM-T4) と比較して約 6.7 倍に増えるものの、そのメッシュ収束速度の速さから粗いメッシュでも妥当な解が得られるため、FEM-T4 よりも遥かに実用に適した手法となっている。

しかしながら、EC-SSE-SRI-T4 にも唯一の弱点があり、それが圧力チェッカーボーディングである。微圧縮解析において多くの有限要素は体積ひずみおよび圧力の精度に課題があり、市松模様状の不自然な圧力分布を呈してしまうことが知られている。EC-SSE-SRI-T4 にもその課題があり、微圧縮解析において体積ロッキングはしないが圧力チェッカーボーディングは発生してし

まう [5]。変位・荷重・偏差ひずみ・偏差応力の精度には全く問題ないが体積ひずみ・圧力の精度にのみ問題

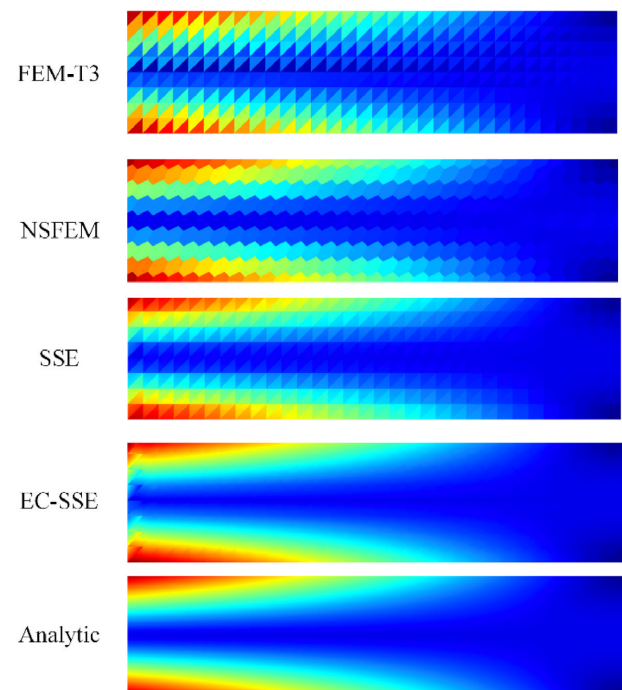


図-1 2次元片持ち梁の微小変形曲げにおける Mises 応力分布の同一メッシュでの解析結果比較 (文献 [9] より抜粋引用)。次世代平滑化有限要素法である EC-SSE は解析解 (Analytic) と見まごう程の高精度な応力分布を与えている。

があるという、まさに玉に瑕といった状況である。

圧力チェッカーボーディングの抑制手法の1つに多重ひずみ平滑 [6] が知られている。S-FEM による微圧縮大変形の従来手法である F-barES-FEM-T4(c) では、多重ひずみ平滑により T4 メッシュにおける圧力チェッカーボーディングを抑制出来ることが示されている。ひずみ平滑の繰り返し回数 (c) を増やすことにより、ポアソン比が 0.49, 0.499, 0.4999, ... と 0.5 に近づいても圧力チェッカーボーディングの抑制が可能である。ただし、計算コストが c の 3 乗に比例して増加することから、余りに多数回のひずみ平滑を行う定式化は実用不適となる。従って、多重ひずみ平滑により圧力チェッカーボーディングの抑制を行うのであれば、ポアソン比 0.49 程度で必要十分となる出来る限り少ない繰り返し回数を採用することが肝要である。

本研究では EC-SSE-SRI-T4 に多重ひずみ平滑を導入し、微圧縮大変形解析における圧力チェッカーボーディングを抑制する新手法を提案する。ポアソン比 0.49 までの微圧縮解析において実用上問題ない程度まで圧力チェッカーボーディングを抑制することを目的とし、ひずみ平滑の繰り返し回数を 2 回 (二重ひずみ平滑) に留めることで計算コストを EC-SSE-T4 と同等のままに据え置く定式化を採用する。片持ち梁の微圧縮大変形曲げ解析を実施し、新旧の EC-SSE-SRI-T4 の圧力分布を比較することで新手法の有効性を確認する。

