計算工学講演会論文集 Vol. 30 (2025 年 6 月)　日本計算工学会

混合型FEMとGTNモデルに対する Block Newton 法の適用

Application of Block Newton Method to Mixed FEM and GTN Model

油川英史 1)，進藤海里 2)，松井和己 3)，山田貴博 4)
Hidefumi Yukawa , Kairi Shindo , Kazumi Matsui and Takahiro Yamada

1) 修 (学) 横浜国立大学　大学院環境情報学府（〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7）
2) 横浜国立大学　大学院環境情報学府（〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7, E-mail: shindo-kairi-rb@ynu.jp）
3) 博 (工) 横浜国立大学　大学院環境情報研究院　准教授（〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7, E-mail: kzm@ynu.ac.jp）
4) 博 (学) 横浜国立大学　大学院環境情報研究院　教授（〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7, E-mail: tyamada@ynu.ac.jp）

In elasto-plastic problems, the numerical method, based on the Block Newton method, simultaneously linearizes the equilibrium equation and the yield condition equations. This allows the tangent coefficients for displacements to be constructed algebraically by eliminating internal variables from the linearized coupled problem. As a result, displacements and internal variables can be obtained without using internal iteration. In this study, a numerical method based on the method is applied to the elasto-plastic damage problem employing the GTN model and the mixed finite element method.

Key Words : *Block Newton method, Mixed FEM, GTN model, Elasto-plastic materials*

1. はじめに

材料の非線形性を考慮した構造物の挙動は，構造物の変形と材料の非線形応答から決定される．特に，金属材料など塑性変形を伴う挙動は，つりあい方程式から求まる変位と降伏条件に基づいた塑性変形の進展を表す内部変数によって記述される [1]．したがって，弾塑性問題は物質点におけるつりあい方程式と降伏条件式の連成問題と捉えることができる．

弾塑性問題に対して様々な数値計算手法が提案されており，その中でも弾性予測子と塑性修正子に基づくリターンマッピングアルゴリズムは幅広く利用されている．リターンマッピングアルゴリズムを適用する場合，塑性変形の進展を考慮せずに変位の修正量を算出し，内部変数の更新によって応力状態を修正するため，内部反復が生じる．また，その際に応力積分アルゴリズムに整合する接線係数（consistent tangent）を導出すれば 2 次の収束性が得られると報告されている [2]．しかしながら，その解析的な導出は容易ではなく，特に材料構成則が複雑になればほぼ不可能になる．

それに対し，本研究で採用する Block Newton 法に基づく数値計算手法 [3,4] は，つりあい方程式と降伏条件式を同時に線形化することで内部反復を用いることなく変位と内部変数を求められる手法である．また，接線係数を代数的に構築できるので，リターンマッピングアルゴリズムにおける複雑な材料構成則の微分を解析的に導出する必要がなくなるという特徴がある．

本研究では，GTN モデルを採用した弾塑性損傷モデルと混合型有限要素法に対して Block Newton 法を適用する．

2. BlockNewton 法による有限要素解析

本研究では損傷が進展する弾塑性問題をつりあい方程式と積分点における拘束条件式の連成問題と捉える．ここでは，弾塑性損傷モデルとして GTN モデル [5,6,7] を，また材料の終局状態で生じる体積ロッキングを回避するために，Simo によって開発された 3 変数場の Hu-Washizu 変分原理に基づく混合型有限要素法 [8] をそれぞれ採用する．

変位ベクトル $\boldsymbol{u}$，要素の圧力 $\bar{\boldsymbol{p}}$ および体積ひずみ $\boldsymbol{\theta}$ と，塑性パラメータ γ，物質点における静水圧応力 p，損傷変数 f，硬化係数 α で構成される内部変数ベクトル $\boldsymbol{q}$ の関数とし 3 変数の Hu-Washizu 原理から導出されるつり合い式 h_u，変位-体積ひずみ関係式 $h_{\bar{p}}$，圧力-体積ひずみ関係式 h_θ はそれぞれ

$$h_u(\boldsymbol{u},\bar{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{q}) = \int_\Omega \operatorname{dev}\boldsymbol{\sigma} : \nabla\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V + \int_\Omega \bar{\boldsymbol{p}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V - \boldsymbol{G} = 0 \tag{1}$$

$$h_{\bar{p}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{q}) = \int_\Omega q\,(\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\theta})\,\mathrm{d}V = 0 \tag{2}$$

$$h_{\boldsymbol{\theta}}(\bar{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{q}) = \int_\Omega e\left[-\bar{\boldsymbol{p}} + \frac{1}{3}\operatorname{tr}\left(\left.\frac{\partial\bar{W}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\bar{\nabla}^s\boldsymbol{u}}\right)\right]\mathrm{d}V = 0 \tag{3}$$

