

# Updated Lagrange 法による剛塑性有限要素法の幾何学的非線形解析

Geometrical Non-linear Analysis by updated Lagrangian Formulation of Rigid-plastic Finite Element Method

真鍋圭司<sup>1)</sup>  
Keiji Manabe

<sup>1)</sup>博(工)福山大学工学部教授 (〒729-0292 広島県福山市東村町三歳 985-1, E-mail: manabe@fukuyama-u.ac.jp)

Updated Lagrangian formulation is introduced into rigid-plastic FEM (Finite Element Method). Rigid-plastic FEM does not use stress rate, and stress can be determined from velocity field directly. In this report, equilibrium state after deformation is calculated by virtual work principle using Lagrangian stress (first Piola-Kirchhoff stress). It is found that bifurcation of necking process can be simulated by considering updated Lagrangian formulation, in terms of minimum eigen value.

**Key Words :** Updated Lagrangian Formulation, Rigid-Plastic FEM, Eigen Value Analysis

## 1. はじめに

Updated Lagrange 法は、弾塑性有限要素法の計算に用いられる。すなわち弾塑性問題では、応力速度を導入し、変形後のつり合いを変形前の状態で考えるために、有限変形理論に基づく updated Lagrange 法が採用されてきた。

一方、剛塑性有限要素法は、弾性を無視することによって、応力速度を介さずに応力を求めることができる。そのため、微小変形理論を用いて大きな塑性変形を解析することができ、広く活用されている [1]。

本報告では、剛塑性有限要素法に updated Lagrange 法を導入し、幾何学的非線形を取り入れた解析を行う。そして固有値解析 [4,5] を行い、従来の微小変形理論による剛塑性有限要素解析との比較を行う。

## 2. 圧縮性剛塑性有限要素法の概要

本報告で用いる剛塑性有限要素法は、圧縮性材料の特性を利用したものであり [1]、まずははじめに、その概要を簡単にまとめておく。

圧縮性材料の構成式は次の様にして求める [2]。なお本文の式の添字には総和既約を適用する。

次式で定義される偏差応力  $\sigma'_{ij}$  の第二不变量を  $J_2$ 、応力  $\sigma_{ij}$  の第一不变量  $I_1$

$$J_2 = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}, \quad I_1 = \sigma_{kk} \quad (1)$$

を用い、圧縮性材料の降伏関数  $f$  を次の形で表す。

$$f = AJ_2 + BI_1^2 + C\sigma_M^2 \quad (2)$$

$A, B, C$  は圧縮性を示す定数、 $\sigma_M$  は実質部の流れ応力である。この  $f$  を塑性ポテンシャルとした連合流れ則

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3)$$

により応力  $\sigma_{ij}$  とひずみ速度  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  の関係式を求める。その際、

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \bar{\sigma} \dot{\varepsilon} \quad (4)$$

を満足するようにまず相当応力  $\bar{\sigma}$  を次式で定義する。

$$\bar{\sigma}^2 = 3(AJ_2 + BI_1^2) \quad (5)$$

それを用いると  $\lambda$  を定めることができ、応力  $\sigma_{ij}$  とひずみ速度  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  の関係が求まる。

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \left\{ \frac{1}{A} \dot{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij} \left( \frac{1}{18B} - \frac{1}{3A} \right) \dot{\varepsilon}_{kk} \right\} \quad (6)$$

これと式 (4) から、相当ひずみ速度  $\dot{\varepsilon}$  は

$$\dot{\varepsilon}^2 = \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{A} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \left( \frac{1}{18B} - \frac{1}{3A} \right) (\dot{\varepsilon}_{kk})^2 \right\} \quad (7)$$

と定められる。

ひずみ速度  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  は次式で定義される。

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

求めるつりあい条件は、物体力を無視した場合、

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad (9)$$

と書ける。有限要素法においては、このつりあい条件を仮想仕事の原理によって満足させる。

$$\int_v \delta \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} dv = \int_s \delta v_i T_i ds \quad (10)$$

これは、次の汎関数  $\Phi$  を最小にするように速度場  $v_i$  を決定することと等価である。

$$\Phi = \int_v \bar{\sigma} \dot{\varepsilon} dv - \int_s T_i v_i ds \quad (11)$$