## 2. 手法

2024 年に発表した旧 EC-SSE-SRI-T4[5] と本年提案する新 EC-SSE-SRI-T4 の違いは、体積 (静水圧) 成分の計算方法の違いのみである。旧 EC-SSE-SRI-T4 では体積成分の計算に NS-FEM-T4 を用いていたが、新 EC-SSE-SRI-T4 では同計算に二重ひずみ平滑と非整合応力積分 (詳細は後述) を新たに提案・導入している。

簡単のため、本稿では 3 節点三角形 (T3) メッシュを使用した 2 次元の定式化である新 EC-SSE-SRI-T3 を中心に解説する。新 EC-SSE-SRI の計算手順概要を図 2 に予め示しておく。NS-FEM/ES-FEM, SSE および EC-SSE の定式化の詳細はそれぞれ文献 [1, 4, 7] を参照されたい。

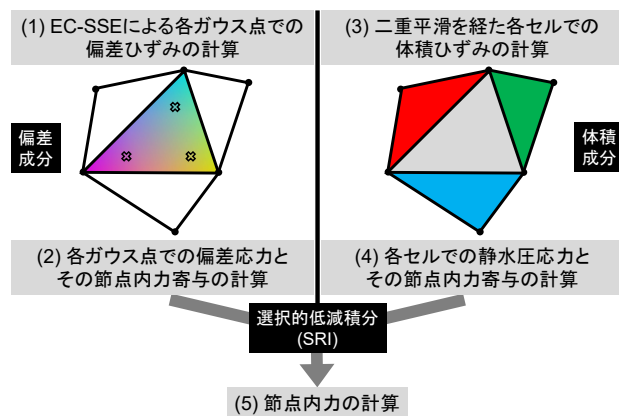


図-2 新 EC-SSE-SRI の計算手順概要。偏差成分を EC-SSE で、体積成分を二重ひずみ平滑で計算し、両者を SRI で組み合わせている。

なお、SSE の E は Element の略記であるため本稿では「ひずみ平滑『要素』」と和訳しているが、独立した有限要素ではないことに注意されたい。提案手法を含め、SSE は要素をまたぐ平滑化を行うため、標準的な FEM コードの要素として実装することは困難である。また、標準的な FEM の要素の概念との混同を避けるため、本稿では三角形/四面体メッシュの各三角形/四面体を「セル」と称する。

### (1) 偏差成分の計算

提案手法では偏差成分の計算に EC-SSE を使用する。2次元の EC-SSE-T3 による偏差ひずみ分布の計算の流れを図 3 に示す。

まず、各セルで標準的な T3 要素と同じ  $[B]^{\text{Cell}}$  (いわゆる、 $B$ -マトリックス) を計算した後、それらをエッジにおいて平滑化 (面積重み付き平均化) し、各エッジで  $[B]^{\text{Edge}}$  を計算する。この時、各  $[B]^{\text{Edge}}$  はそのエッジの中心点での量であると考え、すると、各セル内の任意の位置における  $[B]$  は、3 エッジ中心の  $[B]^{\text{Edge}}$  の線形内挿/外挿により与えられる。そこで、各セル内に配置した 3 つのガウス点 (図 3 内「×」印) における  $[B]^{\text{Gaus}}$  を線形内挿/外挿により計算する。この 3 つの  $[B]^{\text{Gaus}}$  を用いて偏差ひずみを計算し、その後は標準的な FEM と同様の手順で偏差応力とその節点内力寄与の計算を行う。あるセル  $c$  における偏差応力の節点内力寄与の計算は Gauss の 3 点積分により次式で表される。

$$\{f_c^{\text{int(dev)}}\} = \sum_{g=1}^3 [B_g^{\text{Gaus}}]^T \{ \sigma_g^{\text{Gaus(dev)}} \} V_g^{\text{Gaus}} \quad (1)$$

2次元の EC-SSE-T3 ではひずみ・応力分布がセル毎に区分線形となるのに加え、セル境界のエッジの中心点において必ずひずみ・応力が連続となる。従って、提案手法では粗いメッシュでも高精度かつ滑らかな偏差ひずみ・応力分布が得られ、T3 メッシュでも 2 次要素と同等以上に速いメッシュ収束速度が期待できる。ただし、各エッジの中心点以外の位置では一般に偏差ひずみ・偏差応力は不連続であることに注意されたい。