となる．ここで引数は求めるべき変数（$\boldsymbol{u},\bar{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{q}$）と仮想変位ベクトル $\boldsymbol{v}$ を区別して表記し，σ は応力テンソル，G は外力ベクトルである．

GTN モデルを用いた弾塑性損傷問題は時刻 $n+1$ における積分点での応力に対する拘束条件式として，圧

力の更新式 $g_p(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{q})$，降伏条件式 $g_\phi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q})$，硬化係数の発展式 $g_\alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{q})$，損傷の発展式 $g_\alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{q})$ を満たす必要がある．

$$g_p(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{q}) = p_{n+1} - K\theta^{\mathrm{trial}}_{n+1} + K\Delta\gamma \left.\frac{\partial\phi}{\partial p}\right|_{n+1} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} g_\phi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}) = {} & \frac{1}{(1+6G\Delta\gamma_{n+1})^2}\sigma^{\mathrm{trial}\,2}_{e,n+1} \\ & + \left\{2f_{n+1}q_1\cosh\left(\frac{3q_2p_{n+1}}{2\sigma_y(\alpha_{n+1})}\right)\right. \\ & \left. - \left(1+q_3f^2_{n+1}\right)\right\}\sigma_y(\alpha_{n+1})^2 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} g_\alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{q}) = {} & \frac{\Delta\gamma}{(1-f_{n+1})\sigma_y(\alpha_{n+1})}\left\{K\left(\theta^{\mathrm{trial}}_{n+1}\right.\right. \\ & \left. - \Delta\gamma \left.\frac{\partial\phi}{\partial p}\right|_{n+1}\right) \left.\frac{\partial\phi}{\partial p}\right|_{n+1} \\ & \left. + \sigma_{e,n+1} \left.\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_e}\right|_{n+1}\right\} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} g_f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{q}) = {} & f_{n+1} - f_n - (1-f_{n+1})\Delta\gamma \left.\frac{\partial\phi}{\partial p}\right|_{n+1} \\ & + \frac{A(\alpha_{n+1})\Delta\gamma}{(1-f_{n+1})\sigma_y(\alpha_{n+1})}\left\{K\left(\theta^{\mathrm{trial}}_{n+1}\right.\right. \\ & \left. - \Delta\gamma \left.\frac{\partial\phi}{\partial p}\right|_{n+1}\right) \left.\frac{\partial\phi}{\partial p}\right|_{n+1} \\ & \left. + \sigma_{e,n+1} \left.\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_e}\right|_{n+1}\right\} \end{aligned} \tag{7}$$

ここで，σ_y は降伏応力，σ_e は相当応力，K は体積弾性率，q_1，q_2，q_3 は GTN モデルのパラメータである．また，ϕ は降伏関数，A はボイドの核生成に関する値で以下で記述される．

$$\phi = \sigma_e^2 + \sigma_y^2\left\{2fq_1\cosh\left(\frac{3q_2p}{2\sigma_y}\right) - 1 - q_3f^2\right\} \tag{8}$$

$$A = \frac{f_N}{S_N\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\alpha}-\boldsymbol{\varepsilon}_N}{S_N}\right)^2\right) \tag{9}$$

