

# IGA 重合パッチ法 (S-IGA) を用いた均質化法解析

## Homogenization method using S-version Isogeometric Analysis Method (S-IGA)

田中大吾<sup>1)</sup> 土山雄飛<sup>2)</sup> 岡田裕<sup>3)</sup>

Daigo Tanaka, Yuhi Tsuchiyama and Hiroshi Okada

<sup>1)</sup>学士 (工) 東京理科大学 大学院 創域理工学研究科 機械航空宇宙工学専攻 (E-mail: 7524536@ed.tus.ac.jp)

<sup>2)</sup>修士 (工) 東京理科大学 大学院 創域理工学研究科 機械航空宇宙工学専攻 (E-mail: 7524701@ed.tus.ac.jp)

<sup>3)</sup>Ph.D. 東京理科大学 創域理工学部 機械航空宇宙工学科教授 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2640, E-mail: hiroshi.okada@rs.tus.ac.jp)

In this study, we propose a homogenization method using the S-version Isogeometric Analysis Method (S-IGA). The S-IGA is a method that can couple the global patch and local patch. Therefore we can easily make model and cut modeling time than FEM. IGA can easily change the order of the basis function, so we can exactly approximate the coupling matrix. The homogenization method is a method that can analyze the composite material and can calculate the equal material properties. When we analysis composite materials at the same time, we have to handle discontinuity of integrand by different material properties. In this study, we propose a method to analyze the effective method of integration of stiffness matrix and external force vector. We propose the method of periodic boundary conditions which can analysis high order continuity on the edge of the Unit cell.

**Key Words :** *Isogeometric Analysis, S-version Isogeometric Analysis, Homogenization, Homogenized method, High order continuity, Periodic boundary conditions, Composite material*

### 1. はじめに

本研究は, IGA 重合パッチ法 (S-IGA) [1] を用いた均質化法解析 [2] を提案する. Hughes ら [3] によって提案された Isogeometric Analysis (IGA) は, CAD モデルと解析で同一の形状関数を利用し, 正確な幾何表現が可能である. IGA は, 有限要素法 (FEM) よりも形状誤差が小さく, 高次連続で高精度な解析が可能である.

土山ら [1] によって提案された IGA 重合パッチ法 (S-IGA) は, グローバル IGA モデル (全体のメッシュ) とローカル IGA モデル (局所的なメッシュ) を重ね合わせる手法である. 局所的に複雑な構造を持つ解析対象に対して, 全体のメッシュと局所的なメッシュに分けることで, 解析モデル生成の簡単化することが可能である. 特に複合材料などの, 微視的に非均質な構造を有する構造の解析モデル生成に適していると考えられる.

均質化法は, 微視的に周期構造を有する構造体の解析手法であり, 微視的に最小単位の構造 (単位セル) に対して解析が行われる. 均質化法の仮定では, 単位セルは構造体の中で無限に小さいと仮定されている. FEM を用いた単位セル解析では, 形状関数の性質上, 変位のオーダーまでの連続性しか保証されず, 単位セル外周でひずみや応力が不連続になる. しかし, IGA では, 基底関数の次数を高くすることで, ひずみや応力の連続性が保証され, 単位セル外周でひずみや応力を滑らかに繋ぐことができる. 本研究では, S-IGA を均質化法に適用し, 基底関数の性質を用いて, 単位セル境界で高次連続な解析を行うことができる手法を提案する. 単位セル外周で変位に課す周期境界条件に加えて微係数も連続な均質化法解析を提案する.

提案手法では単位セル外周でもオープンノットが存在しないので, 剛体モードを拘束するための変位境界条件を直接コントロール点に対して課することができない. 本研究では, 剛性行列に対して多点拘束条件 (Multi-Point Constraints)[4] を課することによって, 剛体モードを拘束した.