### 3. 剛塑性問題の updated Lagrange 定式化

#### (1) Updated Lagrange の概要

まず updated Lagrange 法の概要をまとめておく。図-1 に示すように初期状態を  $C_0$ 、現状態を  $C$ 、現状態からさらに変形が進んだ状態を  $\bar{C}$  とする。これらの状態の各変数を表-1 に示す。

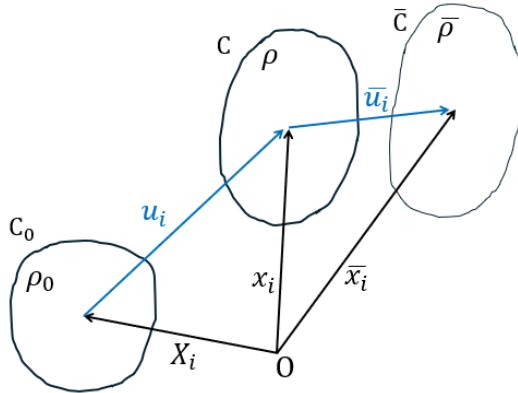


図-1 Updated Lagrange 法の概要

表-1 各状態の変数

状態	$C_0$	$C$	$\bar{C}$
座標	$X_i$	$x_i$	$\bar{x}_i$
密度	$\rho_0$	$\rho$	$\bar{\rho}$

Lagrange 法とは、変形前の変数で変形後の状態を記述する方法であるが、 $C_0$  の変数で  $C$  の状態を記述するのが total Lagrange 法である。それに対し、updated Lagrange 法は、 $C$  の状態を基準とし、 $\bar{C}$  の状態を考える。変形解析の進行とともに、次の様に更新 (update) する。

$$\begin{aligned} C &\rightarrow C_0 & \bar{C} &\rightarrow C \\ x_i &\rightarrow X_i & \bar{x}_i &\rightarrow x_i \\ \rho &\rightarrow \rho_0 & \bar{\rho} &\rightarrow \rho \end{aligned} \quad (12)$$

また、変位も  $\bar{u}_i \rightarrow u_i$  である。

従って常に更新された  $C_0$  の状態を基準とし、 $C$  の状態を考えることになる。

#### (2) 変位と速度の関係

updated Lagrange 法において、図-2 は左図 (a) が変位  $u_i$ 、右図 (b) が速度  $v_i$  の状態を示す。

変位  $u_i$  は、 $C_0$  ではこれから移動する量、 $C$  では移動してきた量を表し、 $C_0$  と  $C$  において同じ値を持つとする。従って速度  $v_i$  も  $C_0$  と  $C$  において同じ値を持つ。

#### (3) updated Lagrange 法の定式化

剛塑性問題において、更新された現在の状態  $C_0$  の変数で、 $C$  の状態を考える updateda Lagrange 形式を導出

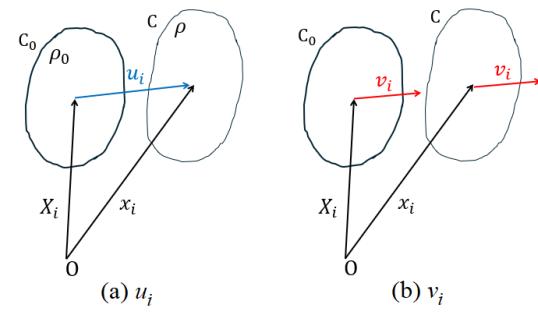


図-2 Updated Lagrange 法の変位と速度の関係

する。図-2 からわかるように、

$$x_i = X_i + u_i \quad (13)$$

剛塑性有限要素法では、変位  $u_i$  ではなく、速度  $v_i$  を未知数とする。図-2 からわかるように、 $v_i$  と  $u_i$  同じ方向を向くベクトルとなる。従って変位  $u_i$  は次式で計算する。

$$u_i = v_i dt \quad (14)$$

第2章で示した剛塑性基礎式は、変形後の  $C$  で成り立つものとする。Updated Lagrange 法に従い、以下で示すように  $C_0$  において基礎式を考え、諸変数は  $X_i$  の関数として表す。

