

滑らかな領域におけるアイソパラメトリック有限要素法 の最大値ノルム誤差評価について

Maximum-norm error estimate for isoparametric FEM in a smooth domain

柏原崇人¹⁾

Takahito Kashiwabara

¹⁾東京大学大学院数理科学研究科 (〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1, E-mail: tkashiwa@ms.u-tokyo.ac.jp)

アイソジオメトリック解析の既存の数学的誤差評価は、Sobolev 空間 H^1 のような L^2 型のノルムを用いて行われることがほとんどである。一方で、積分量ではなく各点ベースで解を評価することにも、数学的・工学的な価値があると考えられる。本講演では、アイソパラメトリック有限要素法に対する各点（最大値ノルム）の誤差評価を報告し、その手法を将来アイソジオメトリック解析へ拡張する際に生じる課題について述べたい。

Key Words : 有限要素法、アイソパラメトリック要素、誤差評価、最大値ノルム

1. はじめに：滑らかな領域における \mathbb{P}_1 有限要素法

モデル問題として、次の楕円型偏微分方程式の齊次 Dirichlet 境界値問題を考える：

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

ここで、 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は有界で滑らかな境界を持つ領域で、 f は Ω 上で与えられた関数である。

Ω は多角形ではないため、図-1 のように厳密に三角形分割することはできず、 Ω を多角形領域 Ω_h で近似した後、 Ω_h を三角形分割するというプロセスを踏むのが一般的である。ここでいう三角形は通常の直線的な辺を持つ三角形のことであり、いわゆる curved element はまだ考えていない。近似領域 Ω_h の三角形分割（三角形からなる集合）を \mathcal{T}_h と書き、 \mathcal{T}_h のメッシュサイズ h は

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T, \quad h_T := \text{三角形 } T \text{ の最大辺長}$$

で定まるものとする。

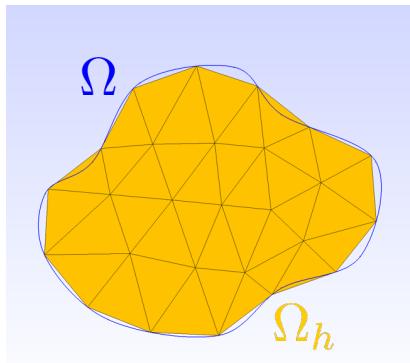


図-1 滑らかな領域 Ω とその近似領域 Ω_h

このとき、境界 $\partial\Omega_h$ は $\partial\Omega$ の線形補間になっている

とみなせるから、

$$\text{dist}(\partial\Omega_h, \partial\Omega) \leq O(h^2) \quad (1)$$

が成り立つ。このような近似領域 Ω_h と三角形分割に対して、 \mathbb{P}_1 有限要素空間は

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}_h) \mid v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

で定まる。ここで、 $\mathbb{P}_1(T)$ は T 上の 1 次多項式関数の集合である。

同じことであるが、ノード基底関数を主役にして V_h を表示することもできる。 \mathcal{T}_h に含まれる三角形の頂点（つまり節点）全体を N_h とするとき、節点 $p \in N_h$ に対応するノード基底関数 $\phi_p \in V_h$ を

$$\phi_p(q) = \begin{cases} 1 & \text{if } q = p, \\ 0 & \text{if } q \in N_h \text{ and } q \neq p \end{cases}$$

で定めると、 $V_h = \text{span}\{\phi_p\}_{p \in N_h}$ となる。

齊次 Dirichlet 境界条件（本質的境界条件）は有限要素空間に課す必要があるので、さらに

$$\mathring{V}_h = \{v_h \in V_h \mid v_h = 0 \text{ on } \partial\Omega_h\}$$

を導入する。領域内部に含まれる節点の集合を $\mathring{N}_h = N_h \cap \text{int } \Omega_h$ とおけば、 $\mathring{V}_h = \text{span}\{\phi_p\}_{p \in \mathring{N}_h}$ である。

このように有限要素空間が構成できれば、 \mathbb{P}_1 有限要素法は、 $u_h \in \mathring{V}_h$ であって

$$\int_{\Omega_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega_h} \tilde{f} v_h \, dx \quad \forall v_h \in \mathring{V}_h$$