なお、3次元の EC-SSE-T4 では各エッジの  $[B]^{\text{Edge}}$  を計算した後、各フェイスでの  $[B]^{\text{Face}}$  を 3 エッジの体積重み付き平均で計算する。各  $[B]^{\text{Face}}$  を各フェイスの中心点での量であると考え、4 フェイス中心からの線形内挿/外挿により各セル内の 4 ガウス点における  $[B]^{\text{Gaus}}$  を計算する。3次元の提案手法でも偏差ひずみ・偏差応力分布がセル毎に区分線形となり、フェイスの中心点において必ず偏差ひずみ・偏差応力が連続となる。

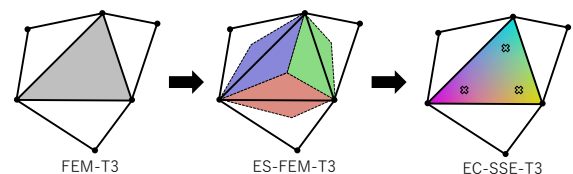


図-3 EC-SSE-T3 の偏差ひずみ計算の流れ。FEM-T3 および ES-FEM-T3 を経由し、セル内線形かつエッジ中心で連続なひずみ分布を実現している。

## (2) 体積成分の計算

提案手法では体積ひずみ成分の計算に二重ひずみ平滑を導入し、さらにその節点内力寄与の計算に非整合応力積分を導入している。

まず、各セルで標準的な T3 要素と同じ  $[\text{Cell} \tilde{B}]$  を計算した後、それらを節点において平滑化（面積重み付き平均化）し、各節点で  $[\text{Node} \tilde{B}]$  を計算する。さらに、 $[\text{Node} \tilde{B}]$  を再度セルにおいて平滑化し、各セルで平滑化された  $[\text{Cell} \tilde{B}]$ （セル内一定）を計算する。この手順を端的に表すと「NS-FEM → NS-FEM<sup>-1</sup>」の二重ひずみ平滑を行っていると言える。各セルの  $[\text{Cell} \tilde{B}]$  を用いて体積ひずみを計算し、材料構成則より静水圧応力  $\{\text{Cell} \tilde{\sigma}^{(\text{hyd})}\}$  が計算される。

次に、あるセル  $c$  における静水圧応力の節点内力寄与の計算を 1 点積分により次式で行う。

$$\{\text{Cell} f_c^{\text{int(hyd)}}\} = [\text{Cell} \tilde{B}]^T \{\text{Cell} \tilde{\sigma}^{(\text{hyd})}\} \text{Cell} \tilde{V} \quad (2)$$

ここで、上式に使用されている  $B$  マトリックスが  $[\text{Cell} \tilde{B}]$  ではなく  $[\text{Cell} B]$  であることに注意されたい。応力や体積には二重ひずみ平滑後の値（ $\bar{\square}$  有り）を使用しているのに対し、 $B$  マトリックスには平滑前の標準的な T3/4 要素と同じもの（ $\bar{\square}$  無し）を使用している。ひずみ平滑前後の値を混ぜて使用していることから、上式は非整合な応力積分であると言える。しかしながら、この非整合応力積分には圧力チェッカーボーディングの抑制効果があることが過去の研究 [6] により分かっている。<sup>1</sup> なお、体積ひずみや静水圧応力はセル内 1 点積分であることから、セル界面で一般に不連続となる。

## (3) SRI による偏差/体積応力成分の合算

提案手法では SRI に基づいて偏差応力成分の節点内力と体積（静水圧）応力成分の節点内力を合算する。計算手順は一般的な SRI と同じであるため、本稿では記載を省略する。

## (4) 定式化の特徴

新 EC-SSE-SRI-T4 の定式化における主な特徴は次の通りである。

- a) **せん断/体積ロッキングを回避できる。**  
T4 メッシュでロッキングフリーを実現している。
- b) **圧力チェッカーボーディングを大幅に抑制できる。**  
二重ひずみ平滑の採用により、旧手法よりも強力な圧力振幅低減効果が期待できる。
- c) **厳しい大変形に対応できる。**  
大変形ロバスト性を低下させる高次の内挿関数を使用していない。