#### a) ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}$ の計算

式 (8) のひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{ij}$  を求める。まず、Green のひずみ

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (15)$$

の速度形

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j}{\partial X_i} + \frac{\partial v_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial v_k}{\partial X_j} \right) \quad (16)$$

を計算する。

この  $\dot{E}_{ij}$  から、 $\dot{\epsilon}_{ij}$  を次式で導出する。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \dot{E}_{kl} \frac{\partial X_l}{\partial x_j} \quad (17)$$

上式の  $\partial X_i / \partial x_j$  は、式 (13) を  $X_j$  で微分し、

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (18)$$

この逆行列を計算して  $\partial X_i / \partial x_j$  を求める。

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right)^{-1} \quad (19)$$

#### b) Cauchy 応力 $\sigma_{ij}$ の計算

式 (6) の応力-ひずみ速度関係式

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\epsilon}} \left\{ \frac{1}{A} \dot{\epsilon}_{ij} + \delta_{ij} \left( \frac{1}{18B} - \frac{1}{3A} \right) \dot{\epsilon}_{kk} \right\} \quad (6\text{-再})$$

により、 $\dot{\epsilon}_{ij}$  から Cauchy 応力  $\sigma_{ij}$  を計算する。

### c) つり合いの計算

次に Cauchy 応力  $\sigma_{ij}$  から次式の Lagrange 応力（第 1 Piola-Kirchhoff 応力） $\Pi_{ji}$  を計算する。

$$\Pi_{ji} = J \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \sigma_{ki} \quad (20)$$

ここで  $J$  はヤコビアンである。

$$J = \det \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (21)$$

つり合いは仮想仕事の原理 (10) を状態  $C_0$  で考えて。

$$\int_{V_0} \delta \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \Pi_{ji} dV_0 = \int_{S_0} \delta u_i T_i dS_0 \quad (22)$$

によって計算する。

## 4. 剛塑性有限要素法の計算技術

### (1) 節点力の数値微分による剛性マトリックスの作成

要素の速度  $v_i$  とその  $X_i$  による微分を関係づけるマトリックスを  $[B^*]$  とする。仮想仕事の原理 (22) から,

$$\int_{V_e} [B^*]^T \{\Pi\} dV_e = \{T\} \quad (23)$$

となり、この  $\{T\}$  を数値微分することによって、要素の剛性マトリックスを計算した [3]。なおこれより、剛性マトリックスは非対称であることがわかる。

一方、変形後の座標を  $x_i = X_i + u_i$  で求め、座標  $x_i$  で  $[B]$  マトリックスを計算すると、仮想仕事の原理 (10) から Cauchy 応力で節点力を求めることができる。

$$\int_{V_e} [B]^T \{\sigma\} dv_e = \{T'\} \quad (24)$$

Lagrange 応力の性質により、変形前後の表面力は等しく、

$$\{T\} = \{T'\} \quad (25)$$

となるはずである。プログラムのデバッグの際には、これが成り立つことチェックした。

### (2) 選択低減積分 (SRI)

塑性変形は体積一定条件の下で変形するので、拘束が加わる。ここでは選択低減積分 SRI (Selective Reduced Integration) によりその問題を解決する。

式 (6) の応力-ひずみ速度関係式

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \left\{ \frac{1}{A} \dot{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij} \left( \frac{1}{18B} - \frac{1}{3A} \right) \dot{\varepsilon}_{kk} \right\} \quad (6\text{-再})$$

を体積変形の部分を以下のように分離する。

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \delta_{ij} p \quad (26)$$

$$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \frac{1}{A} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (27)$$

$$p = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\varepsilon}} \left( \frac{1}{18B} - \frac{1}{3A} \right) \dot{\varepsilon}_{kk} \quad (28)$$

通常の剛塑性有限要素法の SRI では、 $p$  の部分を低減した数値積分を行う。updated Lagrange 法においても同様に考える。式 (20) は、

$$\Pi_{ji} = J \frac{\partial X_j}{\partial x_k} s_{ki} + J \frac{\partial X_j}{\partial x_i} p \quad (29)$$

