

面内せん断を考慮する板曲げ理論と 曲面板への基本的適用法

Plate bending theory including in-plane shearing and basic application method to the shell

今村純也¹⁾

Junya Imamura

1) 博(工) *imi* 計算工学研究室 (〒351-0114 埼玉県和光市本町31-9-803, E-mail: jimamura@ra2-so-net.ne.jp)

By the conventional recognition, the node parameters of plate bending / membrane as polar shape of the shallow shell are represented independently each other. But this recognition is established when the local origin of the axis z for the gradient-functions θ is represented on the neutral plane of the bending plate. However, there exists no algebraical formula to represent the origin. This report expresses, therefore, the local origin numerically. And therefore, the value of the origin has a residual inevitably. And the residual acts as in-plane shearing similarly in case of the shallow shell. This report discusses how to minimize the residual in case of plate bending, and how to apply the scheme to the shell vice versa.

Key Words : *In-plane shearing of plate bending, Plate bending / membrane structure, Novel numerical scheme for shell, Helmholtz decomposition*

1. はじめに

(1) Kirchhoff 板曲げ式 計算法のポイント

板曲げは Kirchhoff 理論で表され、適合要素は C1 級 (C¹ 連続)を必要とする。

C1 級要素の 数値計算技法を確立し、等分布荷重・周辺固定正方形板の厳密解 ($w_0 = 1.265 (\times 10^{-3} q l^4 / D)$) を再現し、本OS (数値解析理論、要素開発と評価) で幾度か報告して来た。

メッシュ数をパラメトリックに増やして、小数点4 桁までは ($w_0 = 1.2653$) になることも示した。 ([Appendix-1] 参照のこと。)

Kirchhoff 理論式は“平面保持仮定”により、傾角 θ を変数として表す。

平面 $x-y$ 系の θ を、直交 z 軸でも表す。(z の“1 次奇関数式”とし、面内変位 u を $u = \theta z$ で表す。)

かつ、 z の局所原点は板の幾何学的“中点面上”とする。

Kirchhoff 理論は z の局所原点を“中立面上”とする。

Kirchhoff 式は スカラーの曲げ剛性で表され、“中立面”を“中点面”に一致させる式は無い。

ただ ひずみエネルギー式と外力仕事量式は、階数は異なるが、表わせる。

上述のパラメトリック計算は、階数の異なる両式残差の最小化計算であるが、“中立面”を“中点面”に一致させるため でもある。

実は、C1 級要素の 数値計算法には それを一致させる技法が組み込まれており、それがC1 級要素解法のポイントとして報告して来た技法である、ことが解って来た。

一致させる別法を併用すれば、効果はより高くなる。

(2) 板曲げのせん断変形

せん断変形に関しては、“面外せん断”を考慮する Reissner / Mindlin の理論が知られている。

Helmholtz 分解を多方向に適用する離散Helmholtz 分解法では、版 (Scheibe) の解析には“面内せん断・剛体変形 (渦度)”も考慮できる。

面内変位は z に関する“0 次の偶関数式”のみで表し、かつ それを $x-y$ 系の関数で表す。

つまり、 z に関する $u = \theta z_0 + \theta z$ 式の 第1 項の切片： θz_0 が 版変位であり、第2 項 θz が 前述の 板曲げの面内変位である。(z 軸は“中点面”で ゼロ。)

上式の2 項の特性は、版変位は 面内せん断分布を有し、板曲げの面内せん断の板厚積分値 (弱解) はゼロとなる、ことである。

したがって 板曲げ計算法のポイントは、面内せん断分布を最小化することになった。

(3) 本報の内容

Kirchhoff 理論の板 (Platte) は、 z の局所原点設定のため、上述のように“面内せん断”ゼロが要求されるが、代数的に満たす方法は無く、数値的方法では 残差としての“面内せん断”が表れる。(つまり、局所原点位置の誤差が 切片として表れる。)

曲げ成分の“面内せん断”の数値的処理法は、“曲面板”では 必須の処理理論に成ろう。

そこで 本報では、離散Helmholtz 分解法の 板曲げ・版での役割と 曲面板への基本的適用法を示す。(更には、流れ場での計算との 論理の一貫性も示せる ことを指摘して置く。)