一方, 単位セル内に異なる材料定数を持つ材料が存在する場合に, IGA 重合パッチ法では, 剛性行列を求める際に現れる被積分関数が不連続になり, ガウス積分の近似精度が低下する. ガウス積分の近似精度の低下を抑制するために, S-IGA の全体剛性方程式や外力ベクトルの積分方法を次のようにした. グローバル IGA モデルとローカル IGA モデルに積分領域を分け, ローカル IGA モデルが存在する領域では, グローバル IGA モデルとの差分を足し, 異なる材料定数による不連続性を回避した.

### 2. IGA 重合パッチ法 (S-IGA) による均質化法

#### (1) IGA 重合パッチ法 (S-IGA)

IGA 重合パッチ法では, 全体領域であるグローバル IGA モデルと局所領域であるローカル IGA モデルを重ね合わせることで, 解析モデルを作成する. この手法を用いることで, 微視的構造を持つ構造の解析モデル生成を簡単化することができる.

S-IGA のイメージ図を図 1 に示す. トラクションが規定されている境界を  $\Gamma^t$ , 変位が規定されている境界を  $\Gamma^u$  とする. また, グローバル境界を  $\Gamma^G$ , ローカル境界を  $\Gamma^L$  とする. グローバルとローカルが重なっている部分を  $\Gamma^{GL}$  とする. また, グローバル領域を  $\Omega^G$ , ローカル領域を  $\Omega^L$  とする. グローバル領域のみがある箇所の変位は

$u^G$  で与え、グローバルとローカルが重なっているところではグローバルの変位  $u^G$  とローカルの変位  $u^L$  の和で与えられ、式 (1) となる。

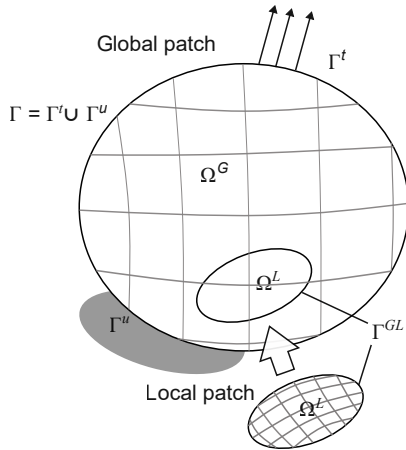


図-1 S-IGA のイメージ図。

変位は次式で表される。

$$u = \begin{cases} u^G & \text{in } \Omega^G \cap \overline{\Omega^L} \\ u^G + u^L & \text{in } \Omega^L \end{cases} \quad (1)$$

ひずみは次式で表される。

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon^G & \text{in } \Omega^G \cap \overline{\Omega^L} \\ \varepsilon^G + \varepsilon^L & \text{in } \Omega^L \end{cases} \quad (2)$$

仮想仕事の原理は次式で表される。

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T D \varepsilon d\Omega = \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega + \int_{\Gamma^t} \delta u^T t d\Gamma \quad (3)$$

積分領域をグローバル領域とローカル領域に分けて考えると以下の式が得られる。

$$\int_{\Omega^G} \delta \varepsilon^G D \varepsilon^G d\Omega + \int_{\Omega^L} \delta \varepsilon^G D \varepsilon^L d\Omega \quad (4)$$

$$= \int_{\Omega^G} \delta u^G b d\Omega + \int_{\Gamma^t} \delta u^G t d\Gamma \quad (5)$$

$$\int_{\Omega^L} \delta \varepsilon^L D \varepsilon^G d\Omega + \int_{\Omega^L} \delta \varepsilon^L D \varepsilon^L d\Omega \quad (6)$$

$$= \int_{\Omega^L} \delta u^L b d\Omega + \int_{\Gamma^t} \delta u^L t d\Gamma \quad (7)$$

IGA 重合パッチ法のつり合い方程式は以下の式で表される。

$$\begin{bmatrix} K_{GG} & K_{GL} \\ K_{LG} & K_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_G \\ x_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_G \\ F_L \end{Bmatrix} \quad (8)$$