ε_N，f_N，S_N は GTN モデルのパラメータである．

準静的問題に対してつり合い経路に依存しない数値解を得るために，ひとつ前のつり合い状態から反復までの解の増分量を評価し，Newton-Raphson 法を採用する．仮想的な時間ステップ $[t_n, t_{n+1}]$ において，時刻 t_{n+1} での変位 $\boldsymbol{u}$，圧力 $\bar{\boldsymbol{p}}$，体積ひずみ $\boldsymbol{\theta}$，内部変数ベクトル $\boldsymbol{q}$ は

$$\boldsymbol{u}^{(i+1)}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + \Delta\boldsymbol{u}^{(i+1)} \tag{10}$$

$$\bar{\boldsymbol{p}}^{(i+1)}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{p}}_n + \Delta\bar{\boldsymbol{p}}^{(i+1)} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}_{n+1} = \boldsymbol{\theta}_n + \Delta\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{q}^{(i+1)}_{n+1} = \boldsymbol{q}_n + \Delta\boldsymbol{q}^{(i+1)} \tag{13}$$

と表現される．

ここで括弧内の上付き文字は反復回数を表し，$\boldsymbol{u}_n$，$\bar{\boldsymbol{p}}_n$,$\boldsymbol{\theta}_n$, $\boldsymbol{q}_n$ は 1 つ前のつり合い状態（時刻 t_n）における変位ベクトル，圧力，体積ひずみ，内部変数ベクトルであり，$\Delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}$,$\Delta\bar{\boldsymbol{p}}^{(i+1)}$，$\Delta\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}$，$\Delta\boldsymbol{q}^{(i+1)}$ は 1 つ前のつり合い状態（時刻 t_n）から $(i+1)$ 回目の反復までの増分量を意味する．Newton-Raphson 法では，$(i+1)$ 回目の反復までの増分量 ($\Delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}$,$\Delta\bar{\boldsymbol{p}}^{(i+1)}$，$\Delta\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}$，$\Delta\boldsymbol{q}^{(i+1)}$) が i 回目の反復までの増分量と $(i+1)$ 回目の修正量 ($\delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}, \delta\bar{\boldsymbol{p}}^{(i+1)}, \delta\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}, \delta\boldsymbol{q}^{(i+1)}$) の合計として，

$$\Delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}_{n+1} = \Delta\boldsymbol{u}^{(i)} + \delta\boldsymbol{u}^{(i+1)} \tag{14}$$

$$\Delta\bar{\boldsymbol{p}}^{(i+1)}_{n+1} = \Delta\bar{\boldsymbol{p}}^{(i)} + \delta\bar{\boldsymbol{p}}^{(i+1)} \tag{15}$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}_{n+1} = \Delta\boldsymbol{\theta}^{(i)} + \delta\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} \tag{16}$$

$$\Delta\boldsymbol{q}^{(i+1)}_{n+1} = \Delta\boldsymbol{q}^{(i)} + \delta\boldsymbol{q}^{(i+1)} \tag{17}$$

と表される．Newton–Raphson 法による i 回目から $(i+1)$ 回目までの反復において，時刻 t_{n+1} でのつり合い式，変位-体積ひずみ関係式，圧力-体積ひずみ関係式，制約条件式は $\delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}, \delta\bar{\boldsymbol{p}}^{(i+1)}, \delta\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}, \delta\boldsymbol{q}^{(i+1)}$ に対する方向微分を用いて線形化される．したがって，塑性変形と損傷が進展する i 回目の反復でつり合い状態，制約条件が満足されない状況において，修正量 $\delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}, \delta\bar{\boldsymbol{p}}^{(i+1)}, \delta\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}, \delta\boldsymbol{q}^{(i+1)}$ を算出する連成問題は

