

# 非深層学習の代理均質化モデルによる 非線形複合材料の三次元有限変形マルチスケール解析

Three-Dimensional Multiscale Analysis  
Using RBF-Based Surrogate Homogenization Model at Finite Strain

中村 明莉<sup>1)</sup>, 山中 耀介<sup>2)</sup>, 野村 恵佳<sup>3)</sup>, 森口 周二<sup>4)</sup>, 寺田 賢二郎<sup>5)</sup>  
Akai Nakamura, Yosuke Yamanaka, Reika Nomura, Shuji Moriguchi, Kenjiro Terada

<sup>1)</sup>修(工) 東北大学 工学研究科 (〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, E-mail: akari.nakamura.q5@dc.tohoku.ac.jp)

<sup>2)</sup>博(工) 日本大学 生産工学部 (〒 275-8575 千葉県習志野市泉町 1-2-1, E-mail: yamanaka.yousuke@nihon-u.ac.jp)

<sup>3)</sup>博(工) 東北大学 災害科学国際研究所 助教 (〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1, E-mail: rnomura@tohoku.ac.jp)

<sup>4)</sup>博(工) 東北大学 災害科学国際研究所 准教授 (〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1, E-mail: shuji.moriguchi.d6@tohoku.ac.jp)

<sup>5)</sup>Ph.D. 東北大学 工学研究科 (〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, E-mail: tei@tohoku.ac.jp)

We propose a three-dimensional multiscale analysis method for hyperelastic composites using a surrogate homogenization model at finite strain. To create the constitutive database, numerical material tests are first conducted on a representative volume element, using various macroscopic strain histories that are randomly generated. Subsequently, radial basis function (RBF) interpolation is applied to the resulting dataset to construct the surrogate homogenization model. Also, a three-dimensional macroscopic finite element analysis is conducted using the obtained model to discuss the capability of the proposed method.

**Key Words :** Computational homogenization, multiscale analysis, Elastoplasticity, RBF interpolation, Finite deformation, surrogate modeling

## 1. 緒言

複合材料の力学的挙動を予測する手法として、均質化法に基づくマルチスケール解析 [1] が用いられている。一体型 (FE<sup>2</sup>) [2] と、分離型 [3] が従来の手法として代表的だが、それぞれ計算コストが高いことや、マクロ構成則の定式化とパラメータ同定が困難なことが課題とされる。これらの課題を解決する目的で、近年ではデータ駆動型の手法が注目を浴びている [4]。著者らは、これまで弾塑性複合材料のデータ駆動型マルチスケール解析を目的として、ミクロ境界値問題の計算プロセスを代替する代理均質化モデルを提案した [5,6]。しかし、これらの手法は二次元解析にのみ適用されており、三次元解析は未実施である。三次元の代理均質化モデルを構築するにあたり、必要となる応力-ひずみ関係のデータ数は次元の増加に伴って指数関数的に増加するため、従来手法ではモデルの構築が困難となる。したがって、三次元のマルチスケール解析を実現するには、学習データの取得方法そのものを効率化する必要がある。

そこで本研究では、超弾性複合材料を対象として、三次元の代理均質化モデルの学習データの取得方法について検討する。本手法では、マクロひずみの 6 成分を標準正規分布を用いてランダムに決定し、数値材料試験を実施してマクロ応力ひずみ関係のデータベースを構築する。このデータベースに対して放射基底関数 (Radial Basis Function: RBF) による大域補間を行い、代理均質化モデルを作成する。数値計算例では、作成したモ

ルを用いて三次元のマクロ解析を実施し、本手法の妥当性を検証する。

## 2. 2スケール境界値問題

3 次元空間において、周期的なミクロ構造 (RVE) を有する構造物の準静的問題を考える。2スケール収束理論 [7] によれば、構造物の全体領域  $\Omega^e$  はミクロ領域  $\epsilon\Omega^0$  とマクロ領域  $\tilde{\Omega}^0$  にスケール分離され、 $\Omega^e = \tilde{\Omega}^0 \times \epsilon\Omega^0$  と表される。ここで、 $\epsilon$  は全体領域に対するミクロ領域の大きさを表す無次元パラメータである。また、ミクロ領域の物質点  $Y \in \epsilon\Omega^0$  はマクロ領域の物質点  $X \in \tilde{\Omega}^0$  に関連して  $Y = X/\epsilon$  と表される。

