

# 線形破壊力学の解析のための IGA 重合パッチ法解析モデル生成法に関する研究

A study on the generation method of analysis model of S-IGA for liner fracture model

大石青空<sup>1)</sup> 黒澤太加志<sup>2)</sup> 土山雄飛<sup>3)</sup> 岡田裕<sup>4)</sup>

Sora Oishi, Takashi Kurosawa, Yuhi tsuchiya and Hiroshi Okada

<sup>1)</sup>学士 (工) 東京理科大学大学院 創域理工学研究科 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, E-mail: 7521024@ed.tus.ac.jp)

<sup>2)</sup>修士 (工) 東京理科大学大学院 創域理工学研究科 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, E-mail: 7523525@ed.tus.ac.jp)

<sup>3)</sup>修士 (工) 東京理科大学大学院 創域理工学研究科 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, E-mail: 7524701@ed.tus.ac.jp)

<sup>4)</sup>Ph.D. 東京理科大学 創域理工学部 教授 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, E-mail: hiroshi.okada@rs.tus.ac.jp)

IGA (Isogeometric Analysis) shape functions are equivalent to the geometric representation methods used in CAD models. Utilizing this concept, this paper presents the development of software that generates analysis models by extracting and analyzing information from CAD solid models. Furthermore, applying the singular patch method to these models enables highly accurate calculations of the stress intensity factor. Moreover, applying the overlaying patch method to these models enables the reduction of calculation costs by remeshing only local model elements and subdividing them.

**Key Words :** CAD, IGA, Overlaying, Singular.

## 1. はじめに

構造物の設計を行う際、CAD (Computer Aided Design) によりモデルを作成し、有限要素法 (Finite Element Method, FEM) を行うための解析モデルを作成、解析し強度評価が行われている。本論文で用いる解析手法である、Hughes ら [1] によって提案されたアイソジオメトリック解析 (Isogeometric Analysis, IGA) では、設計段階における、CAD で作成したモデルの幾何的表現方法として用いられる非一様有理 B スプライン (Non-Uniform Rational B-Spline, NURBS) 関数を形状関数として用いることができるため、設計から解析までの時間が FEM と比べて少なくなるという利点がある。さらに、NURBS 関数は次数を自由に設定できるので高次化が容易である。球や円弧の形状表現を厳密に表現できる。よって FEM のように幾何的な形状誤差が生じないため、高精度な解析を行うことができる。また、FEM の基底関数は要素境界で  $C^0$  連続であるのに対し、二次の NURBS 関数は、要素境界でも  $C^1$  連続を持つため、応力やひずみの精度が高いことがいわれている。

本研究の目的は、高精度な線形破壊力学解析を容易に実施可能にするための S-IGA 用パッチを生成方法を構築することである。本報では、1) CAD ソリッドモデルから IGA に必要な情報の取得、2) 計算コスト削減のため重合パッチ法の使用、3) 破壊力学解析のための亀裂のモデル化や特異パッチ法を用いた解析モデル生成法について示す。4) 本手法で生成した解析モデルを用いた解析例を示す。

## 2. 重合パッチ法

亀裂近傍の応力分布を正確に計算するためには、解析モデルの該当する箇所を局所的に細分化する必要が

ある。IGA では局所的な細分化を行うと、その影響が解析モデル全体に大きく出てしまう (図 1)。ここで FEM における重合メッシュ法 [2] のアイディアを IGA で使用する重合パッチ法 [3] を用いることで、ローカル解析モデルのみに細分化を行うことができる (図 2)。

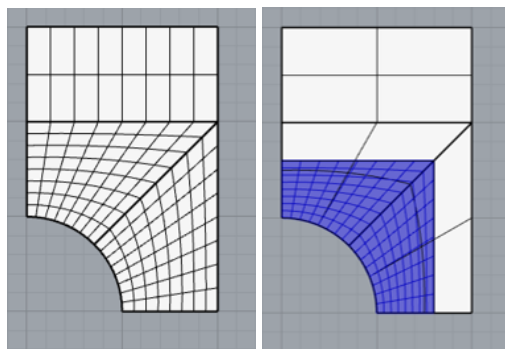


図-1 円孔を有する平板の 1/4 解析モデルに局所細分化を行った例  
図-2 円孔を有する平板の 1/4 のローカル IGA 解析モデル (青色) のみ細分化を行った例