を満たすものを求める問題として定式化される。ここで、一般に Ω_h は Ω から「はみ出している」可能性があるため、論理的には Ω 上で定義された関数 f を Ω_h 上に拡張しておく必要がある。 f が Sobolev 空間 $H^r(\Omega)$ (r は 0 以上の整数) の元であれば、 H^r ノルムの意味で安

定な f の拡張 $\tilde{f} \in H^r(\mathbb{R}^2)$ が抽象的に存在することが保証される (Sobolev の拡張定理)。実用的には、初めからソース項 f は大域的に定義された関数として与えられることも多いと思われる。その場合は表立って f の拡張を意識する必要はない。

有限要素解 $u_h \in \mathring{V}_h$ と厳密解 $u \in H_0^1(\Omega)$ の間の理論的な誤差評価として、

$$\begin{aligned}\|\nabla(\tilde{u} - u_h)\|_{L^2(\Omega_h)} &\leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)}, \\ \|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h)} &\leq Ch^2\|u\|_{H^2(\Omega)},\end{aligned}\quad (2)$$

を示すことができる。 \tilde{u} は u の任意の拡張であり、正の定数 C は領域 Ω 及び拡張の仕方に依存する。この結果は、領域近似 $\Omega_h \approx \Omega$ によって生じる誤差を考慮しなければならないことを除けば、標準的な有限要素法の教科書 (たとえば [1, Section 3.2]) に載っている誤差評価と本質的に同じである。

2. L^2 ノルム v.s. L^∞ ノルム

上に現れた $L^2(\Omega)$ ノルム

$$\|v\|_{L^2(\Omega_h)} = \left(\int_{\Omega_h} |v|^2 dx \right)^{1/2}$$

は積分量にもとづく指標である (H^2 ノルムも、2 階微分までの L^2 ノルムの和なので L^2 型の指標と分類できる)。一方で、数値計算における誤差を表現する指標としては、各点の情報にもとづく最大値ノルム

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega_h)} = \max_{x \in \overline{\Omega}_h} |v(x)|$$

がより直観的でわかりやすいと思われる。この指標を用いた誤差評価としては、[2] (Neumann 境界条件の場合) により

$$\begin{aligned}\|\nabla(\tilde{u} - u_h)\|_{L^\infty(\Omega_h)} &\leq Ch\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}, \\ \|\tilde{u} - u_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} &\leq Ch^2 |\log h| \|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)},\end{aligned}\quad (3)$$

が得られている。

3. 本研究の結果： \mathbb{P}_k アイソパラメトリック有限要素法に対する L^∞ 誤差評価

線形要素 (\mathbb{P}_1 要素) を用いる限り、(2) や (3) の収束レートを改善することはできない。それならばと三角形上で $k \geq 2$ 次以上の高次要素 (\mathbb{P}_k 要素) を用いれば改善できるかというと、領域近似誤差 (1) が足かせとなってやはり十分な改善が見込めない。したがって、高次の近似は関数に対してだけではなく、近似領域 Ω_h を作る際にも適用する必要がある。すなわち、境界付近の三角形 T は曲がった形を持つような curved element とし、 $\partial\Omega_h$ が $\partial\Omega$ の区分 k 次近似となるようにパラメトリック写像 $F_T : \hat{T} \rightarrow T$ を構成するということである。ここで、 \hat{T} は参照要素であり、たとえば短辺の長さ 1 の直角二等辺三角形 (2 次元の標準単体) に固定する。

このような \mathbb{P}_k アイソパラメトリック有限要素法自体は古くから提案されており、 $k = 2$ の場合の詳細な理論解析が [1, Section 4.4] で解説されている。ただし、そこでの誤差の指標は (2) のような L^2 型ノルムである。 L^∞

ノルムの場合、 $k = 2$ に対する先駆的な結果は [4] で報告されたが、得られた収束レートは $O(h^{3-\epsilon})$ と最良オーダーから少しロスが生じたものであった。

