計算工学講演会論文集 Vol. 30 (2025 年 6 月)　日本計算工学会

Block Newton 法による接線係数の代数的導出を用いた弾塑性損傷解析

Elastoplastic damage analysis using algebraic derivation of consistent tangent by block Newton method

山本剛大 1) 山田貴博 2) 松井和己 3)
Takeki Yamamoto, Takahiro Yamada, and Kazumi Matsui

1)博 (工) 茨城大学 学術研究院応用理工学野 講師（〒 316-8511 茨城県日立市中成沢町 4-21-1)
takeki.yamamoto.ph71@vc.ibaraki.ac.jp
2)学博 横浜国立大学 大学院環境情報研究院 教授（〒 240-8501 神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7）
3)博 (工) 横浜国立大学 大学院環境情報研究院 准教授（〒 240-8501 神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7）

The simultaneously iterative procedure for elastic-plastic boundary value problems presented by the authors is applied to elastoplastic problems with damage. The authors formulate elastoplastic problems with damage as a coupled problem of the weak form of the equilibrium equation, the yield equations, and the damage evolution equations, and propose a numerical procedure based on the block Newton method to solve them with simultaneous linearization. The proposed scheme can be implemented in the conventional displacement method without local iterative calculations.

Key Words : *Block Newton Method, Elastoplasticity, Lemaitre damage model, Small strains*

1. 序論

機械部品や構造部材に対して，使用寿命は設計段階での重要な情報となる．そのため，寿命や破壊を調査する実験に加えて，それらを予測するための数値計算の活用が不可欠となっている．

材料の寿命や破壊を表現するための概念として損傷が導入され，損傷と破壊の進行過程を解析する連続体損傷力学 [1] に基づく損傷モデルがいくつか提案されている [2,3]．それらの損傷モデルを組み込んだ弾塑性解析では，数値計算の収束性・安定性・収束速度の観点から時間積分に後退差分を適用することが多く，応力積分アルゴリズムに整合する接線係数（consistent tangent）の導出により２次の収束性が得られると報告されている [4]．弾塑性材料に対して，return mapping アルゴリズム [5] のような内部反復を前提とする手法は，材料の非線形挙動（塑性変形など）の進展を考慮せずに変位を修正し，つりあい状態でない暫定的な降伏局面に応力を引き戻すように内部変数が更新され，内部変数の更新によって修正された応力状態がつりあい方程式を満足すると，変位はそれ以降修正されない．したがって，つりあい方程式を満たす応力状態が内部変数に大きく依存する可能性がある．さらに，損傷モデルのような構成則を扱う場合，consistent tangent の導出が非常に複雑となり，その解析的な導出が困難となる [6]．数値計算の収束速度を改善するために，Braudel et al.[7] は仮想仕事の原理と構成則を組み合わせた連立方程式を提案し，それを解く際に Newton–Schur 法が採用されている．Newton–Schur 法は仮想仕事の原理と構成則の連立方程式から内部変数を縮約し，構成則に対する残差が力のつりあい式に組み込まれるため，縮約を活用した手法と位置づけられる．

損傷を考慮した弾塑性問題に対する数値計算手法はいくつか提案されているが，内部反復を用いず，接線係数を解析的に導出する必要がない手法は見当たらない．著者らは弾塑性問題に対して，つりあい方程式と応力に対する制約条件式の連成問題を定義し，Block Newton 法に基づく数値計算手法を開発した [8,9]．本研究では，その考え方を損傷が進展する弾塑性問題に応用し，仮想仕事式・降伏条件式・損傷発展式の連成問題を同時に線形化することで，内部反復のない数値計算手法を提案する [10]．本稿では，線形化した連成問題から内部変数を消去することで接線係数が代数的に構築できる定式化を示す．

2. 弾塑性損傷解析

(1) 連成問題

本研究では，Lemaitre の延性損傷モデル [3] を扱う．損傷が進展する弾塑性問題は，つりあい方程式・降伏条件式・損傷発展式の連成問題と捉えられ，有限要素離散化に結びつけると，仮想仕事式・降伏条件式・損傷発展式の連成問題は，変位ベクトル $\boldsymbol{u}$，塑性パラメータ γ と損傷パラメータ D で構成される内部変数ベクトル $\boldsymbol{q}$ の関数として，

$$R_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q};\boldsymbol{v}) = 0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