(4) 本報のアイデア

課題は、 z の局所原点を“中点面上に 如何に確保するか”であるが、メッシュの細分化のみでなく、版要素のパラメータ自由度数も使う ことに思い至った。

そのアイデアは 曲面板にも、そのまま適用できる。

(5) 離散 Helmholtz 分解法に関し

本報は、Helmholtz の定理[1]に基づく“有限要素法研究”の一環である。

離散Helmholtz分解法(dHd)とは、Helmholtz分解($H-d$)を 後述のように 多方向に計算するもので“多方向有限要素法”とも呼ぶ。

従来の概念(コンセプト)では、曲面板では 平版(Scheibe)変位と板曲げ(Platte)変位は連成するが、平板では ひとつの要素内での 両者の“連成は無い”であった。(例えば 文献[2] 参照。)

板曲げ変位 $\langle \theta z \rangle$ の数値計算では 前述のように、 $\langle u = \theta z_0 + \theta z \rangle$ 式の切片： $\langle \theta z_0 \rangle$ が 版変位なので、両者の“連成は在る”。

かつ、数値計算法は 曲面板へ そのまま適用できる。

つまり shallow shell の 極形としての 平板：“平面板・平版”も 数値解法としては 曲面板理論で統一でき、従来のコンセプトは棄却される、こととなる。

“平面板”理論で表されるのが 板曲げ であり、“平版”理論で表されるのが 耐震壁 などの版である。

板曲げ要素の変位 と 版要素の変位 が連成することは、後者にも dHd に基づく“平面板”計算法(ポイントは 多方向計算)を導入し、せん断変形の他、版の剛体変形(渦度)計算を導入すべきである。

本報では その版計算法を、耐震壁の計算法で示す。

2. 離散Helmholtz分解法

(1) Helmholtz 分解表示法

Helmholtz の定理は 任意のベクトル場 \mathbf{V} を、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルで、Lateral(縦)成分と Transverse(横)成分に分解表示する。

任意のベクトル場とは、微分方程式の相似性が成り立つことを指す、と解釈できる。

変位ベクトル場 \mathbf{u} を $\langle \mathbf{u} = \nabla \varphi + \text{curl} \boldsymbol{\psi} \text{ (} \text{div} \boldsymbol{\psi} = 0 \text{)} \rangle$ で表し、導関数の順に、縦成分は $\langle \dots, \nabla \alpha, \nabla \varphi, \nabla \Phi, \nabla \Psi, \dots \rangle$ で、横成分は $\langle \dots, \text{curl} \boldsymbol{\beta}, \text{curl} \boldsymbol{\psi}, \text{curl} \boldsymbol{\Psi}, \text{curl} \boldsymbol{\Lambda}, \dots \rangle$ で、表すこととしている。

2D断面 $\langle x-y \rangle, \langle y-z \rangle, \langle z-x \rangle$ では それぞれ、縦成分変位は $\langle u, v \rangle, \langle v, w \rangle, \langle w, u \rangle$ で表し、横成分変位は 右上に添字して、 $\langle w^T \rangle, \langle u^T \rangle, \langle v^T \rangle$ で表す、とする。

後者は ポテンシャルでは $\langle \psi_3 \rangle, \langle \psi_1 \rangle, \langle \psi_2 \rangle$ で表す。或いは $\langle \Psi_3 \rangle, \langle \Psi_1 \rangle, \langle \Psi_2 \rangle$ で表す。

$\langle \psi_i, \Psi_i \rangle$ いずれも勾配が 物理的な意味を有す。

2D問題の横成分の変位は、添字なしの流れ関数で表示 $\langle \text{curl} \boldsymbol{\psi} \rangle$ する。 ($\text{curl} \mathbf{w}^T \equiv \text{curl} \Psi_3 \equiv \text{curl} \Psi$)

3D問題の 横成分の有限要素は、縦方向勾配をゼロとする 要素モデルを適用する。

つまり、 $\langle \psi_3^{(001)} = 0 \rangle, \langle \psi_1^{(100)} = 0 \rangle, \langle \psi_2^{(010)} = 0 \rangle$ として ($\text{div} \boldsymbol{\psi} = 0$) を代数的に満たす、ものとする。

したがって、縦方向の要素間は 不連続となる。(横成分要素で、縦方向の 変位や応力は 表示しないので(剛体回転・せん断力 のみ表示)、不連続による問題が生じることはない。