## (2) 均質化法

均質化法は、微視的な周期構造に対する手法であり、複合材料やハニカム構造などの解析に用いられる。

図 2 マクロスケールとミクロスケールの図を示す。

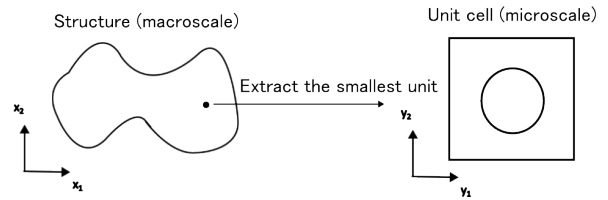


図-2 Relationship between macro and micro scales.

構造体全体の微視的視点であるミクロスケールを  $y$ 、巨視的視点であるマクロスケールを  $x$  とする。ミクロスケールとマクロスケールをつなぐパラメータを  $\epsilon$  とすると

$$\epsilon = \frac{x}{y} \quad (9)$$

で表される。

ここでパラメータ  $\epsilon$  に関する変位の漸近展開形の解を仮定し、

$$u^\epsilon(x) = u(x, y) = u^{(0)}(x, y) + \epsilon u^{(1)}(x, y) + \epsilon^2 u^{(2)}(x, y) + \dots \quad (10)$$

で表す。 $u^{(k)}$  は、 $k$  次の変位を表し、 $\epsilon^k$  は  $\epsilon$  の  $k$  乗を表す。

Guedes, Kikuchi[2] によると、任意の重み関数  $v$  を用いて、ミクロスケールの弱形式は次式で表される。このとき、 $Y$  はユニットセルの領域を表し、 $|Y|$  はその面積を表す。 $E_{ijkl}$  はフックの法則で表される弾性テンソルである。

$$\int_Y E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY = \int_Y E_{ijkl} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY \quad \forall v \in V_Y \quad (11)$$

上式から、特性関数  $\chi_p^{kl}$  を求め、以下の式に代入することでマクロな均質化弾性定数  $D_{ijkl}$  が求められる。

$$D_{ijkl} = \frac{1}{|Y|} \int_Y (E_{ijkl} - E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m}) dY \quad (12)$$

S-IGA を均質化法に適用する場合は、式 (8) において、グローバル領域の特性関数（制御点の変位） $x_G$  とローカル領域の特性関数（制御点の変位） $x_L$  について解く。このとき、式 (8) の右辺の  $F_G, F_L$  は、均質化法では有限要素法 (FEM) の内力ベクトルのように計算され、次式で表される。

$$F_G = \int_{\Omega^G} [B^G]^T [D^G] \{e\} d\Omega + \int_{\Omega^L} [B^G]^T [D^L - D^G] \{e\} d\Omega \quad (13)$$

$$F_L = \int_{\Omega^L} [B^L]^T [D^L] \{e\} d\Omega \quad (14)$$

右辺ベクトル内のマクロひずみ  $\{e\}$  は次式で表される。

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ or } \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

それぞれ、 $x$  方向の一様な変位場、 $y$  方向の一様な変位場、せん断方向に一様な変位場に対応する。上式のように 3

種類のマクロひずみを与えて、(8)式を解くことで、変位  $\chi$  を求めることができる。(8)式で求めた変位  $\chi$  を以下の式に代入することで、均質化弾性テンソル  $D^H$  を求めることができる。

$$D_H = D_H^G + D_H^L \quad (16)$$

グローバル領域、ローカル領域の均質化弾性テンソルは次式で表される。

$$D_H^G = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega^L - \Omega^L} [D^G]^T ([I] - [B^G][\chi^G]) d\Omega \quad (17)$$

$$+ \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega^L} [D^L]^T ([I] - [B^G][\chi^G]) d\Omega \quad (18)$$

$$D_H^L = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega^L} [D^L]^T ([I] - [B^L][\chi^L]) d\Omega \quad (19)$$