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{h_u}}{\partial \boldsymbol{u}}^{(i)} & \frac{\partial \boldsymbol{h_u}}{\partial \bar{\boldsymbol{p}}}^{(i)} & \frac{\partial \boldsymbol{h_u}}{\partial \boldsymbol{\theta}}^{(i)} & \frac{\partial \boldsymbol{h_u}}{\partial \boldsymbol{q}}^{(i)} \\ \frac{\partial \boldsymbol{h_{\bar{p}}}}{\partial \boldsymbol{u}}^{(i)} & \frac{\partial \boldsymbol{h_{\bar{p}}}}{\partial \bar{\boldsymbol{p}}}^{(i)} & \frac{\partial \boldsymbol{h_{\bar{p}}}}{\partial \boldsymbol{\theta}}^{(i)} & \frac{\partial \boldsymbol{h_{\bar{p}}}}{\partial \boldsymbol{q}}^{(i)} \\ \frac{\partial \boldsymbol{h_\theta}}{\partial \boldsymbol{u}}^{(i)} & \frac{\partial \boldsymbol{h_\theta}}{\partial \bar{\boldsymbol{p}}}^{(i)} & \frac{\partial \boldsymbol{h_\theta}}{\partial \boldsymbol{\theta}}^{(i)} & \frac{\partial \boldsymbol{h_\theta}}{\partial \boldsymbol{q}}^{(i)} \\ \frac{\partial \boldsymbol{g_s}}{\partial \boldsymbol{u}}^{(i)} & \frac{\partial \boldsymbol{g_s}}{\partial \bar{\boldsymbol{p}}}^{(i)} & \frac{\partial \boldsymbol{g_s}}{\partial \boldsymbol{\theta}}^{(i)} & \frac{\partial \boldsymbol{g_s}}{\partial \boldsymbol{q}}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{u}^{(i+1)} \\ \delta\bar{\boldsymbol{p}}^{(i+1)} \\ \delta\boldsymbol{\theta}^{(i+1)} \\ \delta\boldsymbol{q}^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}^{(i)}_{\boldsymbol{u}} \\ \boldsymbol{h}^{(i)}_{\bar{\boldsymbol{p}}} \\ \boldsymbol{h}^{(i)}_{\boldsymbol{\theta}} \\ \boldsymbol{g}^{(i)}_{\boldsymbol{s}} \end{bmatrix} \tag{18}$$

と定義できる．ここで，右辺の $\boldsymbol{h_u}$，$\boldsymbol{h_{\bar{p}}}$，$\boldsymbol{h_\theta}$，$\boldsymbol{g_s}$ はそれぞれつり合い式，変位-体積ひずみ関係式，圧力-体積ひずみ関係式，物質点における制約条件式の残差である．

リターンマッピング法では物質点において制約条件式の連立方程式を解くための内部反復が必要となる．それに対して，本研究ではつり合い式，変位-体積ひずみ関係式，圧力-体積ひずみ関係式，物質点における制約条件式の残差を同時に減少させる全体に対する反復のみを実行するアルゴリズムを提案する．

3. 有限要素離散化

つり合い式，変位-体積ひずみ関係式，圧力-体積ひずみ関係式，物質点における制約条件式の連成問題に対する離散化方程式は，剛性行列，変位ベクトル $\mathbf{U}$，圧力ベクトル $\bar{\mathbf{P}}$，体積ひずみベクトル $\boldsymbol{\Theta}$，内部変数ベクトル $\mathbf{Q} = \{Q_p, Q_g, Q_\alpha, Q_f\}^T$（圧力 Q_p，塑性パラメータ Q_g，硬化係数 Q_α，損傷変数 Q_f），残差ベクトル $\mathbf{R}_{h_u}$，

残差ベクトル $\mathbf{R}_{h_p}$，残差ベクトル $\mathbf{R}_{h_\theta}$，残差ベクトル $\mathbf{R}_s=\{R_{g_p},R_{g_\phi},R_{g_\alpha},R_{g_f}\}^T$（圧力の更新式に対する残差 R_{g_p}，降伏条件式に対する残差 R_{g_ϕ}，硬化係数発展則に対する残差 R_{g_α}，損傷変数発展則に対する残差 R_{g_f}）を用いて，

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K_{UU}} & \mathbf{K_{U\bar{P}}} & \mathbf{K_{U\Theta}} & \mathbf{K_{UQ}} \\ \mathbf{K_{\bar{P}U}} & \mathbf{K_{\bar{P}\bar{P}}} & \mathbf{K_{\bar{P}\Theta}} & \mathbf{K_{\bar{P}Q}} \\ \mathbf{K_{\Theta U}} & \mathbf{K_{\Theta\bar{P}}} & \mathbf{K_{\Theta\Theta}} & \mathbf{K_{\Theta Q}} \\ \mathbf{K_{QU}} & \mathbf{K_{Q\bar{P}}} & \mathbf{K_{Q\Theta}} & \mathbf{K_{QQ}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \bar{\mathbf{P}} \\ \boldsymbol{\Theta} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{h_u} \\ \mathbf{R}_{h_{\bar{p}}} \\ \mathbf{R}_{h_\theta} \\ \mathbf{R}_s \end{bmatrix} \tag{19}$$