$H-d$ 表示法の特徴は、代数的に $\langle \text{curl}(\nabla \varphi) = \mathbf{0} \rangle$, $\langle \text{div}(\text{curl} \boldsymbol{\psi}) = 0 \rangle$ となる ことである。

dHd 研究の成果として、 $\langle \text{shr}(\nabla \varphi) = \text{shr}(\nabla_{\text{offa}} \boldsymbol{\psi}) \rangle$ も大きな特徴である ことを指摘して置く。($\nabla \boldsymbol{\psi} = \nabla_{\text{diag}} \boldsymbol{\psi} + \nabla_{\text{offa}} \boldsymbol{\psi}$)

(2) 離散 Helmholtz 分解表示法

Helmholtz 表示は 極座標系・円筒座標系・曲線座標系でも表せ、座標系は任意である。

対して \rightarrow 離散計算では、デカルト座標系での“表示・計算”に限る、とする。

つまり、 z 軸周り 45° 回転座標系の $\langle \text{curl} \mathbf{w}^T \rangle$ は、デカルト座標系で 式変換： $\langle \text{shr} \mathbf{w}^T \rangle$ して表し、計算して行く。

45° 回転座標系の $\langle \text{shr} \mathbf{w}^T \rangle$ も、デカルト座標系の“法線ひずみ差”に式変換： $\langle \partial u / \partial x - \partial v / \partial y \rangle$ して表し、計算して行く。

その方法(デカルト座標系での“表示・計算”に限る)を“離散Helmholtz分解(dHd)法”(多方向有限要素法)と呼ぶ、ものである。

(3) 共役変数

横成分 $\langle \text{curl} \mathbf{w}^T \Rightarrow 0 \rangle$ と $\langle \text{shr} \mathbf{w}^T \Rightarrow 0 \rangle$ を同じ形式の $\langle \mathbf{w}^T(010) - \mathbf{w}^T(100) \Rightarrow 0 \rangle$, $\langle \mathbf{w}^T(010) + \mathbf{w}^T(100) \Rightarrow 0 \rangle$ で表せば、多方向計算は 縦成分・横成分 いずれも、形式のパターンは2変数： $\langle \mathbf{A} - \mathbf{B} \rangle$ と $\langle \mathbf{A} + \mathbf{B} \rangle$ となる。

この2パターンの変数を“共役変数”と呼ぶ。(くびき(軛)を共にする変数である。)

例えば 一方、 $\langle u^{(100)} + v^{(010)} \Rightarrow 0 \rangle$ の計算時には、同時に、共役変数も最小化： $\langle u^{(100)} - v^{(010)} \Rightarrow 0 \rangle$ する。

桁落ち $\langle e \rangle : \langle (u^{(100)} + e) + (v^{(010)} - e) \Rightarrow 0 \rangle$ を、最小化： $\langle (u^{(100)} + e) - (v^{(010)} - e) \Rightarrow 0 \rangle$ $i.e. ; 2e \Rightarrow 0$ で、その増大を 毎計算時防いで行く ものである。

それが“多方向有限要素法”(dHd 法)の効果・目的 である。

3. Kirchhoff 板曲げの計算法 (再掲)

(1) Kirchhoff 板曲げ解法のポイント

縦成分 $\langle \text{div} \boldsymbol{\theta} \text{ (} \nabla^2 \mathbf{w} \equiv \nabla^2 \varphi \text{)} \rangle$ のみで表す Kirchhoff 理

論式(重調和式)の数値解法のポイントは、“離散Helmholtz分解法”に拠ったことである。

ここには既報[3]の板曲げの項を再説明して置く。

まず、重調和式の $\langle \varphi^{(40)} + \varphi^{(04)} \Rightarrow 0 \rangle$ 項の仮想仕事式項を有限要素技法(累次部分積分法)で ひずみエネルギー最小化 $\langle \varphi^{(20)} + \varphi^{(02)} \Rightarrow 0 \rangle$ 項を含む式に展開して置く。

$\langle \varphi^{(02)} + \varphi^{(20)} \Rightarrow 0 \rangle$ と $\langle \varphi^{(02)} - \varphi^{(20)} \Rightarrow 0 \rangle$ を同時に満たすことで、常に $\langle 2e \Rightarrow 0 \rangle$ として行く。

重調和式の $\langle 2\varphi^{(22)} \Rightarrow 0 \rangle$ 項の変分式 $\langle 2\varphi^{(11)} \Rightarrow 0 \rangle$ 項は、後述のキーパラメータ変分法で満たして置く。