#### a) 剛性行列の積分

積分領域内に異なる材料定数が存在する場合、被積分関数が不連続になり、ガウス積分の近似精度が低下する。積分領域をグローバル領域とローカル領域に分け、ローカル領域が存在する箇所では、グローバル IGA モデルとローカル IGA モデルの材料定数の差分を足し、被積分関数の不連続性を回避する。式(8)の剛性行列  $K_{GG}$  は次式で表される。

$$K_{GG} = \int_{\Omega^G} [B^G]^T [D^G] [B^G] d\Omega + \int_{\Omega^L} [B^G]^T [D^L - D^G] [B^G] d\Omega \quad (20)$$

#### b) 周期境界条件による高次連続性

IGA の B スプライン基底関数を単位セル外周で対になる反対側の外表面と滑らかに繋ぐことで、変位に加え、微係数も連続な周期境界条件を課した。

例えば、図3では、1次元で基底関数2次の B スプライン基底関数となっている。単位セル外周である  $\xi = 0, \xi = 1$  では、基底関数が滑らかに繋がっていることが分かる。

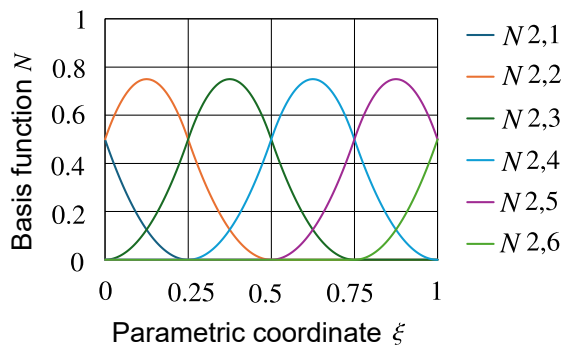


図-3 One-dimensional high-order continuity shape function( $p = 2$ ).

#### c) コントロールポイント変位パラメータの共有

基底関数を単位セル外周で対になる外表面と滑らかに繋ぐためには、単位セル外周で対になる位置にあるコントロールポイントの変位を共有する必要がある。

偶数次数では、コントロールポイントが各要素の中心に位置する配置となる。例えば、次数が2の場合、図4のようなになる。一方、奇数次数では、コントロールポイントが各要素の四隅に位置する配置となる。例えば、次数が3の場合、図5のようなになる。

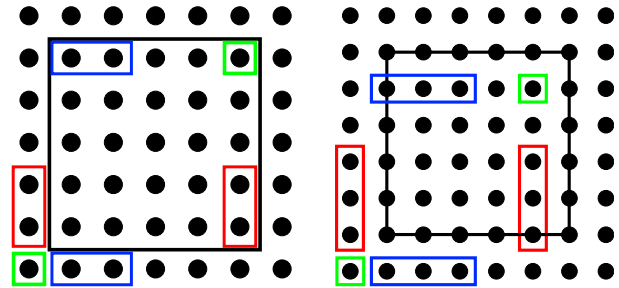


図-4 One-dimensional even-order connectivity( $p = 2$ ).

図-5 One-dimensional odd-order connectivity( $p = 3$ ).

#### d) 剛体モードの拘束

高次連続な解析を行う場合、基底関数がオープンノットではなくなるため、拘束条件を工夫する必要がある。本研究では、多点拘束条件 (Multi Point Constraints) を課し、単位セルの左下の位置で変位を拘束した。周期境界条件により、単位セルの左上、右上、右下の

例えば、1次元で基底関数が二次の場合の拘束条件は次式のようなになる。

$$u_2 = N_1(\xi, \eta)d_1 + N_2(\xi, \eta)d_2 + N_3(\xi, \eta)d_3 \quad (21)$$

ここで、 $u_2 = 0$  としたとき、次式のようなになる。

$$N_2d_2 = -N_1(\xi, \eta)d_1 - N_3(\xi, \eta)d_3 \quad (22)$$

よって、次式のようなになる。

$$d_2 = \begin{bmatrix} -\frac{N_1}{N_2} & -\frac{N_3}{N_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_3 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