と書ける．ここで，残差ベクトル $\mathbf{R}_{h_u}$，$\mathbf{R}_{h_{\bar{p}}}$，$\mathbf{R}_{h_\theta}$ および $\mathbf{R}_s$ は，

$$\mathbf{R}_{h_u} = \sum_{e=1}^{n_{el}} (\mathbf{r}_{h_u}) \tag{20}$$

$$\mathbf{R}_{h_{\bar{p}}} = \sum_{e=1}^{n_{el}} (\mathbf{r}_{h_{\bar{p}}}) \tag{21}$$

$$\mathbf{R}_{h_\theta} = \sum_{e=1}^{n_{el}} (\mathbf{r}_{h_\theta}) \tag{22}$$

$$\mathbf{R}_s = \left[[\mathbf{r}_s]_{e=1} \cdots [\mathbf{r}_s]_{e=n_{el}} \right]^T \tag{23}$$

と表せる．

本研究では圧力と体積ひずみは要素間不連続で要素内で一定であるとして離散化し，Block Newton 法を適用する．Block Newton 法は厳密な Newton 法に基づいているため，局所的な 2 次収束性が実現できる．また，1 回の全体反復に対して応力の更新および接線係数の構築が 1 度ずつとなる．更に，計算上の利点である剛性行列のスパース性が保持される．

内部変数は変位と独立であるため，物質点に対する拘束条件式 を用いて，つり合い式，変位-体積ひずみ関係式，圧力-体積ひずみ関係式から内部変数を消去できる．各積分点での縮約を要素ごとの縮約と表現できる．混合型有限要素法から導出した式 (1) ～ (3) を離散化し，内部変数を消去すると以下の式が得られる．

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{k_{uu}} - \mathbf{k_{uq}}\mathbf{k_{qq}}^{-1}\mathbf{k_{qu}}\right)\delta\boldsymbol{u} + \mathbf{k_{u\bar{p}}}\delta\bar{\boldsymbol{p}} + \mathbf{k_{uq}}\mathbf{k_{qq}}^{-1}\mathbf{k}_{\mathbf{q}\boldsymbol{\theta}}\delta\boldsymbol{\theta} \\ &= \mathbf{r_u} - \mathbf{k_{uq}}\mathbf{k_{qq}}^{-1}\mathbf{r_s} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\mathbf{k_{\bar{p}u}}\delta\boldsymbol{u} + \mathbf{k}_{\bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\theta}}\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{r_{\bar{p}}} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &-\mathbf{k}_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{q}}\mathbf{k_{qq}}^{-1}\mathbf{k_{qu}}\delta\boldsymbol{u} + \mathbf{k}_{\boldsymbol{\theta}\bar{\boldsymbol{p}}}\delta\bar{\boldsymbol{p}} + \left(\mathbf{k}_{\boldsymbol{\theta\theta}} - \mathbf{k}_{\boldsymbol{\theta}\mathbf{q}}\mathbf{k_{qq}}^{-1}\mathbf{k}_{\boldsymbol{q\theta}}\right)\delta\boldsymbol{\theta} \\ &= \mathbf{r}_{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{k}_{\boldsymbol{\theta}\mathbf{q}}\mathbf{k_{qq}}^{-1}\mathbf{r_s} \end{aligned} \tag{26}$$

ここで，剛性行列および残差ベクトルは以下のように表される．

$$\begin{aligned} \mathbf{k_{uu}} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{dev}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B}\, \mathrm{d}\Omega \\ &= \sum_{j=1}^{n_{\mathrm{gi}}} w_{\langle j \rangle} \mathbf{B}_{\langle j \rangle}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{dev}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{\langle j \rangle} \mathbf{B}_{\langle j \rangle} \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k_{uq}} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{dev}}}{\partial p} & \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{dev}}}{\partial \gamma} & \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{dev}}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{dev}}}{\partial f} \end{bmatrix} \right\} \mathrm{d}\Omega \\ &= \sum_{j=1}^{n_{\mathrm{gi}}} w_{\langle j \rangle} \mathbf{B}_{\langle j \rangle}^{\mathrm{T}} \left\{ \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{dev}}}{\partial p}\right)_{\langle j \rangle} & \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{dev}}}{\partial \gamma}\right)_{\langle j \rangle} & \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{dev}}}{\partial \alpha}\right)_{\langle j \rangle} & \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{dev}}}{\partial f}\right)_{\langle j \rangle} \end{bmatrix} \right\} \mathbf{B}_{\langle j \rangle} \end{aligned} \tag{28}$$