マクロ領域の物質点  $X \in \Omega^e$  におけるマクロ変位を  $\tilde{u}(X)$  とすると、対応するユニットセルの物質点  $Y \in \Omega_0$  のミクロ変位は次式で表される。

$$u(X, Y) = \nabla_X \tilde{u}(X) \cdot Y + u'(X, Y) \quad (1)$$

ここで、 $\nabla_X \bullet$  は  $\bullet$  の  $X$  に関する勾配であり、 $u'(X, Y)$  は擾乱変位である。このとき、マクロ変形勾配  $\tilde{F}(X)$  とミクロ変形勾配は次式のようになる。

$$\tilde{F}(X) = \nabla_X \tilde{u}(X) + I \quad (2)$$

$$F(X, Y) = \tilde{F}(X) + \nabla_Y u'(X, Y) \quad (3)$$

ここで、 $I$  は恒等テンソルであり、 $\nabla_Y \bullet$  は  $\bullet$  の  $Y$  に関する勾配である。擾乱変位について、ミクロ領域内で  $Y$  について周期的に分布する  $Y$ -周期性を仮定すると、

式(3)より次の関係が得られる。

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{X}) = \frac{1}{|\Omega^0|} \int_{\Omega_0} \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \quad (4)$$

つまり、ミクロ変形勾配  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  の体積平均はマクロ変形勾配  $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{X})$  と等しい。

ミクロ変位  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$  は次式で表されるミクロスケールの仮想仕事式を解くことで得られる。

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \nabla_{\mathbf{Y}} \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} = 0 \quad (5)$$

ここで、 $\delta \mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  はミクロ仮想変位である。また、 $\mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  はミクロ第一 Piola-Kirchhoff (PK) 応力であり、任意のミクロ構成則を用いて計算される。

マクロスケールの仮想仕事式は

$$\int_{\Omega^0} \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{X}) : \nabla_{\mathbf{X}} \delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \mathcal{G}^{\text{ext}}(\delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})) \quad (6)$$

と表すことができ、 $\delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X})$ 、 $\mathcal{G}^{\text{ext}}(\delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}))$  はそれぞれマクロ仮想変位、外部仮想仕事である。また、 $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{X})$  はマクロ第一 PK 応力であり、次式で定義する。

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{X}) = \frac{1}{|\Omega^0|} \int_{\Omega^0} \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \quad (7)$$

### 3. RBF 補間にに基づく代理均質化モデル

本節では、超弾性複合材料の RBF 補間にに基づく有限変形代理均質化モデル [6] について説明する。まず、一般的なデータベースに対する RBF 補間について述べたあと、代理均質化モデルの定義について説明する。

#### (1) 一般的なデータベースに対する RBF 補間

補間の対象とするデータベース  $\mathbb{D}^{\text{interpol}}$  に含まれる  $N_c$  個の既知のデータ点  $\mathbf{f}_{(i)} \in \mathbb{R}^{N_i}$  と応答  $\phi_{(i)} \in \mathbb{R}^{N_o}$  が次のような一対一の対応関係にあるとする。

$$\phi_{(i)} := \phi(\mathbf{f}_{(i)}) = \begin{bmatrix} \phi_{(i)1} & \phi_{(i)2} & \cdots & \phi_{(i)N_o} \end{bmatrix}^T, \quad (i = 1, \dots, N_c). \quad (8)$$

また、任意の入力  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N_i}$  と既知のデータ点  $\mathbf{f}$  の距離  $r$  をユーリッドノルム  $r_{(i)}(\mathbf{f}) := \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_{(i)}\|$  で定義する。この距離  $r$  を独立変数とするスカラー値関数である RBF を基底関数として、任意のデータ点に対する応答式を近似的に表すことを考える。このとき、補間するデータベースに対して適切な基底関数となるように、パラメータ  $n_{\psi}$  によって場合分けされる以下の RBF を用いる。

$$\psi(r_{(i)}(\mathbf{f})) = \begin{cases} n_{\psi} = 1: & \exp \left\{ -\pi \left( \frac{r_{(i)}(\mathbf{f})}{\beta} \right)^2 \right\} \\ n_{\psi} = 2: & \left\{ 1 - \frac{r_{(i)}(\mathbf{f})}{\beta} \right\} \\ n_{\psi} = 3: & \left\{ \ln \left( \left\langle -\frac{2r_{(i)}}{\beta} + e - 1 \right\rangle + 1 \right) \right\} \end{cases} \quad (9)$$

$\beta$  および  $n_{\psi}$  はハイパーパラメータであり、全てのデータ点に対して一意に定められる。この RBF を用いて、式(8)のベクトル値関数  $\phi$  は次のように近似される。

$$\phi(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^{N_c} \omega_{(i)} \psi'(r_{(i)}(\mathbf{f})) \quad (10)$$

ここに、 $\psi'$  は正規化された RBF である。

$$\psi'(r_{(i)}(\mathbf{f})) \equiv \frac{\psi(r_{(i)}(\mathbf{f}))}{\sum_{j=1}^{N_c} \psi(r_{(j)}(\mathbf{f}))} \quad (11)$$