### 3. 数値解析例

図6に示す S-IGA の単位セルと図7に示す単位セルを用いて、均質化法解析を行った。

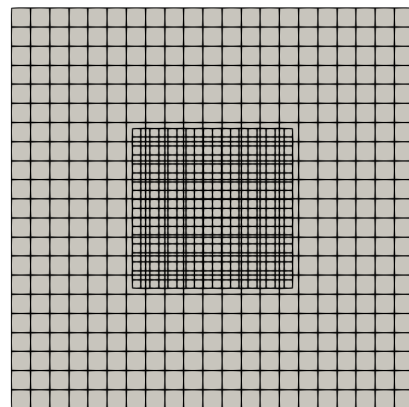


図-6 S-IGA Unit cell used in analysis.

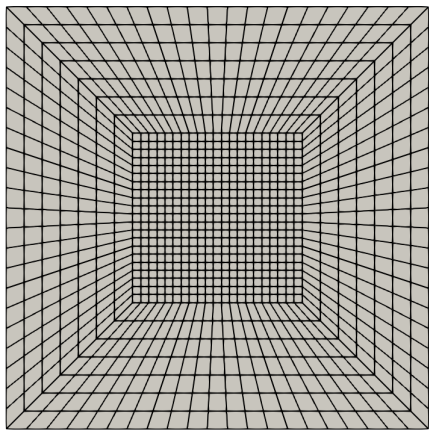


図-7 IGA Unit cell used in analysis.

S-IGA と IGA のパッチ数, 要素数, 基底関数の次数, ガウス点数, 材料定数は, それぞれ表 1, 表 2 に示すように設定した.

表-1 解析条件 (S-IGA)

S-IGA	Global	Local
パッチ数	1	1
要素数	441	400
基底関数次数	2	2
ガウス点	10 × 10	10 × 10
材料定数	ヤング率	ポアソン比
比率 (Local/Global)	0.001	1.0

表-2 解析条件 (IGA)

IGA	外側	内側
パッチ数	4	1
要素数	147	441
基底関数次数	2	2
ガウス点	4 × 4	4 × 4
材料定数	ヤング率	ポアソン比
比率 (内側/外側)	0.001	1.0

表 2 に, 均質化弾性テンソル  $D_{11}^H, D_{12}^H$  の S-IGA と IGA を FEM 解析との結果の比較を示す. FEM 解析は, MSC ソフトウェアの Marc Mentat を使用し, 要素数 660 万程度, 節点数 660 万程度の解析モデルで求めた均質化弾性テンソルの値を参照解とした.

弾性テンソルは以下の応力ひずみ関係の式で表される.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^H & D_{12}^H & D_{13}^H \\ D_{21}^H & D_{22}^H & D_{23}^H \\ D_{31}^H & D_{32}^H & D_{33}^H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

(24)

また, 参照解との差は, 以下の式で与えられる.

$$\text{Dif} = \frac{|D_{S-IGA} - D_{FEM}|}{D_{FEM}} \times 100$$

(25)

表 3 に示すように, S-IGA の均質化弾性テンソル  $D_{11}^H, D_{12}^H$  の値は, FEM の結果と比較して,  $D_{11}^H$  は 2.21%,  $D_{12}^H$  は 5.39% の差が生じた. また, IGA の均質化弾性テンソル  $D_{11}^H, D_{12}^H$  の値は, FEM の結果と比較して,  $D_{11}^H$  は 0.78%,  $D_{12}^H$  は 2.28% の差が生じた. IGA の方が S-IGA よりも FEM の結果に近い値を示した.