重合パッチ法の解析モデルの模式図を図 3 に示す。ここでグローバル IGA 解析モデルの領域を  $\Omega^G$ 、境界を  $\Gamma^G$ 、ローカル IGA 解析モデルの領域を  $\Omega^L$ 、境界を  $\Gamma^G$ 、グローバル、ローカル IGA 解析モデルの境界を  $\Gamma^{GL}$ 、トラクションが課された境界を  $\Gamma^t$ 、変位が規定された境界を  $\Gamma^u$  とする。

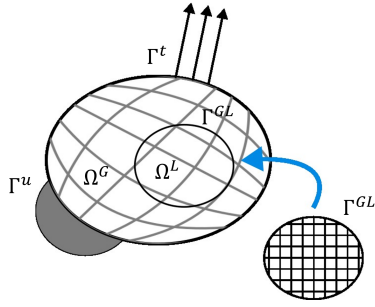


図-3 S-IGA の模式図。

グローバル IGA 解析モデルの変位  $u^G$  とローカル IGA 解析モデルの変位  $u^L$  を用いて、各変位  $u$  を式 (1) の様に表す。

$$u = \begin{cases} u^G & \text{in } \Omega^G - \Omega^L, \\ u^G + u^L & \text{in } \Omega^L. \end{cases} \quad (1)$$

また、グローバル、ローカル IGA 解析モデルの境界で変位の  $C^0$  連続を保証するために、境界  $\Gamma^{GL}$  上で式 (2) に定義する。

$$u^L = 0 \quad \text{in } \Gamma^{GL}. \quad (2)$$

このとき剛性マトリックスの行列方程式は、グローバル、ローカル IGA 解析モデルの変位式  $d^G, d^L$  と力式  $f^G, f^L$  を用いて、以下の式 (3) ように離散化できる。

$$\begin{bmatrix} K^{GG} & K^{GL} \\ K^{LG} & K^{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^G \\ d^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^G \\ f^L \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

各成分の計算を式 (4), (5), (6), (7) に示す。本研究では剛性マトリックスの成分の計算にガウス求積法を用いて行った。

$$K^{GG} = \int_{\Omega^G} B^{GT} D B^G d\Omega, \quad (4)$$

$$K^{GL} = \int_{\Omega^G} B^{GT} D B^L d\Omega, \quad (5)$$

$$K^{LG} = \int_{\Omega^L} B^{LT} D B^G d\Omega, \quad (6)$$

$$K^{LL} = \int_{\Omega^L} B^{LT} D B^L d\Omega. \quad (7)$$

$K^{GG}$  成分と  $K^{LL}$  成分の計算は、それぞれグローバル IGA 解析モデルのみ、ローカル IGA 解析モデルのみで定義される通常の剛性マトリックスと同じである。 $K^{LG}$  成分は結合剛性マトリックスと呼ばれ、 $K^{GL}$  成分を転置したものと等しい。 $K^{LG}$  成分の計算のため、式 (6) に示すマトリックス  $B^G$  のグローバル IGA 解析モデルの積分点を適切に定める必要がある。本研究ではグローバル IGA 解析モデルの積分点を与える自然座標を、ローカル IGA 解析モデルの積分点と一致するように Newton 法を用いて決定した [6]。

### 3. 特異パッチ法

FEM における Barsoum の特異要素 [4] のアイデアを IGA に応用した特異パッチ法 [5] を用いる。応力は亀裂前縁からの距離  $r$  に対し  $r^{-1/2}$  の特性をもつように制御点の位置を定め、一般の IGA 解析ソフトにおいても用いることができる手法である。

図 4 に示すように通常パッチを亀裂前縁で縮退し、自然座標系の  $\xi$  方向に亀裂前縁からの距離  $r$  が対応するように写像を行う。ここで  $\xi$  と  $\eta$  の多項式で表されるある関数  $\phi$  (式 (8)) において空間微分を行う際を考える (式 (9))。ここで自然座標系の  $\xi, \eta$  は、 $r, \theta$  からなる極座標系へ写像しているので  $r, \theta$  の関数で表される。よって式 (9) は式 (10) と表される。