と書ける。updated Lagrange 法の SRI では、この式の右辺の第 2 項を低減した数値積分を行う。

### (3) ニュートン-ラフソン法の節点速度の修正

ニュートン-ラフソン法を用いて速度の増分  $\Delta v_i$  を求め、速度場を修正する。剛塑性有限要素法では、速度場は次のように  $\beta$  ( $0 < \beta \leq 1$ ) を乗じて修正する。

$$v_i + \beta \Delta v_i \longrightarrow v_i \quad (30)$$

$\beta$  は通常の剛塑性有限要素法では、式 (11) の汎関数を最小にするように決定する [1]。updated Lagrange 法では、汎関数の代わりに節点力の不釣り合い量を最小にするように、 $\beta$  を決定すると解が収束することが多い。

通常の剛塑性有限要素法と比較して、updated Lagrange 型では 1 step あたりの変位増分を小さくとらないと、解が収束しない場合が多いようである。

## 5. 計算結果

計算例として、長方形形状の材料を引張る問題を取り扱った。初期形状は  $30 \times 50$  mm の長方形とし、 $x$  方向 5 個、 $y$  方向 6 個の四角形要素で分割し、1/4 の対称なモデルとした。SRI により体積変形は 1 点、その他を 4 点の積分点で計算した。

変形は  $y$  方向に、1 step あたり 1mm の変形を与え、式 (14) の  $dt = 1$  とした。また材料は加工硬化なしの剛完全塑性体とし、変形抵抗は  $\bar{\sigma} = 100$  MPa で一定とする。

### (1) 均一引張り問題

まず均一変形の計算例を示す。 $y$  軸上端の変位を与える節点では、 $x$  方向は自由とした。

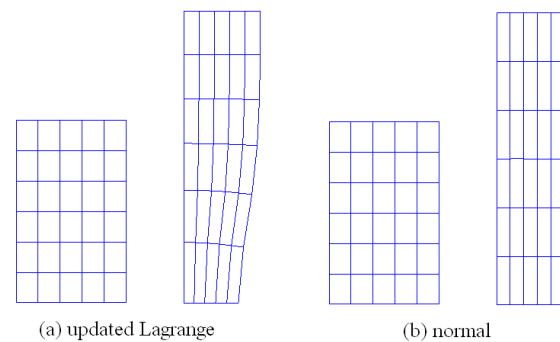


図-3 変形図 (均一変形条件, 30 step)

図-3 に、初期形状と、30 step (上端変位 30 mm) の変形後の形状を並べて示す。左側 (a) が今回提案の updated Lagrange の定式を用いたもの、右側 (b) が通常の剛塑性有限要素法によるものである、(b) は均一変形の計算条件のとおり、長方形が長方形に均一に変形している。

(a) の updated Lagrange 型では、ほぼ 20 step までは均一に変形するが、その後、均一でない変形に分岐していくのが生じ、30step 目には図のような変形形状となった。

一般に座屈のような計算において、均一変形から他のモードに解を誘導するには、微小な力を加えるような処理が必要である [4]。しかし、図-3 の (a) の場合はその処理は行っていない。繰り返し計算の収束過程で計算誤差の要因で、くびれのモードに移動したのであろうと想像できる。

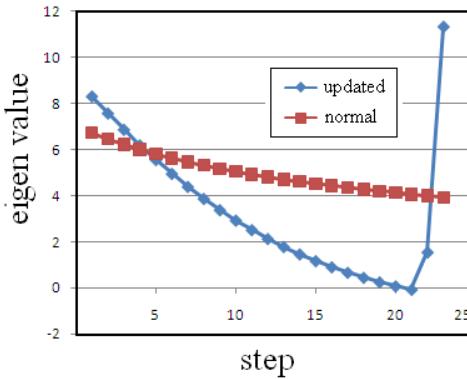


図-4 最小固有値の変化（均一変形条件）

均一変形からの分岐問題は、固有値により考察することができる [5]。図-4 は、最小固有値の変化を、最初から 23 step までプロットしたグラフである。updated Lagrange 型の計算（青色）では最小固有値は、最初から減少し、21step で正から負（ほぼゼロの  $-0.089$ ）に転じ、その後急激に増加している。最小固有値がゼロになる所で、均一変形からくびれを有する解に分岐したことがわかる。