$\langle \varphi^{(02)} - \varphi^{(20)} \Rightarrow 0 \rangle$ は 45° 回転系の $\langle 2\varphi^{(11)} \Rightarrow 0 \rangle$ でもあることは広く知られている。

そこで dHd 法：デカルト座標法の $\langle \varphi^{(02)} - \varphi^{(20)} \Rightarrow 0 \rangle$ と $\langle 2\varphi^{(11)} \Rightarrow 0 \rangle$ でせん断力分布を多方向に最小化して行く。

$\langle D_b(\varphi^{(20)} - \varphi^{(02)}) \Rightarrow 0 \rangle$ は、上述のように Kirchhoff 重調和式: $\langle D_b \nabla^2 \nabla^2 \varphi = q \rangle$ の項の 共役変数最小化 であるが、剛体変形最小化 $\langle D_b \text{curl}^2 \varphi \Rightarrow 0 \rangle$ と共に 互いに、共役変数として 最小化して行く。

結論：方向性を有す 外力仕事量を受け入れながら、かつ $\langle \nabla \nabla \varphi \Rightarrow 0 \rangle$ を満たして行くのが 多方向有限要素法(共役変数法)である。

(2) C1 級板曲げ要素

C1 級板曲げ要素の ノードパラメータは図1である。

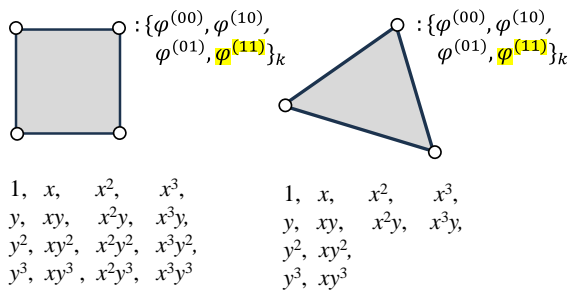


図1 C1 級板曲げ要素

C1 級要素の特徴は、頂点ノード k のパラメータベクトルに $\langle \varphi^{(11)} \rangle_k$ を含む ことである。 ($\varphi \equiv w$)

このパラメータ $\langle \varphi^{(11)} \rangle_k$ を、要石(key stone)に因み、“キーパラメータ”と呼んでいる。

45° 回転系の $\langle \varphi^{(20)} - \varphi^{(02)} \Rightarrow 0 \rangle$ は、デカルト座標系表示では: $\langle 2\varphi^{(11)} \Rightarrow 0 \rangle$ であることは上述した。

最小2乗変分式: $\langle 2\varphi^{(11)} \Rightarrow 0 \rangle$ は、キーパラメータを変数とし、キーパラメータの変分式で満たして行く。(つまり、キーパラメータ $\langle \varphi^{(11)} \rangle_k$ は $\langle 2\varphi^{(11)} \Rightarrow 0 \rangle$ の変分のみに使う。)

3Dでは、准C1級要素は $\langle \varphi^{(110)}, \varphi^{(011)}, \varphi^{(101)} \rangle_k$ を含

み、C1級要素は 更に $\langle \varphi^{(111)} \rangle_k$ も含む。

したがって、准C2級・C2級要素のノードパラメータベクトルも明らかであろう。

なお、図1の関数項で表す高次要素を 同図のノードパラメータで表す技法が C1級・C2級、… のポイントである。(その技法は [Appendix-2] 参照のこと。)

4. 平板要素

(1) 版と板曲げのせん断変形

板曲げでは 面外せん断変形 (Reissner / Mindlin 理論) を省略するが、版では面内せん断変形: $\langle u^{(01)} + v^{(10)} \rangle$ も考慮する。

したがって 板曲げも、対応する 面内せん断を考慮し、版のせん断変形を 式(1)の弱形で、相殺(平衡)させる。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{1}{h} (u^{(01)} + v^{(10)}) = 0 \quad (1)$$

既に述べたが、 z は中立面を局所原点とする。(h は板厚。)

式(1)は dz で平衡させる。弱形式は 式(2)で組立てる。

$$2\varphi^{(11)} + (u^{(01)} + v^{(10)}) = 0 \quad (2)$$

(2) 耐震壁の計算法

建築物の耐震壁とラーメン構造の 地震時の水平力分担率は、構造設計者の いわゆる判断 で決める要素が大きい。

ただ、耐震壁は地中ばりと一体となって、片持ちばりとして機能する例ばかりではなく、一階部分がピロティで、2階以上から機能する、など様々である。

したがって、ラーメン構造に 耐震壁を 1枚の有限要素として組み込んで、一体として計算する方法の結果は、設計者の判断資料として重要である。(経験だけでは対応できない資料が得られる。)