$$\mathbf{k_{qq}} = \left\{ \mathrm{DIAG} \left(\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_p}{\partial p}\right)_{\langle j \rangle} & \left(\frac{\partial g_p}{\partial \gamma}\right)_{\langle j \rangle} & \left(\frac{\partial g_p}{\partial \alpha}\right)_{\langle j \rangle} & \left(\frac{\partial g_p}{\partial f}\right)_{\langle j \rangle} \\ \left(\frac{\partial g_\phi}{\partial p}\right)_{\langle j \rangle} & \left(\frac{\partial g_\phi}{\partial \gamma}\right)_{\langle j \rangle} & \left(\frac{\partial g_\phi}{\partial \alpha}\right)_{\langle j \rangle} & \left(\frac{\partial g_\phi}{\partial f}\right)_{\langle j \rangle} \\ \left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial p}\right)_{\langle j \rangle} & \left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial \gamma}\right)_{\langle j \rangle} & \left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial \alpha}\right)_{\langle j \rangle} & \left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial f}\right)_{\langle j \rangle} \\ \left(\frac{\partial g_f}{\partial p}\right)_{\langle j \rangle} & \left(\frac{\partial g_f}{\partial \gamma}\right)_{\langle j \rangle} & \left(\frac{\partial g_f}{\partial \alpha}\right)_{\langle j \rangle} & \left(\frac{\partial g_f}{\partial f}\right)_{\langle j \rangle} \end{bmatrix} \right) \right\} \tag{29}$$

$$\mathbf{k_{qu}} = \left\{ \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)_{\langle j \rangle} \\ \left(\frac{\partial g_\phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)_{\langle j \rangle} \\ \left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)_{\langle j \rangle} \\ \left(\frac{\partial g_f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)_{\langle j \rangle} \end{bmatrix} \right\} \tag{30}$$

$$\mathbf{k_{\bar{p}u}} = \mathbf{k_{u\bar{p}}} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{1}\, \mathrm{d}\Omega = \sum_{j=1}^{n_{\mathrm{gi}}} w_{\langle j \rangle} \mathbf{B}_{\langle j \rangle}^{\mathrm{T}} \mathbf{1} \tag{31}$$

$$\mathbf{k}_{\bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{k}_{\boldsymbol{\theta}\bar{\boldsymbol{p}}} = \int_{\Omega_e} -\mathbf{1}\, \mathrm{d}\Omega = \sum_{j=1}^{n_{\mathrm{gi}}} -w_{\langle j \rangle} \tag{32}$$

$$\mathbf{k}_{\boldsymbol{\theta\theta}} = \int_{\Omega_e} K\, \mathrm{d}\Omega = \sum_{j=1}^{n_{\mathrm{gi}}} K\, w_{\langle j \rangle} \tag{33}$$