と定義できる．ここで，R_{f}，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}$ は仮想仕事式と制約条件式（降伏条件式と損傷発展式）に対する残差，$\boldsymbol{v}$ は仮想変位ベクトルを表す．

準静的問題に対して，ひとつ前のつりあい状態からの

解の増分量を評価し，Newton–Raphson 法を採用する．時間ステップ $[t_n, t_{n+1}]$ において，時刻 t_{n+1} での変位ベクトル $\boldsymbol{u}$，内部変数ベクトル $\boldsymbol{q}$ は，

$$\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i+1)} = \boldsymbol{u}_n + \Delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}, \quad \boldsymbol{q}_{n+1}^{(i+1)} = \boldsymbol{q}_n + \Delta\boldsymbol{q}^{(i+1)} \tag{3}$$

と表される．ここで，括弧内の上付き文字は反復回数，下付き文字は時間ステップを表し，$\boldsymbol{u}_n$，$\boldsymbol{q}_n$ はひとつ前のつりあい状態（時刻 t_n）での変位ベクトル，内部変数ベクトルであり，$\Delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}$，$\Delta\boldsymbol{q}^{(i+1)}$ はひとつ前のつりあい状態（時刻 t_n）から $(i+1)$ 回目の反復までの増分量を意味する．Newton–Raphson 法では，$(i+1)$ 回目の反復までの増分量（$\Delta\boldsymbol{u}$，$\Delta\boldsymbol{q}$）が i 回目までの増分量と $(i+1)$ 回目の修正量（$\delta\boldsymbol{u}$，$\delta\boldsymbol{q}$）の合計として，

$$\Delta\boldsymbol{u}^{(i+1)} = \Delta\boldsymbol{u}^{(i)} + \delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}, \quad \Delta\boldsymbol{q}^{(i+1)} = \Delta\boldsymbol{q}^{(i)} + \delta\boldsymbol{q}^{(i+1)} \tag{4}$$

と表現される．Newton–Raphson 法での i 回目から $(i+1)$ 回目までの反復において修正量 $\delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}$，$\delta\boldsymbol{q}^{(i+1)}$ を求める連成問題は，仮想仕事式 R_{f}，拘束条件式 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}$ を用いて，

$$R_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i+1)}, \boldsymbol{q}_{n+1}^{(i+1)}; \boldsymbol{v}) = 0 \tag{5}$$

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i+1)}, \boldsymbol{q}_{n+1}^{(i+1)}) = \boldsymbol{0} \tag{6}$$

と定義される．

(2) Block Newton 法

連成問題 (5)，(6) を線形化すると，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial R_{\mathrm{f}}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{q}_{n+1}^{(i)}; \boldsymbol{v}) & \dfrac{\partial R_{\mathrm{f}}}{\partial \boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{q}_{n+1}^{(i)}; \boldsymbol{v}) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{q}_{n+1}^{(i)}) & \dfrac{\partial \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}}{\partial \boldsymbol{q}}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{q}_{n+1}^{(i)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{u}^{(i+1)} \\ \delta\boldsymbol{q}^{(i+1)} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} R_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{q}_{n+1}^{(i)}; \boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}(\boldsymbol{u}_{n+1}^{(i)}, \boldsymbol{q}_{n+1}^{(i)}) \end{Bmatrix} \tag{7}$$

と表され，Newton 法を採用する．内部変数ベクトルの修正量 $\delta\boldsymbol{q}^{(i+1)}$ は変位ベクトルの修正量 $\delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}$ と独立であるため，連立方程式 (7) に静的縮約を適用する．したがって，内部変数ベクトルの修正量 $\delta\boldsymbol{q}^{(i+1)}$ は，

$$\delta\boldsymbol{q}^{(i+1)} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}}{\partial \boldsymbol{u}}\right) \delta\boldsymbol{u}^{(i+1)} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{-1} \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}} \tag{8}$$