ロスのない最良オーダー収束は、かなり最近になってから、 $W^{1,\infty}$ 誤差評価の場合は [5] で、 L^∞ 誤差評価の場合は [6] で報告されている。これらの先行研究の理論解析は lifting アプローチ (同相写像 $\mathcal{L}_h : \Omega_h \rightarrow \Omega$ で区分的には微分同相となるものをリフト写像という。論文 [7] を参照) にもとづいて行われており、「 $\partial\Omega_h$ の各節点が $\partial\Omega$ に属する」という条件をメッシュが満たす必要がある。すなわち、 $\partial\Omega_h$ が $\partial\Omega$ の補間になっていることを仮定する。その一方で、 $\partial\Omega_h$ は $\partial\Omega$ の補間ではないものの近似はしているという状況も考えられる (図-2 参照)。

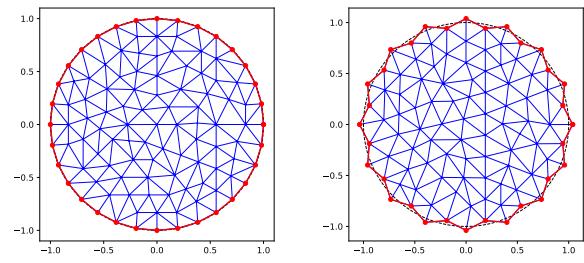


図-2 左図： $\partial\Omega_h$ は $\partial\Omega$ の補間。右図： $\partial\Omega_h$ は $\partial\Omega$ の補間ではないが近似にはなっている

本研究では、lifting アプローチの代わりに、第 1 節でも言及した関数の拡張を用いる拡張アプローチを採用し、 $\partial\Omega$ を補間しなくてもよい一般のメッシュ上で最良オーダー収束

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch^{k+1} \|u\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)} \quad (k \geq 2)$$

を得ることができた。メッシュや有限要素空間に対する詳しい仮定、証明の詳細については論文 [8] を参照していただきたいが、いくつかコメントを残しておく。

1. 境界条件として Dirichlet 境界条件を考えていることは本質的である。Neumann 境界条件の場合、 $k \geq 2$ の \mathbb{P}_k アイソパラメトリック有限要素近似であっても、現状では

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch^{k+1} |\log h| \|u\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)}$$

という $|\log h|$ のファクターが付いた形の理論評価しか得られていない。その理由は、Dirichlet 境界値問題に対する Green 関数 $G(x, y)$ に対しては成り立つ

$$|\nabla_x G(x, y)| \leq C \text{dist}(y, \partial\Omega) |x - y|^{-N}$$

という評価が Neumann 境界値問題の場合には成立しないためである。その結果、 $|\nabla_x G(x, y)| \leq C|x - y|^{1-N}$ という評価しか使えず、最終的に領域近似誤差を $|\log h|$ のファクターなしで押さえられなくなるという事情がある。

2. 論文 [8] には明示的には記載していないが、 $W^{1,\infty}$ 誤差評価

$$\|\nabla(\tilde{u} - u_h)\|_{L^\infty(\Omega_h)} \leq Ch^k \|u\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)}$$

も似たような手法で証明可能である。

3. 本研究の手法は [4] や [6] と異なり最大値原理は用いないため、 L^∞ ノルムだけでなく、一般の $1 \leq p \leq \infty$ に対して L^p 型誤差評価

$$\begin{aligned}\|\nabla(\tilde{u} - u_h)\|_{L^p(\Omega_h)} &\leq Ch^k \|u\|_{W^{k+1,p}(\Omega)}, \\ \|\tilde{u} - u_h\|_{L^p(\Omega_h)} &\leq Ch^{k+1} \|u\|_{W^{k+1,p}(\Omega)},\end{aligned}$$

も得られる (L^p 評価が計算工学的にどのような価値があるかは別途考える必要がある)。さらに、Green 関数の評価さえあれば、単独の橿円型方程式だけでなく、弾性体方程式のような連立系の場合にも拡張可能と考えている。

4. アイソジオメトリック解析への拡張について

アイソジオメトリック解析 (IGA) は、本研究で考察した古典的な \mathbb{P}_k アイソパラメトリック有限要素法のコンセプトを、B スプライン (あるいは NURBS) 基底関数による図形表現と組み合わせることにより、さらに洗練させたものととらえられる。しかし、本研究の結果を IGA の場合に拡張することは現状では非自明である。