表-3 均質化弾性テンソルの FEM との比較

	S-IGA	IGA	FEM	Dif(S-IGA)	Dif(IGA)
$D_{11}^H/E_{glo}$	0.825	0.813	0.807	2.21	0.78
$D_{12}^H/E_{glo}$	0.271	0.263	0.257	5.39	2.28

図 8, 図 9 に, マクロひずみ  $E_x = 1$  の時の S-IGA と IGA の単位セルの応力  $\sigma_{xx}$  を示す. 図 10, 図 11 に, マクロひずみ  $E_y = 1$  の時の S-IGA と IGA の単位セルの応力  $\sigma_{yy}$  を示す. 図 12, 図 13 に, マクロひずみ  $E_{xy} = 1$  の時の S-IGA と IGA の単位セルの応力  $\sigma_{xx}$  を示す. 全ての解析において, 変形倍率は 0.3 倍である. 3 つの解析で, 応力分布は, S-IGA と IGA で定性的には一致している. また, 図 12 では, ローカル IGA モデルの境界で応力集中が生じている. 応力集中が生じている箇所には, より細分化された要素が必要であると考えられる. 従って, ローカル IGA モデルをマルチパッチにするなどの工夫が必要であると考えられる.

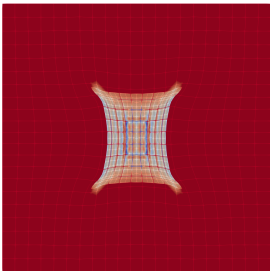


図-8 Deformed and stress  $\sigma_{xx}$  of macro strain  $E_x = 1$  computed by S-IGA.

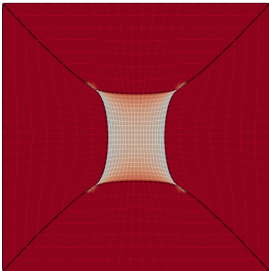


図-9 Deformed and stress  $\sigma_{xx}$  of macro strain  $E_x = 1$  computed by IGA.

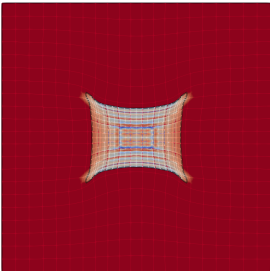


図-10 Deformed and stress  $\sigma_{yy}$  of macro strain  $E_y = 1$  computed by S-IGA.

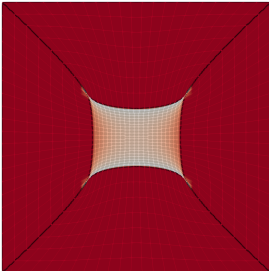


図-11 Deformed and stress  $\sigma_{yy}$  of macro strain  $E_y = 1$  computed by IGA.

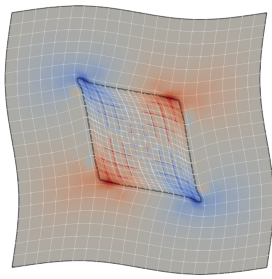


図-12 Deformed and stress  $\sigma_{xy}$  of macro strain  $E_{xy} = 1$  computed by S-IGA.

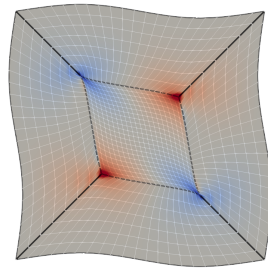


図-13 Deformed and stress  $\sigma_{xy}$  of macro strain  $E_{xy} = 1$  computed by IGA.