その考え方は、有限要素法が構造計算に取り入れられた初期から在った。

ただ、未だに片持ちばりとして組み込んでいる、ようである。

有限要素として組み込んでも、期待するような結果が得られないからです。

その原因は、板曲げ計算で 期待する結果が得られなかった のと同じである。

つまり、いずれもせん断力計算に、共役変数としての剛体回転(渦度)の 最小化計算を組み込まなければ、桁落ちを防げない。

よって、横成分の $\langle shru^T \rangle$ 計算 と $\langle curlu^T \Rightarrow 0 \rangle$ 計算を 同時に行うことで解決する。

縦成分 $\langle \nabla u^L \rangle$ で表す 片持ちばり計算と、同時に行うものである。

横成分・縦成分を いずれもポテンシャル表示すれば、前者は $\langle shr\{\psi^{(01)}, -\psi^{(10)}\} \rangle$ と $\langle curl\{\psi^{(01)}, -\psi^{(10)}\} \rangle$ であり、後者(縦成分)は $\langle \nabla \nabla \varphi \rangle$ である。

流れ関数表示のせん断と スカラーポテンシャル表示のせん断は 等価： $\langle shr\{\psi^{(01)}, -\psi^{(10)}\} = shr \nabla \varphi \rangle$ である。

上述による計算の 要素剛性には、設計者の判断で、適当な係数を乗じる。

有限要素では表せない 構造上の条件を反映させる ための操作である。(一般には剛性低減率。)

5. 曲面板の計算法

(1) 曲面形状の表示要素

曲面形状は、NURBS モデルによるコンピュータグラフィックスで、C1級曲面として与え得る。

そのC1級曲面は、前述のC1級3D要素でも表し得る。

グラフィックス システムの 曲面上の点の座標値 (x,y,z) を、3D要素のノードパラメータ数以上の点で与え、最小2乗変分法で、3D要素のパラメータベクトル値を決定する。(NURBSのシステムで、ノードパラメータベクトル値を 直接与え得れば、形状要素作成は より簡潔。)

(2) 曲面上の板および版の変位と数値計算法

3D要素で表される 曲面上の点を、Gauss数値積分点で(積分点としても)選び、その点の接平面を $\langle d\Omega \rangle$ として平板：“平板・平版”を表し、“面内せん断”を介して、連成式(連立方程式の係数行列)を構築する。

ここでは、面外せん断変形はゼロ値とする。

また、簡潔な説明のため 変形で表すが、平衡式とし板の変形には板の剛性を、版の変形には 版の剛性を乗じる。

板の(板曲げのたわみ)変数は、上述どおり、 φ で表す。

版の変数は、横変数は流れ関数 $\langle \Psi \rangle$ で表し、縦変数は 板と区別するため、 $\langle \phi \rangle$ でも表す。($\phi \equiv \varphi$)

“面内せん断”を介して 連成式を構築するには、板の面内せん断と 版せん断の等値式に、版の共役変数最小化式も連立させる。

$$i.e.; \langle 2\varphi^{(11)} - shr \Psi \Rightarrow 0 \rangle, \langle curl \Psi \Rightarrow 0 \rangle$$

板曲げの式 $\langle D_b \nabla^2 \nabla^2 \varphi = q \rangle$ の計算時に、 $\langle \nabla^2 \varphi \rangle$ の共役変数最小化式を連成させる技法は 当該項で述べた。

版の縦成分計算も 同様に、dHd 法(多方向有限要素法)に 依っている。

(3) 板成分の面外せん断式

板曲げでの 面外せん断変位は 式も値も 無視できる。

曲面板では、面内せん断を考慮するなら 面外せん断は、ゼロ値であっても 残差分散計算を組み込む必要がある。

以下では、板・版 2D要素の座標系は $\langle s, n, \zeta \rangle$ とし、

導関数パラメータの右上添え字も その並び とする。

連立方程式を表すパラメータの系は デカルト座標系 $\langle x, y, z \rangle$ とする。

面内せん断は $\langle \Psi_3^{(010)} + \Psi_3^{(100)} (\Psi_3^{(001)} = 0) \rangle$ であるが、代数的に2D要素： $(\Psi_3^{(001)} = 0)$ とし、多方向計算： $\langle \Psi_3^{(01*)} \Rightarrow 0, \Psi_3^{(10*)} \Rightarrow 0 \rangle$ とする。