それに対して通常の剛塑性計算の最小固有値（赤色）は、減少するが正の値のままゼロにはならず、均一変形を続けていることがわかる。

以上から、剛塑性有限要素法に updated Lagrange 型の定式化による幾何学的非線形解析によって、分岐問題が解析できることがわかる。

## （2）端面固定引張り問題

次に端面固定の引張り変形の計算例を示す。y 軸上端の変位を与える節点では、x 方向固定とする。

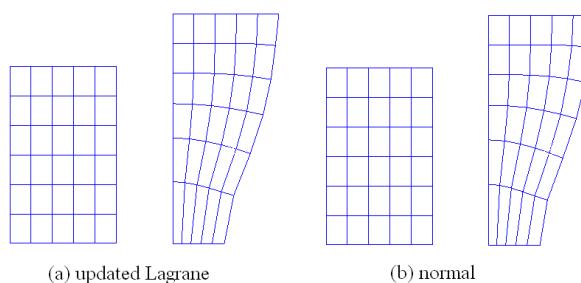


図-5 変形図（端面固定条件, 15 step）

図-5 に、初期形状と、15 step（上端変位 15 mm）の変形後の形状を並べて示す。左側 (a) が updated Lagrange 型、右側 (b) が通常の剛塑性有限要素法によるものである、両者の変形はほぼ同じであり、端面固定が原因のくびれ変形が生じていることがわかる。

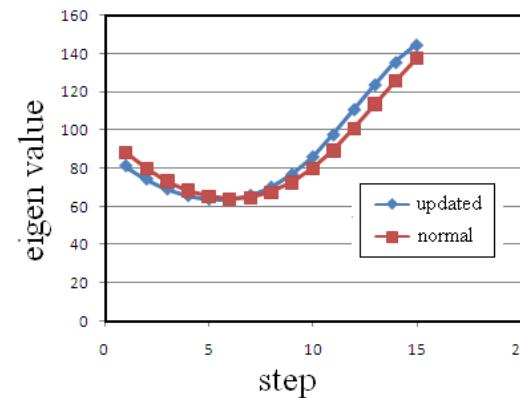


図-6 最小固有値の変化（端面固定条件）

図-6 は、最小固有値の変化を、最初から 15 step までプロットしたグラフである。updated Lagrange 型の計算（青色）と通常の剛塑性計算（赤色）はほぼ同様の変化を示している、すなわち両者とも最小固有値は、最初の値から減少し、7step 付近から増加しているが正のままでゼロにはならない。従ってこの端面固定引張り変形の解析例においては、updated Lagrange 型による幾何学的非線形の影響はほとんどないと言える。

## 6. おわりに

剛塑性有限要素法に updated Lagrange 法の定式化を行い、幾何学的非線形の効果を調べた。

updated Lagrange 法を導入した場合、均一変形条件において最小固有値がゼロになる部分が現れ、くびれが生じる変形が解析された。

端面固定の引張り変形では、updated Lagrange 法の効果はなく、通常の剛塑性有限要素法とほぼ同じ結果が得られた。

## 参考文献

- [1] 小坂田宏造: 応用塑性力学 塑性変形の力学と有限要素解析, 培風館, pp.224-254, 2004.
- [2] 富田佳宏: 数値弾塑性力学 有限要素シミュレーション-基礎と応用, 養賢堂, pp.76-83, 1990.
- [3] 真鍋圭司: 1 次要素による非圧縮性超弾性体の GLS 有限要素解析, Transactions of JSCES, Paper No.20160018, 2016.
- [4] 真鍋圭司: GLS-FEM による非圧縮性超弾性体の座屈解析, 計算工学講演論文集, Vol.22, 2017.
- [5] 真鍋圭司: 逆反復法-固有値解析による有限要素の考察 第2報 弾塑性分岐問題の1次要素による計算, 計算工学講演論文集, Vol.25, 2020.