<sup>1</sup>  $[\text{Cell} \tilde{B}]^T$  と比較して  $[\text{Cell} B]^T$  は行数が大幅に少ない。前者の行数は各セルとその周辺セルが手をつなぐ節点数  $\times 3$  (次元数) であるのに対し、後者の行数は各セルが手をつなぐ節点数 (T4 なら 4 個)  $\times 3$  である。従って、多数の周辺セルの情報を集めて計算された  $\{\text{Cell} \tilde{\sigma}^{(\text{hyd})}\}$  をわずか 4 個の節点の内力寄与として分配していることになる。これは「広く集めて狭く配る」状態になっており、これが圧力チェッカーボーディングの抑制に役立っていると推測される。

- d) **偏差ひずみ・偏差応力の精度が高くメッシュ収束が速い。**

EC-SSE の採用により、粗いメッシュでも高精度な偏差ひずみ・偏差応力分布が得られる。

- e) **自由度が一切増加しない。**  
純粋な変位型有限要素法であり、自由度追加が無く、陽解法にも拡張できる。コード開発も容易である。

- f) **計算コストは標準的な T4 要素よりが高いが、EC-SSE-T4 や旧 EC-SSE-SRI-T4 と同等。**

セルをまたぐひずみ平滑化を行っているため、標準的な T4 要素 (FEM-T4) より剛性マトリックスのバンド幅が約 6.7 倍広く、計算コストが高い。ただし、バンド幅は EC-SSE-T4 や旧 EC-SSE-SRI-T4 と全く同じである。

- g) **標準的な FEM コードの要素として実装できない。**  
セルをまたぐひずみ平滑化を行っているため、一般的な FEM コードの T4 要素としては実装できない。

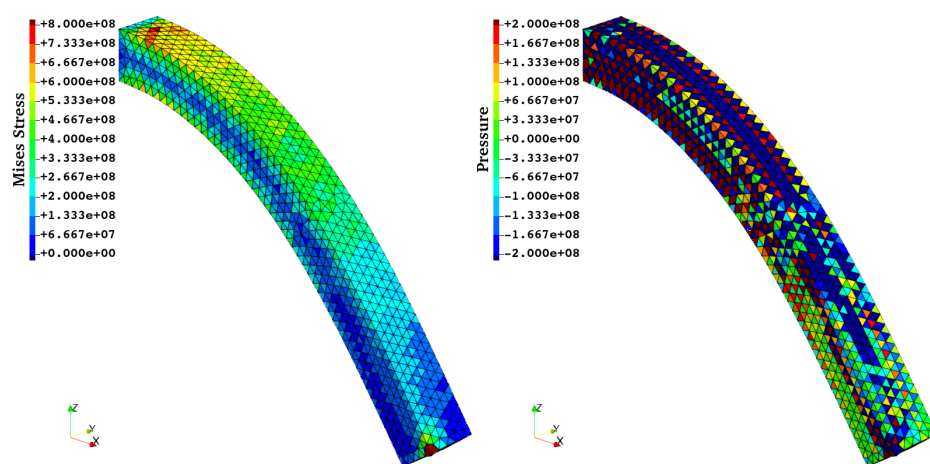
- h) **動解析でエネルギー発散を起こす懸念がある。**  
非整合応力積分を行っているため、従来研究の F-barES-FEM-T4 と同様、動解析でのエネルギー発散 [8] を起こす可能性が高い。ただし、慣性項が登場しない静解析や粘性解析ではエネルギー発散の恐れはない。