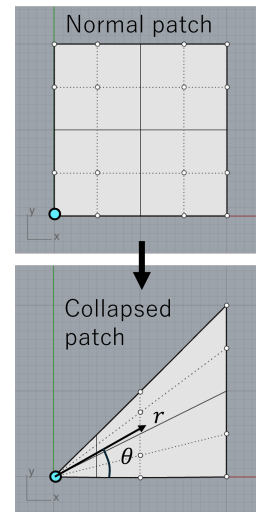


図-4 通常パッチ (上) から縮退パッチ (下) への縮退。青色の点は亀裂前縁を示す。

$$\phi(\xi, \eta) = a_{00} + a_{10}\xi + a_{01}\eta + a_{20}\xi^2 + a_{11}\xi\eta + a_{02}\eta^2 + \dots \quad (8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}. \quad (9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right). \quad (10)$$

ここで亀裂前縁からの距離  $r$  が式 (11) を満たすように制御点の位置を定めることにより、式 (11) を  $r$  で偏微分すると式 (12) が得られる。よって式 (10) が亀裂前縁からの距離  $r$  に対し  $r^{-1/2}$  の特性をもつことが分かる。つまり、変位の一階微分で求まる応力やひずみの値に応力特異性を持たせることができる。

$$r \propto C \xi^2 \quad (C \text{ is constant}). \quad (11)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} \propto \frac{1}{2\sqrt{Cr}} \quad (C \text{ is constant}). \quad (12)$$

本研究で開発したソフトウェアでは通常のパッチを特異パッチに変換してモデリングを行う。

#### 4. CAD ソリッドモデルからの解析情報の取得

CAD のソリッドモデルから取得できる情報は、NURBS 関数に用いられる制御点(コントロールポイント)の物理座標と自然座標上での定められるノットベクトル、円弧等を厳密に表現できる重みである。しかし一般的な CAD ソリッドモデルには内部に解析モデル生成に必要な制御点が配置されていない、破壊力学解析に必要な亀裂のモデル化に関する機能が無い、構造解析を実施するために必要な境界条件付与に関する機能もないといった問題がある。本研究では、これらの問題に対応するために以下の作業を行った。

##### (1) 内部の制御点の生成

内部の制御点の生成について説明を行う。まず CAD ソリッドモデルから、押出しや回転押出しの基となるサーフェスやカーブオブジェクトを選択する。次に図 5 のエルボ管 (1/4 モデル) の様に、ソリッドモデルを再現する様にサーフェスの制御点と重みを、押出しカーブに倣って複製することで内部の制御点を生成している。

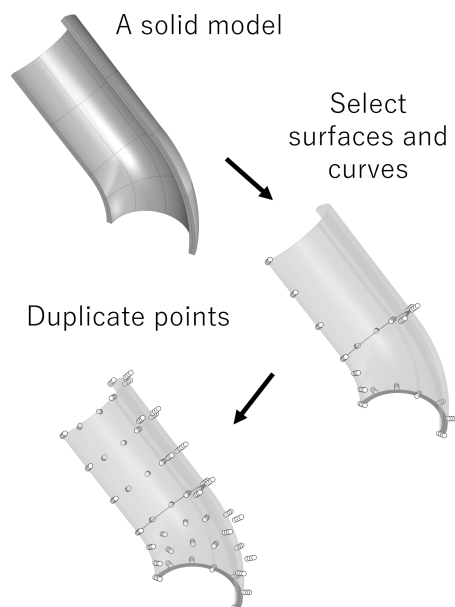


図-5 エルボ管 (1/4 モデル) の下部は回転押出し、上部は押出しにより内部の制御点を生成している。

##### (2) 亀裂のモデル化

亀裂のモデル化について説明を行う。IGA においてパッチ間で変位の連続性を作成するために制御点を共有する操作を行う。亀裂を配置したい場合は、そのパッチ間で制御点を共有しないことで変位の連続性を断つ必要がある。例として、パッチのカウンタを図 6 の様に定義された平板の 0 パッチと 2 パッチ間を亀裂面としたい場合は、亀裂前縁を除く 0 パッチと 2 パッチ間の制御点である図 7 に示す 4 番目と 6 番目の制御点の共有を行わないことで変位の連続性を断ち、自由表面にすることができる。