と表現され，連立方程式 (7) に代入することで，線形化された仮想仕事式は，

$$\left[\frac{\partial R_{\mathrm{f}}}{\partial \boldsymbol{u}} - \frac{\partial R_{\mathrm{f}}}{\partial \boldsymbol{q}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}}{\partial \boldsymbol{u}}\right] \delta\boldsymbol{u}^{(i+1)} = \int_{\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{h}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\Omega \tag{9}$$

と書ける．ここで，$[\partial R_{\mathrm{f}}/\partial\boldsymbol{u} - \partial R_{\mathrm{f}}/\partial\boldsymbol{q}(\partial\boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}/\partial\boldsymbol{q})^{-1}\partial\boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}/\partial\boldsymbol{u}]$ は整合接線係数行列であり，仮想仕事式に対する残差は外力ベクトル $\boldsymbol{f}$，応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$，仮想ひずみテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})$ を用いて，$R_{\mathrm{f}} = -\int_{\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\Omega$ と表される．さらに，偽応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{h}}$ は物質点に課される制約条件式の残差から，

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{h}} = -\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{q}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{-1} \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}} \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial R_{\mathrm{f}}}{\partial \boldsymbol{u}} & \dfrac{\partial R_{\mathrm{f}}}{\partial \boldsymbol{q}} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}}{\partial \boldsymbol{u}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}}{\partial \boldsymbol{q}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{u}^{(i+1)} \\ \delta\boldsymbol{q}^{(i+1)} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} R_{\mathrm{f}} \\ \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}} \end{Bmatrix}$$

$$\delta\boldsymbol{q}^{(i+1)} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}}{\partial \boldsymbol{u}}\right) \delta\boldsymbol{u}^{(i+1)} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{-1} \boldsymbol{R}_{\mathrm{h}}$$

$$\Delta\boldsymbol{u}^{(i+1)} = \Delta\boldsymbol{u}^{(i)} + \delta\boldsymbol{u}^{(i+1)}$$

$$\Delta\boldsymbol{q}^{(i+1)} = \Delta\boldsymbol{q}^{(i)} + \delta\boldsymbol{q}^{(i+1)}$$

Fig. 1 Proposed scheme

と定義される．式 (9) より，偽応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{h}}$ が応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ に加えられることで，制約条件式に対する残差が線形化された仮想仕事式に組み込まれる．そのため，偽応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{h}}$ の導入によって，提案手法の変位法への実装が容易となる．

Fig.1 のように，提案手法は内力と外力のつりあいと制約条件式を同時反復するため，１回の全体反復に対して応力の更新および接線係数の構築が１度ずつとなる．

3. 結論

本研究では，損傷が進展する弾塑性問題を有限要素解析で解くために，仮想仕事式・降伏条件式・損傷発展式の連成問題を定義した．線形化された連成問題から内部変数を消去することで，接線係数を代数的に導出でき，内部反復が必要ない数値計算手法を開発した．

参考文献

[1] 村上澄男: 連続体損傷力学, 森北出版株式会社, 2008.
[2] Gurson, A.L.: *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, Vol.99, pp.2–15, 1977.
[3] Lemaitre, J.: *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, Vol.107, pp.83–89, 1985.
[4] de Souza Neto, E.A., Perić, D. and Owen, D.R.J.: *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*, John Wiley & Sons, 2008.
[5] Owen, D.R.J. and Hinton, E.: *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press, 1980.
[6] 山王丸将吾, 岡澤重信, 田中智行: 日本機械学会論文集, A 編, Vol.79, No.808, pp.1818–1831, 2013.
[7] Braudel, H.J., Abouaf, M., Chenot, J.L.: *Comput. Struct.*, Vol.22, pp.801–814, 1986.
[8] Yamamoto, T., Yamada, T., Matsui, K.: *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.122, pp.2145–2178, 2021.
[9] 山本剛大, 山田貴博, 松井和己: 日本計算工学会論文集, Vol.2021, pp.20210021, 2021.
[10] 山本剛大, 山田貴博, 松井和己: 日本機械学会論文集, Vol.90, No. 936, pp.24-00081, 2024.