## 3. 結果と考察

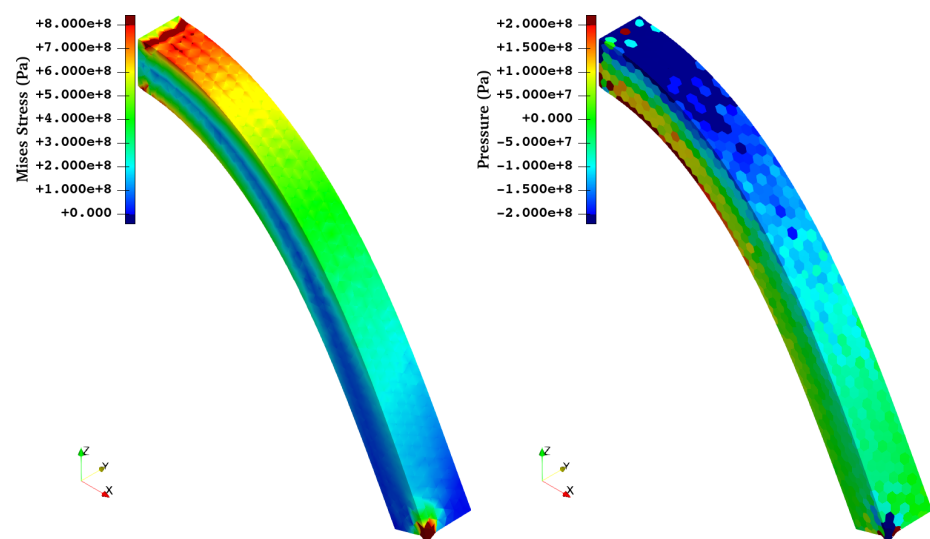
片持ち梁の微圧縮大変形曲げ解析を例に新 EC-SSE-SRI-T4 の性能を評価する。10 m  $\times$  1 m  $\times$  1 m の片持ち梁の先端角の 1 点に死荷重を加えた曲げ（大たわみ）解析を行う。解析領域となる梁は非構造の T4 メッシュ分割により 9560 個のセルに分割した。材料は初期ヤング率が 5.96 GPa・初期ポアソン比が 0.49 の微圧縮性 neo-Hooke 超弾性体とする。

荷重が 20 MN に達した時点（参照解の先端たわみは約 6.5 m）での Mises 応力および圧力の分布を図 4 に示す。ひずみ一定要素である標準的な 4 節点四面体要素 (FEM-T4) を用いた解析結果は、せん断/体積ロッキングによりたわみが足りないだけでなく、深刻な圧力チェッカーボーディングが生じている。Mises 応力は比較的に耐える分布ではあるが、区分一定（各要素内で一定）の分布となることからメッシュ収束精度は極めて遅い。旧 EC-SSE-SRI-T4 を用いた解析結果は、せん断/体積ロッキングを起こしておらず、Mises 応力は妥当かつ区分線形の滑らかな分布を示している。しかし、圧力チェッカーボーディングの問題はやや残っており、十分に抑制出来ているとは言い難い。そして、新 EC-SSE-SRI-T4 の圧力分布はチェッカーボーディングの振動幅が十分小さく抑えられている。今回採用した二重ひずみ平滑の効果が現れていることが確認された。

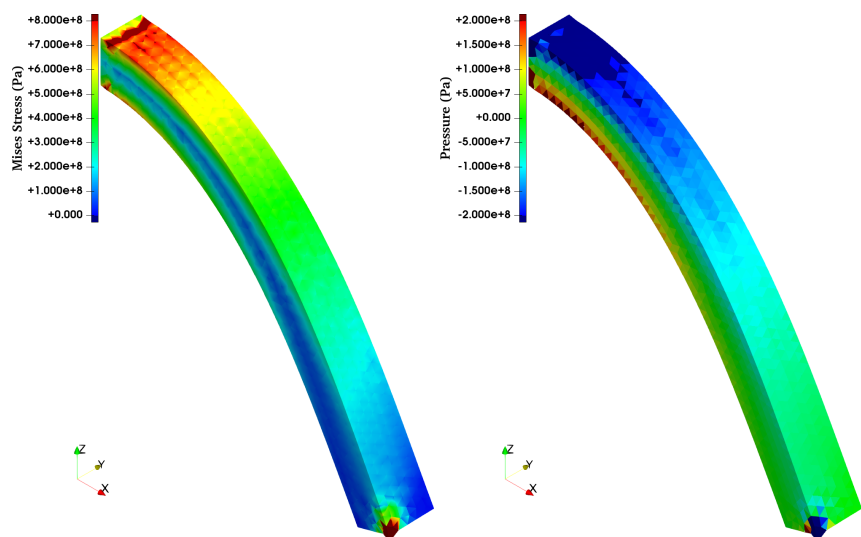
本稿で取り上げた片持ち梁の解析において新 EC-SSE-SRI-T4 は変位・荷重・ひずみ・応力の全てにおいて実用上十分な精度を有している。しかしながら、その他の例題で疑似低エネルギーモードが時折り現れる欠点があり、目下更なる改良を実施している最中である。