典型的な IGA の理論解析では、

- 1 つのパッチで物理領域 Ω を構成する、すなわち、パラメトリック写像 $F : [0, 1]^2 \rightarrow \bar{\Omega}$ が構成できる
- F は双リップシツツ、つまり $W^{1,\infty}$ 微分同相になる

ことを仮定する (たとえば [9, pp. 180–181] を参照)。しかし、角のある正方形領域 $[0, 1]^2$ が滑らかな領域 $\bar{\Omega}$ と微分同相になることは不可能である。数学的にこの問題点を解消するには、

- (a) 角点を持つ領域 Ω を考える
- (b) Ω は滑らかとして、マルチパッチで記述される IGA を考える
- (c) Ω は滑らかとして、 F の特異性を許容する (パラメータ空間で異なる点が物理空間で同じ点に移ることを許す、あるいは複数の制御点を物理空間の同じ位置に置くことを許す)

といった対応策が考えられるが、

- (a)~ \rightsquigarrow 角点を持つ領域における Green 関数の微分評価 (L^∞ 誤差評価のためには 3 階微分の評価がほしい) は容易ではない
- (b)~ \rightsquigarrow マルチパッチの設定は複雑で理論的な先行研究は少ない。また、数学的モチベーションとして、よりシンプルな設定であるシングルパッチの場合を排除したくない

(c)~ \rightsquigarrow F が特異点を持つ場合の理論的な先行研究が少ない。 F に特異点があっても、数値積分公式の積分点が特異点を避けていれば実用上問題はないことが知られているが (たとえば [10, p. 57])、このことを理論的に正当化するには (最近の FEM 理論誤差評価では検討されることが少ない) 数値積分誤差の考察が必要

のように、それぞれ考慮すべき点がある。(a)(b)(c) いずれかの方針を決めて、アイソジオメトリック解析 (特に、2 階だけでなく高階の偏微分方程式を対象とした IGA) における L^∞ 型誤差評価に取り組むのが今後の課題である。

参考文献

- [1] Ciarlet, P. G.: The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, 1978.
- [2] Gong, W., Liang, D., and Xie, X.: Pointwise error estimates for linear finite element approximation to elliptic Dirichlet problems in smooth domains, *Adv. Comput. Math.*, Vol. 49, doi:10.1007/s10444-023-10017-3, 2023.
- [3] Kashiwabara, T. and Kemmochi, T.: Pointwise error estimates of linear finite element method for Neumann boundary value problems in a smooth domain, *Numer. Math.*, Vol. 144, pp. 553–584, 2020.
- [4] Wahlbin, L. B.: Maximum norm error estimates in the finite element method with isoparametric quadratic elements and numerical integration, *R.A.I.R.O. Numer. Anal.*, Vol. 12 pp. 173–202, 1978.
- [5] Dörich, B., Leibold, J., and Maier, B.: Optimal $W^{1,\infty}$ -estimates for an isoparametric finite element discretization of elliptic boundary value problems, *Electron. Trans. Numer. Anal.*, Vol. 58, pp. 1–21, 2023.
- [6] Li, B., Qiu, W., Xie, Y., and Yu, W.: Weak discrete maximum principle of isoparametric finite element methods in curvilinear polyhedra, *Math. Comp.*, Vol. 93, pp. 1–34, 2024.
- [7] Elliott, C. M. and Ranner, T.: Finite element analysis for a coupled bulk-surface partial differential equations, *IMA J. Numer. Anal.*, Vol. 33, pp. 377–402, 2013.
- [8] Kashiwabara, T.: Optimal L^∞ -error estimate for isoparametric finite element method in a smooth domain, to appear in the *Proceedings of MSJ-KMS Joint Meeting 2023*, arXiv:2503.09190.
- [9] Beirão da Veiga, L., Buffa, A., Sangalli, G., Vázquez, R.: Mathematical analysis of variational isogeometric methods, *Acta Numerica*, Vol. 23, pp. 157–287, 2014.
- [10] Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., and Bazilevs, Y.: Isogeometric Analysis—Toward Integration of CAD and FEA, Wiley, 2009.