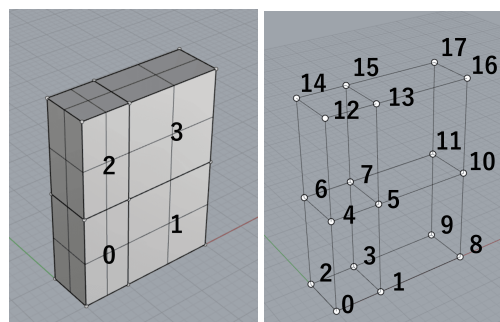


図-6 平板のパッチ番号. 図-7 平板の制御点の番号.

##### (3) 境界条件付与

境界条件を付与についての説明を行う。本研究で開発したソフトウェアでは点とサーフェスを選択し、選択したオブジェクトに対して境界条件を与える操作を行う。必要な情報として、インデックス等の制御点を判別することができる情報があり、面を選択した場合は、それを構成する制御点の情報を取得することができるようになる。制御点を選択すればそれに対し変位量と方向を課すことによって境界条件を付与する。

#### 5. さまざまな形状に対する解析結果

本研究で開発したソフトウェアを用いて生成した解析モデルを用いた解析を数値解析例として紹介する。埋込亀裂を有する平板の 1/4 モデル、表面亀裂を有するエルボ管のフルモデルを示す。

##### (1) 埋込亀裂を有する平板

一様分布荷重を受ける円板状亀裂を有する平板の問題を解いた。対称境界条件を利用して 1/4 解析とした。境界条件と寸法は図 8 に示すとおりである。また、亀裂前縁の応力拡大係数を相互積分法 [7] を用いて計算した。

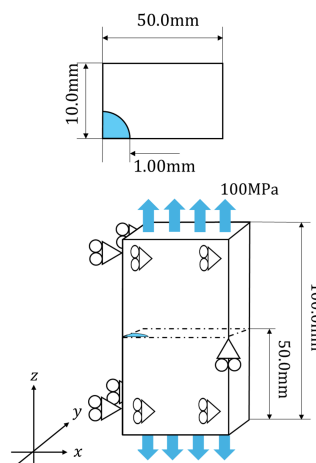


図-8 埋込亀裂を有する平板の 1/4 モデルの寸法と境界条件.

グローバル、ローカル IGA 解析モデルを表す CAD ソリッドモデルの寸法と形状をそれぞれ図 9, 10 に示す。ローカル IGA 解析モデルの制御点の数は 36,309 であり、グローバル IGA 解析モデルの制御点の数は 13,464 である。さらに NURBS 関数の次数は両方共に二次である。

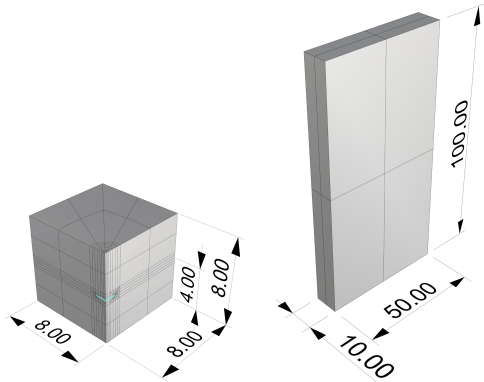


図-9 平板のローカル解析モデルの CAD ソリッドモデル。中央の青い線の箇所を亀裂として生成。単位は [mm]。

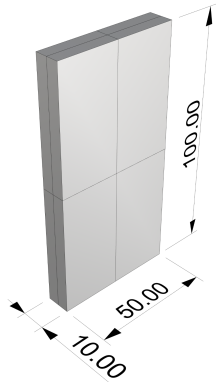


図-10 平板のグローバル解析モデルの CAD ソリッドモデル。単位は [mm]。

グローバル、ローカル IGA 解析モデルの  $z$  方向変位のコンター図を図 11 に示す。また、変形倍率を 200 倍にしたローカル IGA 解析モデルの  $z$  方向応力のコンター図を図 11 に示す。