図 14 に示すように、マクロひずみ  $E_x = 1$  の  $y = 0$  における S-IGA と IGA の単位セルの応力  $\sigma_{xx}$  を示す。単位セルの長さを  $l$  とする。青色の点が SIGA の単位セル、オレンジ色の点が IGA の単位セルの応力の分布を示す。単位セル解析の値を  $x/l = 0$  から  $x/l = 1$  までに示し、その隣に  $x/l = 1$  から  $x/l = 2$  まで同じものを並べた。 $x/l = 1$  の点が単位セルの境界に対応し、拡大図を 15 に示す。拡大図から  $x/l = 1$  の点、すなわち単位セルの境界で、S-IGA では応力が滑らかに繋がっている。しかし、IGA では、単位セルの境界で応力の値が減少し、連続ではあるが滑らかでなくなっている。

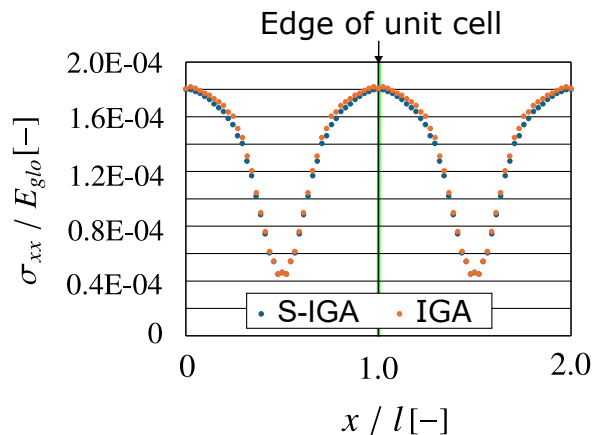


図-14 Stress  $\sigma_{xx}$  of macro strain  $E_x = 1$  at  $y = 0$  of unit cell.

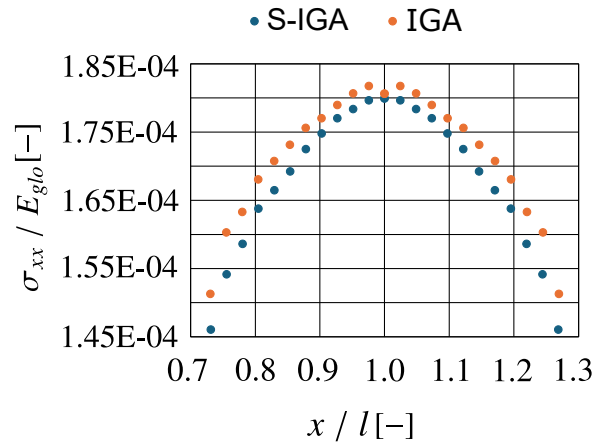


図-15 Enlarge view of stress  $\sigma_{xx}$  of macro strain  $E_x = 1$  at  $y = 0$  of unit cell.

#### 4. まとめ

均質化法に IGA 重合パッチ法を適用し、基底関数の性質を用いて、単位セル境界で高次連続な解析を行った。また、重合パッチ法を適用することで、モデル生成を容易に行った。

IGA では、単位セルの境界で応力が連続だが滑らかでないことが分かった。しかし、提案手法ではローカル IGA モデルの境界で応力が滑らかに繋がる。

#### 参考文献

- [1] Tsuchiyama, Y., Sunaoka, Y., Okada, H. and Ootoguro, Y., A method of overlaying models of isogeometric analysis (IGA) for modeling localized features of structure and its accuracy, Mechanical Engineering Journal, Vol.11, No.5, 2024.
- [2] Guedes, J. M. and Kikuchi N., Preprocessing and post-processing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.83, No.2, (1990), pp. 143—198.
- [3] Hughes, T. J. R., Cottrell, J. A. and Bazilevs, Y., Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.194, No.39—41, pp. 4135—4195, 2005.
- [4] 山田知典, 拘束条件の要素剛性行列への適応に関する考察, 日本機械学会第 16 回計算力学講演会講演論文集, pp.929—930, 2003.
- [5] 寺田賢二郎, 菊池昇, 均質化法入門, 日本計算工学会編, 丸善株式会社, (2003).
- [6] 寺田賢二郎, 平山紀夫, 山本晃司, 数値材料試験, 有限要素法によるマルチスケール解析, 丸善出版株式会社, (2021).