また、 $\omega_{(i)} \in \mathbb{R}^{n_o}$  は重み係数であり、次式より求められる

$$\mathbf{W} = (\mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{\Psi}^T + \eta \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{\Psi}^T \mathbf{P} \quad (12)$$

ここで、 $\mathbf{W}$ 、 $\mathbf{\Psi}$ 、 $\mathbf{P}$  は重みベクトル、カーネル行列および応答データ行列であり、以下のように定義した。

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \omega_{(1)} & \dots & \omega_{(N_c)} \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \phi_{(1)} & \dots & \phi_{(N_c)} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{N_c \times N_o} \quad (14)$$

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi'(r_{(1)}(\mathbf{f}_{(1)})) & \dots & \psi'(r_{(N_c)}(\mathbf{f}_{(1)})) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi'(r_{(1)}(\mathbf{f}_{(N_c)})) & \dots & \psi'(r_{(N_c)}(\mathbf{f}_{(N_c)})) \end{bmatrix} \quad (15)$$

加えて、式(12)の係数  $\eta$  は正則化パラメータと呼ばれ、適切な値を与えることで教師データに対する過剰適合を抑制する効果がある。しかし、 $\eta$  の適切な値は理論的に求めることができないため、最適化により他のハイパーパラメータ  $(\beta, n_{\psi})$  と同時に決定する。本研究では、差分進化 [8] を用いて次の損失関数  $\bar{e}$  を最小化するようなパラメータの組を最適解として求める。

$$\bar{e} = \sqrt{\sum_{i_0=1}^{N_0} \sum_{i=1}^{N_{\text{tst}}} \frac{\{\phi_{i_0}(\mathbf{f}_{(i)}^{\text{tst}}) - \phi_{(i)i_0}^{\text{tst}}\}^2}{N_{\text{tst}}}} \quad (16)$$

なお、 $N_{\text{tst}} \in \mathbb{N}$  は補間するデータベース  $\mathbb{D}^{\text{interpol}}$  とは異なるデータベース  $\mathbb{D}^{\text{test}}$  に含まれる、RBF 補間の精度と汎化能力を評価するためのデータ点  $\mathbf{f}_{(i)}^{\text{tst}}$  と応答  $\phi_{(i)}^{\text{tst}}$  の数である。

#### (2) 超弾性複合材料の代理均質化モデル

超弾性複合材料のマクロ第 2PK 応力  $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  を、RBF 補間によって得られるベクトル値関数  $\phi(\mathbf{f}) \in \mathbb{R}^6$  を用いて次のように求める。

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathcal{G} \cdot \phi(\mathbf{f}) \quad (17)$$

ここで、関数  $\phi$  は第 2PK 応力テンソル  $\tilde{\mathbf{S}}$  の各成分を応答とし、Voigt 表記を用いて次のように表される。

$$\phi(\mathbf{f}_{(i)}) = \phi_{(i)} := \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{22} & \tilde{S}_{33} & \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{23} & \tilde{S}_{13} \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

また、 $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 6}$  はベクトルを 2 階テンソルに変換する 3 階テンソルである。さらに、説明変数  $\mathbf{f}$  は次のように定める。

$$\mathbf{f}_{(i)} := \{\tilde{U}_{11}, \tilde{U}_{22}, \tilde{U}_{33}, \tilde{U}_{12}, \tilde{U}_{23}, \tilde{U}_{13}\}^T \quad (19)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{U}}$  はマクロ変形勾配  $\tilde{\mathbf{F}}$  を Flory 分解することで得られる右ストレッチテンソルである。

また、式(17)のマクロ第2PK応力を用いると、式(6)のマクロつり合い問題におけるマクロ第1PK応力  $\tilde{\mathbf{P}}$  は次式のように表される。

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{S}}(\phi(f)) \quad (20)$$

最後に、マクロつり合い問題をマクロ変位  $\tilde{\mathbf{u}}$  に関して解くために必要な材料接線係数は初期配置において以下のとおり解析的に求めることができる。

$$\tilde{\mathbb{C}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{S}}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} = \mathcal{H} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{U}}} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} \quad (21)$$

このようにして得られた初期配置のマクロ接線係数を、次式で定義する第1PK応力  $\tilde{\mathbf{P}}$  と変形勾配  $\tilde{\mathbf{F}}$  に対応した接線係数に変換する。

$$\frac{\partial \tilde{P}_{ij}}{\partial \tilde{F}_{kl}} = \tilde{F}_{im} \tilde{F}_{kn} \mathbb{C}_{mnl} + \delta_{ik} \tilde{S}_{lj} \quad (22)$$