同様に 面外せん断は、 $n - \zeta$ 面は $\langle \Psi_1^{(001)} + \Psi_1^{(010)} \rangle$ 、 $\zeta - s$ 面は $\langle \Psi_2^{(100)} + \Psi_2^{(001)} \rangle$ であるが、それぞれ2D化し、各項の最小化式 $\langle \Psi_1^{(*)01} \Rightarrow 0, \Psi_1^{(*)10} \Rightarrow 0, \dots \rangle$ を弱形式で組み込む。

(4) 有限要素

有限要素 (φ, Ψ) の形状は、板・版 いずれも2Dであるが、連成用の頂点ノード点 k のパラメータは3Dベクトルとする。

$\langle \Psi \rangle$ は 変位要素同様 C0 級とする。ただし、連成用の頂点ノード点 k のパラメータは： $\langle \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}_k \rangle$ とする。($\langle x, y, z \rangle$ 系。)

それらは 隣接要素と共有し、計算時に 当該版要素のノードパラメータ $\langle \{\Psi\}_k \rangle$ に変換する。

$\langle \{\Psi\}_k \rangle$ に変換した 残りの成分で 面外せん断式を積分して、連立方程式に組み込む。

同様に 縦成分も 3Dの頂点ノードのパラメータベクトル $\langle \{\varphi, \nabla \varphi, \dots, \varphi^{(222)}\}_k \rangle$ とし、図2のように、2Dの板・版の成分にそれぞれ変換して計算し、連立させる。

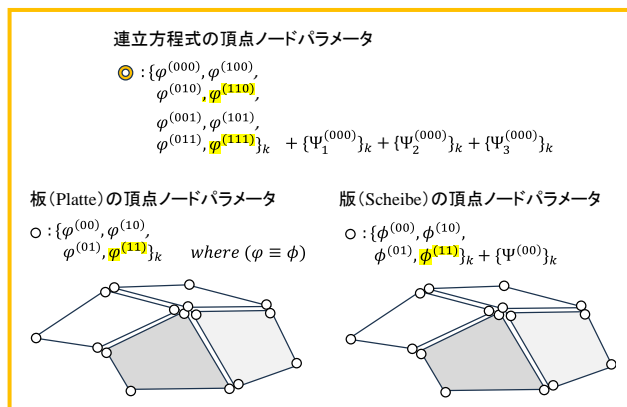


図2 曲面板要素のノードパラメータ

図2は折板で示したが、形状要素はC1級(NURBSに同じ)として 連立方程式頂点ノードを、その接平面状に 変換して行く。

(5) 板曲げでの検証問題

ひとつは、既報の周辺固定正方形板計算例に、図2の版要素を加え、 $\langle \Psi \rangle$ 要素の パラメータを 新たに加える効果を検証する。

いまひとつは 更に、図2と同じ要素群と 連立方程式頂点ノードで 周辺固定正方形板を表し、面外せん断ゼロとノンゼロ値の両方を与え、そのスキームを検証する。

(6) C1 級 ψ 要素の適用法

薄肉シェル構造は 詰まる処 座屈などの有限変形解析に発展せざるを得ない。

そのためには 微小変形計算システムの段階から、横成分には 変位計算が可能な ψ 要素を適用して置く方が 望ましい。

C1 級 ψ_i 要素を 版に、2D化 流れ関数要素として、板と同じ $(s-n)$ 面には ψ_3 を、 $(n-\zeta)$ 面には ψ_1 を、 $(\zeta-s)$ 面には ψ_2 を、それぞれ充てる。