(a) FEM-T4



(b) 旧 EC-SSE-SRI-T4



(c) 新 EC-SSE-SRI-T4

図-4 FEM-T4 および新旧 EC-SSE-SRI-T4 による片持ち梁の微圧縮大変形曲げ解析の最終状態における Mises 応力 (各左図) および圧力分布 (各右図)。材料は初期ポアソン比が 0.49 の neo-Hooke 超弾性体とし、解析には全て同一の非構造 4 節点四面体 (T4) メッシュを用いている。ひずみ一定要素である FEM-T4 はせん断ロッキング・体積ロッキング・圧力チェッカーボーディングの問題が生じた無惨な結果を示している。旧 EC-SSE-SRI-T4 は圧力チェッカーボーディングの問題のみやや残っているが、Mises 応力分布は滑らかな線形分布を示している。新 EC-SSE-SRI-T4 は圧力チェッカーボーディングの問題をもほぼ解消しており、変位・荷重・ひずみ・応力の全てにおいて実用上十分な精度を有している。

#### 4. おわりに

EC-SSE-SRI-T4 に二重ひずみ平滑を導入した新しい EC-SSE-SRI-T4 の定式化を提案した。多重ひずみ平滑により、目論見通り圧力チェッカーボーディングの振動幅を十分小さく抑える効果が得られることを確認した。また、繰り返し平滑の回数を2回に留めることで剛性マトリックスのバンド幅を EC-SSE-T4 と同一とし、計算コストを EC-SSE-T4 と同等（同一メッシュで FEM-T4 の約 6.7 倍）のままに据え置くことに成功した。しかし、新 EC-SSE-SRI-T4 には問題によって疑似低エネルギーモードが現れる欠点があり、更なる改良が必要である。最新の改良結果については講演時に発表予定である。

#### 参考文献

- [1] G. R. Liu and T. Nguyen-Thoi, *Smoothed Finite Element Methods*, Boca Raton, FL, USA: CRC Press (2010).
- [2] FrontISTR commons, “FrontISTR v5.5 Release Note,” [https://www.frontistr.com/sys/files/release/v5.5/ReleaseNote\\_ja.pdf](https://www.frontistr.com/sys/files/release/v5.5/ReleaseNote_ja.pdf) (2023).
- [3] Y. Onishi, “Electrodeposition Simulator ”EDES-FEM” Official Website,” <https://edes.fem.jp/> (2023).
- [4] T. Jinsong, C. Guangsong, and G. Yao, “An edge center-based strain-smoothing triangular and tetrahedral element for analysis of elasticity,” *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 95, p. 104606 (2022).
- [5] 大西有希, 「微圧縮大変形解析における次世代平滑化有限要素法 (EC-SSE-SRI-T4) の性能評価」, 計算工学講演会論文集, 第 29 巻 (2024).
- [6] Y. Onishi, R. Iida, and K. Amaya, “F-bar aided edge-based smoothed finite element method using tetrahedral elements for finite deformation analysis of nearly incompressible solids,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 109, No. 11, pp. 1582–1606 (2017).
- [7] C. Lee and P.-S. Lee, “A new strain smoothing method for triangular and tetrahedral finite elements,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 341, pp. 939–955 (2018).
- [8] R. Iida, Y. Onishi, and K. Amaya, “A stabilization method of F-barES-FEM-T4 for dynamic explicit analysis of nearly incompressible materials,” *International Journal of Computational Methods*, Vol. 15, No. 3, p. 1850121 (2018).