$$\mathbf{k}_{\boldsymbol{q\theta}} = \left\{ \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_p}{\partial \theta}\right)_{\langle j \rangle} \\ \left(\frac{\partial g_\phi}{\partial \theta}\right)_{\langle j \rangle} \\ \left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial \theta}\right)_{\langle j \rangle} \\ \left(\frac{\partial g_f}{\partial \theta}\right)_{\langle j \rangle} \end{bmatrix} \right\}^{\mathrm{T}} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\boldsymbol{\theta q}} &= \int_{\Omega_e} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} K \Delta\gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} \\ -\frac{1}{3} K \frac{\partial \phi}{\partial p} \\ -\frac{1}{3} K \Delta\gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial p \partial \sigma_y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \alpha} \\ -\frac{1}{3} K \Delta\gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial p \partial f} \end{bmatrix} \right\} \mathrm{d}\Omega \\ &= \sum_{j=1}^{n_{\mathrm{gi}}} w_{\langle j \rangle} \left\{ \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{3} K \Delta\gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2}\right)_{\langle j \rangle} \\ \left(-\frac{1}{3} K \frac{\partial \phi}{\partial p}\right)_{\langle j \rangle} \\ \left(-\frac{1}{3} K \Delta\gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial p \partial \sigma_y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \alpha}\right)_{\langle j \rangle} \\ \left(-\frac{1}{3} K \Delta\gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial p \partial f}\right)_{\langle j \rangle} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{35}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r_u} &= -\mathbf{f} + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{dev}}\, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_e} \bar{p}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{1}\, \mathrm{d}\Omega \\
&= -\mathbf{f} + \sum_{j=1}^{n_{\mathrm{gi}}} w_{\langle j \rangle} \left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}_{\langle j \rangle} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{dev}\langle j \rangle} + \bar{p}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}_{\langle j \rangle}\mathbf{1} \right)
\end{aligned}
\tag{36}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\bar{\mathbf{p}}} &= \int_{\Omega_e} \left((\mathbf{BU})_{\mathrm{vol}} - \theta \right) \mathrm{d}\Omega \\
&= \sum_{j=1}^{n_{\mathrm{gi}}} w_{\langle j \rangle} \left((\mathbf{BU})_{\mathrm{vol}\,\langle j \rangle} - \theta \right)
\end{aligned}
\tag{37}
$$

$$
\mathbf{r}_{\theta} = \int_{\Omega_e} (-\bar{p} + K\theta)\, \mathrm{d}\Omega = \sum_{j=1}^{n_{\mathrm{gi}}} w_{\langle j \rangle} (-\bar{p} + K\theta) \tag{38}
$$

$$
\mathbf{r}_s = \left\{ \begin{bmatrix} (r_p)_{\langle j \rangle} \\ (r_\phi)_{\langle j \rangle} \\ (r_\alpha)_{\langle j \rangle} \\ (r_f)_{\langle j \rangle} \end{bmatrix} \right\} \tag{39}
$$

ただし，$\mathbf{k_{uu}}, \mathbf{k_{uq}}, \mathbf{k_{qu}}, \mathbf{k_{qq}}, \mathbf{k_{\bar{p}u}}, \mathbf{k_{u\bar{p}}}, \mathbf{k}_{\bar{p}\theta}, \mathbf{k}_{\theta\bar{p}}, \mathbf{k}_{\theta\theta}, \mathbf{k}_{q\theta}$ は剛性行列，$\mathbf{r_u}, \mathbf{r_{\bar{p}}}, \mathbf{r}_{\theta}, \mathbf{r_s}$ は残差ベクトル，$\mathbf{B}$ は変位ひずみ行列を表す．$\mathbf{f}$ は節点自由度に対応する外力ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{dev}}$ は応力の偏差成分のベクトル形式，$\mathbf{r_s}$ は 1 つ前の反復での圧力の更新式，降伏条件式，硬化係数発展則，損傷変数発展則に対する残差ベクトルである．山括弧内の下付き文字は要素内の j 番目のガウス積分点で評価される物理量，$w_{<j>}$ は重み関数を意味する．

4. 接線剛性行列と残差ベクトルの導出

本研究では，変位，圧力および体積ひずみを独立変数としており，圧力と体積ひずみについて要素間で不連続な補間関数を用いているので全体変数が節点変位のみとなる形式に静的縮約できる．式 (26) を用いて式 (24)，式 (25) から体積ひずみの修正量 $\delta\boldsymbol{\theta}$ を消去したのち，圧力の修正量 $\delta\bar{\boldsymbol{p}}$ を消去すると変位の修正量 $\delta\boldsymbol{u}$ に対して縮退することができる．