図 11 から、ローカル IGA 解析モデルの外側の境界で変位が連続的に分布しているためグローバル IGA 解析モデルをローカル IGA 解析モデルに重ね合わせることができた。さらに図 12 より亀裂が開いていることから、亀裂のモデル化を行うことができた。

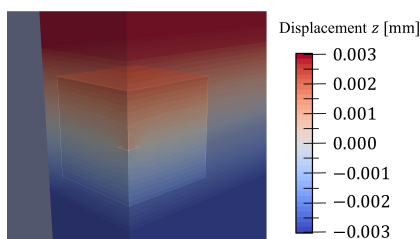


図-11 グローバル、ローカル IGA 解析モデル。  $z$  方向変位分布を示す。グローバル IGA 解析モデルが半透明であり、白い線が境界を示す。

相互積分法によりモード I の応力拡大係数計算した。さらに参照解として Raju-Newman の解 [8], VCCM[9][10] で計算した FEM の解 (節点数 2,457,064) を用い、円板亀裂の周方向  $\theta$  ごとに応力拡大係数を比較する (図 13 参照)。また、結果は Raju-Newman の解とは約 0.2% の精度で一致することが分かった。

よって、本手法で生成したグローバル IGA 解析モデルと特異パッチを持つローカル IGA 解析モデルによる

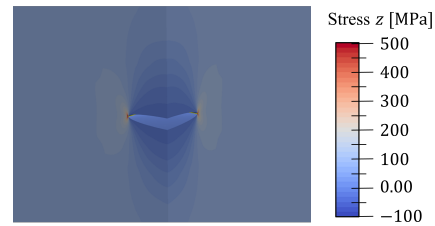


図-12 ローカル IGA 解析モデルの亀裂近傍。  $z$  方向応力分布を示す。変形倍率は 200 倍である。

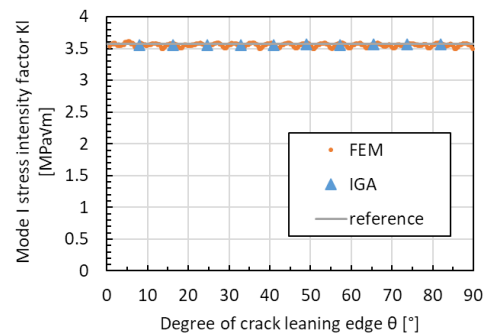


図-13 埋込亀裂を有する平板のモード I 応力拡大係数の比較

解析により、高精度に応力拡大係数を計算することができた。

## (2) 表面亀裂を有するエルボ管

一様分布荷重を受ける円板状の表面亀裂を有するエルボ管の問題を解いた。解析モデルの寸法と境界条件を図 14 に示す。

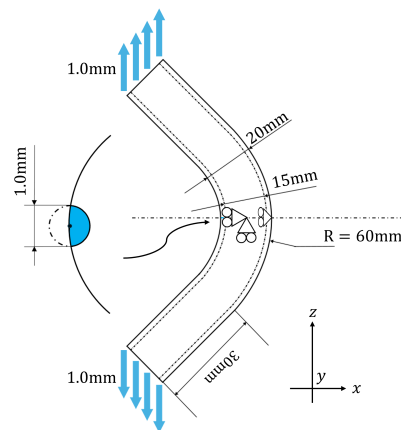


図-14 亀裂を有するエルボ管の寸法と境界条件

グローバル、ローカル IGA 解析モデルを表す CAD ソリッドモデルの寸法と形状をそれぞれ図 15, 16 に示す。また、ローカル IGA 解析モデルの制御点の数は 21,464 であり、グローバル IGA 解析モデルの制御点の数は 42,880 である。さらに NURBS 関数の次数は両方共に二次である。

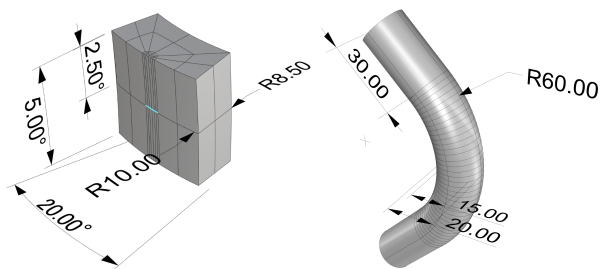


図-15 エルボ管のローカル解析モデルの CAD ソリッドモデル。中央の青い線の箇所を亀裂として生成。単位は [mm]。

図-16 エルボ管グローバル解析モデルの CAD ソリッドモデル。単位は [mm]。

グローバル、ローカル IGA 解析モデルの  $z$  方向変位のコンター図を図 17 に示す。また、変形倍率を 10 倍にしたローカル IGA 解析モデルの相当応力のコンター図を図 18 に示す。