連立方程式のパラメータは いずれも、 ϕ と同じパターンの パラメータベクトルとする。

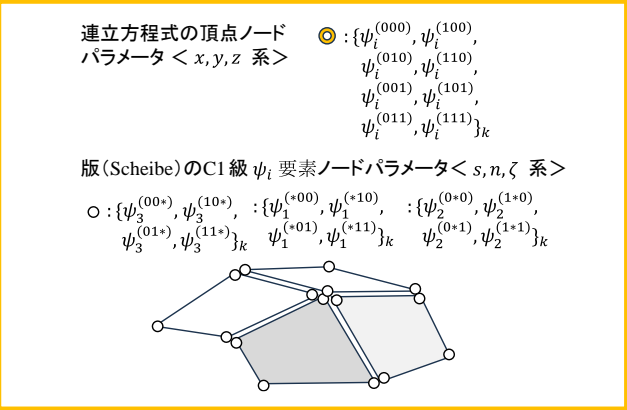


図3 C1 級 縦成分 ψ_i 要素のノードパラメータ

6. まとめと課題

板曲げ問題で、いわゆる変位型C1級要素法を確立し、報告して来た。

そのスキームのポイントは、① 多方向有限要素法(共役変数法)により、C1級要素の いわゆるアワーグラスモードを抑えたこと、② せん断分布 $\phi^{(11)}$ を キーパラメータで最小化したこと に在った。

Kirchhoff 理論では、“中立面”を“中点面”に一致させることはできないので、面内せん断分布 $\phi^{(11)}$ が表れる。

②は その最小化の操作であることに気付き、キーパラメータの他、版のパラメータ $\langle \Psi \rangle_k$ の自由度も使う方法を示した。

その“板・版”スキームは そのまま、曲面板解法として適用でき、その基本的方法を提示した。

曲面板のノードパラメータは、板・版 と 連立方程式の未知数としてのノードパラメータに分けて示した。

前者は 後者を座標変換して表す。

課題は、後者のキーパラメータの処理法に在る。

スカラー・パラメータの C0 級 Ψ_i 要素では問題ないが、 ψ_i 、 ϕ 要素では、後者のベクトル・パラメータに関して “キーパラメータ処理法確立” は、残された課題である。

付録1：等分布荷重・周辺固定正方形板

双3次 C^1 連続要素 Exact solution $1.265 (\times 10^{-3} q l^4 / D)$					
2×2	4×4	6×6	8×8	10×10	20×20
1.303	1.263	1.264	1.265	1.265	1.265
1.3030	1.2631	1.2643	1.2648	1.2651	1.2653

追加ケース：30×30では1.2653
40×40では1.2653

付録2：高次要素のノードパラメータ表示による計算法

有限要素の関数の係数ベクトルをノードパラメータ表示するには、三角形要素の例では、ノードパラメータベクトル $\{\varphi_k\} \equiv \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ を、先ず要素関数で表す。

つまり係数ベクトルを $\{\varphi^{(ij)}\}_0 \equiv \{\varphi^{(00)}, \varphi^{(10)}, \varphi^{(01)}\}_0$ とし、行列 $[A]$ を介し、 $\{\varphi_k\} = [A] \cdot \{\varphi^{(ij)}\}_0$ で表す。

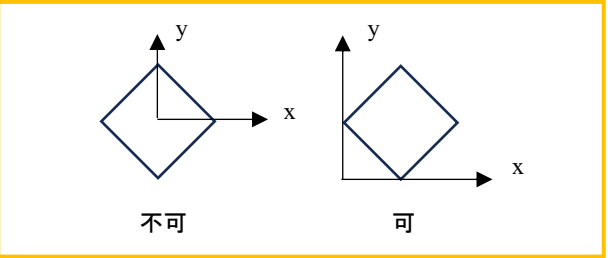
次いで、 $[A]^{-1}$ を計算して、 $\{\varphi^{(ij)}\}_0 = [A]^{-1} \cdot \{\varphi_k\}$ で表せばよい。

ただし、要素重心を局所原点として $[A] \cdot \{\varphi^{(ij)}\}_0$ を表したのでは、高次要素では $[A]^{-1}$ は計算できない。

そこで、要素を第I象限に置くよう、局所原点を設定して計算すれば、 $[A]^{-1}$ は確実に計算できる。

上述は高次要素に限らず、低次の C^0 要素でも、菱型要素の $[A]^{-1}$ は計算できない。(第I象限に置けば計算できる。)

上述の知見は、高次要素法を可能とする第1歩である。



参考文献

[1] 例えば：数学ハンドブック，丸善，pp.258, 1960.
[2] 培風館，有限要素法ハンドブック I，p.p.291
[3] 今村：重調和関数方程式の解法 / 新しい板曲げスキーム，並びに(適化/アイソレート化)ノード法，Locking-free要素，計算工学講演会2024，Vol.29 (2024).