その結果，要素領域 Ω_e における要素剛性行列 $\mathbf{k}$ と要素残差ベクトル $\mathbf{r}$ は，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k} = \mathbf{k_{uu}} &- \mathbf{k_{uq}}\mathbf{k_{qq}}^{-1}\mathbf{k_{qu}} + \mathbf{k_{uq}}\mathbf{k_{qq}}^{-1}\mathbf{k_{qu}}\mathbf{k}_{\bar{p}\theta}^{-1}\mathbf{k_{\bar{p}u}} \\
&+ \mathbf{k_{u\bar{p}}}\mathbf{k}_{\theta\bar{p}}^{-1}(\mathbf{k}_{\theta\theta} - \mathbf{k}_{\theta q}\mathbf{k_{qq}}^{-1}\mathbf{k}_{q\theta})\mathbf{k}_{\bar{p}\theta}^{-1}\mathbf{k_{\bar{p}u}} \\
&+ \mathbf{k_{u\bar{p}}}\mathbf{k}_{\theta\bar{p}}^{-1}\mathbf{k}_{\theta q}\mathbf{k_{qq}}^{-1}\mathbf{k_{qu}}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} = \mathbf{r}_u &- \mathbf{k_{uq}}\mathbf{k_{qq}}^{-1}\mathbf{r_q} + \mathbf{k_{u\bar{p}}}\mathbf{k}_{\theta\bar{p}}^{-1}\mathbf{k}_{\theta q}\mathbf{k_{qq}}^{-1}\mathbf{r_q} \\
&+ \mathbf{k_{u\bar{p}}}\mathbf{k}_{\theta\bar{p}}^{-1}(\mathbf{k}_{\theta\theta} - \mathbf{k}_{\theta q}\mathbf{k_{qq}}^{-1}\mathbf{k}_{q\theta})\mathbf{k}_{\bar{p}\theta}^{-1}\mathbf{r_{\bar{p}}} \\
&+ \mathbf{k_{uq}}\mathbf{k_{qq}}^{-1}\mathbf{k_{qu}}\mathbf{k}_{\bar{p}\theta}^{-1}\mathbf{r_{\bar{p}}} - \mathbf{k_{u\bar{p}}}\mathbf{k}_{\theta\bar{p}}^{-1}\mathbf{r}_{\theta}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

と代数的に得られる．従来のコンシステント接線係数の導出は定式化の段階で内部変数を消去しているが，本研究の手法は内部変数の消去を代数的に行っており，各変数に関する微分のみを求めればよい．

要素レベルで内部変数，圧力，体積ひずみをブロック消去すると，つり合い方程式の増分形式に対する離散化方程式は全体剛性行列 $\mathbf{K}$，全体変位ベクトル $\mathbf{U}$，全体残差ベクトル $\mathbf{R}$ を用いて，

$$
\mathbf{KU} = \mathbf{R} \tag{42}
$$

と表現でき，

$$
\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{A}(\mathbf{k}) \tag{43}
$$

$$
\mathbf{R} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{44}
$$

と構築される．

5. おわりに

本研究では，GTN モデルを採用した弾塑性損傷問題をつりあい方程式と積分点における拘束条件式の連成問題として捉え，Block Newton 法を適用した．また，３変数の混合型有限要素法を採用したが，内部変数を消去し，さらに変位に対して縮約を行うことにより，変位型有限要素法と同様に変位に対する接線係数を代数的に導出し，内部反復を用いずに内部変数も代数的に更新されるアルゴリズムを構築できた．

参考文献

[1] E.A.de Souza Neto, D. Peric, D.R.J. Owen, 寺田賢二郎 監訳: 非線形有限要素法 -弾塑性解析の理論と実践-, 森北出版, 2012.

[2] J.C. Simo, R.L. Taylor, Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol.48, pp.101-118, 1985.

[3] T. Yamamoto, T. Yamada and K. Matsui, Simultaneously iterative procedure based on block Newton method for elastoplastic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.122, pp.2145-2178, 2021.

[4] 山本剛大, 山田貴博, 松井和己, Block Newton 法による接線係数を代数的に導出した弾塑性損傷解析. 日本機械学会論文集, Vol.90, pp.24-42, 2024.

[5] A. L. Gurson, Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part 1-Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol.99, pp.2-15, 1977.

[6] A. Needleman, Void nucleation effects in biaxially stretched sheets, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol.102, pp.249-256, 1980.

[7] V. Tvergaard, On localization in ductile material containing spherical void, *International Journal of Fracture*, Vol.18, pp.237-252, 1982.

[8] J.C. Simo, R.L. Taylor, Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol.51, pp.177-208, 1985.