図 17 から、ローカル IGA 解析モデルの外側の上下の境界で、可視化の際の問題により変位が部分的に連続でない箇所が見られる。しかし図 18 より亀裂が開口していることから、亀裂のモデル化を行うことができた。

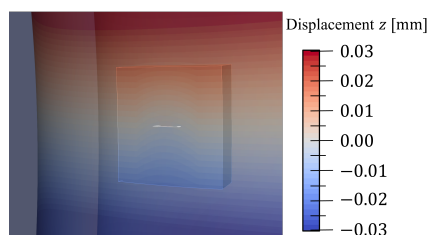


図-17 グローバル、ローカル IGA 解析モデル。  $z$  方向変位分布を示す。グローバル IGA 解析モデルが半透明であり、白い線が境界を示す。

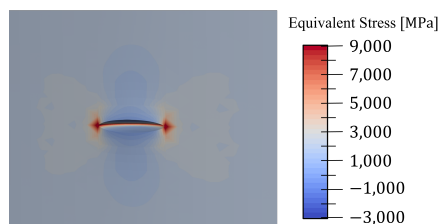


図-18 ローカル IGA 解析モデルの亀裂近傍。相当応力分布を示す。変形倍率は 10 倍である。

## 6. まとめ

CAD ソリッドモデルから解析に必要な情報を取得し、解析モデルを生成し破壊解析を行うことができた。さらに重合パッチ法や特異パッチ法により容易かつ高精度な応力拡大係数を解析することができた。

押し出しと回転押し出しで作成可能な解析モデルでない内部の制御点を生成できない手法の制約があるため、

現時点では特異パッチを生成できない。そのためエルボ管の問題では応力拡大係数計算を実施しなかった。

今後は、通常パッチから特異パッチを変換する機能を実装する。よって複雑な形状に対しても特異パッチを用いた解析を可能にし、高精度な応力拡大係数の解析を行っていく。

## 7. 謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP22K03879 の助成を受けたものです。助成に対し、謹んで謝意を示します。

## 参考文献

- [1] Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y., Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.194, No.39-41, (2005), pp.4135—4195.
- [2] Fish J., The s-version of the finite element method, Computers and Structures, Vol.43, (1992), pp.539—547.
- [3] 渡邊梨乃, 重合パッチ法 (S-version Isogeometric Analysis Method, S-IGA) の提案, 東京理科大学大学院理工学研究科機械工学専攻 2020 年度修士論文, (2021)
- [4] Barsoum, R.S., Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, International Journal of Fracture, Vol.10, No.4, (1974), pp.603—605.
- [5] Okada, H., Nakahara, D., Nagashima, A., Watanabe, R., Sunaoka, Y., Yusa, Y. and Otaguro, Y., Singular patch method for linear elastic fracture mechanics analysis using Isogeometric analysis, Mechanical Engineering Journal, Vol.9, (2022), pp.22—00291.
- [6] Tsuchiyama, Y., Sunaoka, U., Okada, H., Otaguro, Y., A method of overlaying models of isogeometric analysis (IGA) for modeling localized features of structure and its accuracy, Mechanical Engineering Journal, Vol.11, (2024), pp.24—173.
- [7] Yau, J.F., Wang, S.S. and Corten, H.T., A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity, Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, (1980), pp.335—341.
- [8] J.C.Newman, Jr. and I.S.Raju, Stress intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies, NASA Technical Memorandum 83200, (1981), pp.1—49.
- [9] Rybicki, E. F. and Kanninen, M. F., A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral, Eng. Fract. Mech., vol.9, (1977), pp.931—938.
- [10] Shivakumar, K. N., Tan. P. W. and Newman, Jr., J. C., A virtual crack-closure technique for calculating stress intensity factors for cracked three dimensional bodies, International Journal of Fracture, vol.36, (1988), R43—R50.