### (3) 学習データの取得方法

代理均質化モデルの構築に必要なデータベースを作成するために、代表体積要素 (Representative Volume Element: RVE) に対してさまざまなパターンのマクロ変形勾配を与えて数値材料試験を実施する。この際に与える変形勾配  $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}$  の回転成分は常に  $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I}$  で固定し、ストレッチ  $\tilde{\mathbf{U}}$  の時刻歴を作成することで NMT で与えるマクロ変形勾配の履歴を決定する。さらに、与える時刻歴  $\tilde{\mathbf{U}}(t)$  を次式のように表す。

$$\tilde{\mathbf{U}}(t) = \tilde{\mathbf{U}}^r \lambda(t) + \mathbf{I} \quad (23)$$

ここで、 $\lambda(t)$  は時刻  $t$  における成分比率の大きさをスカラーで表すロードファクターである。 $\tilde{\mathbf{U}}^r \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  は  $\tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{I}$  の各成分の比率を表す定数の対称テンソルであり、フロベニウスノルムが  $\|\tilde{\mathbf{U}}^r\| = 1$  となるように決定する。なお、このテンソルを以下では成分比率テンソルと呼ぶ。

なお、著者らの先行研究 [6] では、マクロスケールにおいて平面ひずみ条件を仮定し、成分比率テンソルのうち  $(\tilde{U}^r_{11}, \tilde{U}^r_{22}, \tilde{U}^r_{12})$  のみを単位球面上から等間隔にデータ点を取得した。しかし、この手法を三次元に拡張すると、必要なデータ点数が次元の増加に伴って指數関数的に増加するため、RBF 補間によるモデル構築は現実的でない。そこで本研究では、Muller が提案した標準正規分布に基づく高次元球面上の一様サンプリング手法 [9] を用いる。まず、成分比率テンソルの独立な 6 成分を  $\mathbf{v} = (\tilde{U}^r_{11}, \tilde{U}^r_{22}, \tilde{U}^r_{33}, 2\tilde{U}^r_{12}, 2\tilde{U}^r_{23}, 2\tilde{U}^r_{31})^\top$  とおく。次に、ベクトル  $\mathbf{v}^* \in \mathbb{R}^6$  の各成分を標準正規分布に従って独立に生成し、次式のように正規化することで  $\mathbf{v}$  を得る。

$$v_i = \frac{v_i^*}{\sqrt{\sum_{j=1}^N x_j^{*2}}} \quad (24)$$

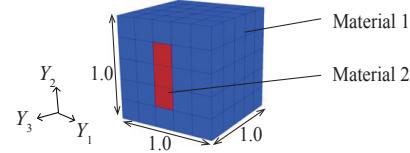


図-1 RVE model

### 4. 数値計算例

数値計算例を通して、提案手法の妥当性について検討する。本例題では、基礎的検討として超弾性体の RVE モデルを用いてマルチスケール解析を実施する。用いる RVE モデルを図-1 に示す。Material 1, Material 2 の材料構成則はともに Neo-Hookean 超弾性構成則であり、それぞれのヤング率は  $E_1 = 1.0 \times 10^3$  MPa,  $E_2 = 1.0 \times 10^5$  MPa, ポアソン比は  $\nu_1 = 0.2, \nu_2 = 0.3$  である。

### 5. オフライン計算

RBF 補間と最適化に必要なデータベース  $\mathbb{D}^{\text{interpol}}$  と  $\mathbb{D}^{\text{test}}$  を作成するために、(3) で述べた方法でマクロ変形勾配履歴を作成して数値材料試験 (NMT) を実施する。データベース  $\mathbb{D}^{\text{interpol}}$  では、200 種の成分比率  $\tilde{\mathbf{U}}(t)$  を用意し、各成分比率ごとにロードファクターを 0 から 0.1 まで変化させ、0.01 刻みでデータを 11 点取得した。データベース  $\mathbb{D}^{\text{test}}$  については、1400 種の成分比率  $\tilde{\mathbf{U}}(t)$  を用意し、ロードファクターを 0 から 0.1 まで変化させ、等間隔に 14 点のデータ点を取得した。作成したデータベースを用いて最適化を実施し、得られたハイパーパラメータを表-1 に示す。

表-1 Hyperparameters

$n_\phi$	$\beta$	$\eta$
1	$2.83 \times 10^{-1}$	$7.44 \times 10^{-9}$

得られた代理均質化モデルの精度検証のため、データベース  $\mathbb{D}^{\text{interpol}}$  と  $\mathbb{D}^{\text{test}}$  に含まれるマクロ第2PK応力を再構築する。図-2 は、データベース  $\mathbb{D}^{\text{interpol}}$  と  $\mathbb{D}^{\text{test}}$  に含まれるすべての第2PK応力に対応する代理均質化モデルの応答を青色のマーカーで表している。なお、グラフの横軸がデータの値であり、縦軸は代理均質化モデルの応答である。また、赤色の直線は代理均質化モデルの応答が教師データの値に完全に一致する場合の基準線を示しており、全てのマーカーが基準線付近に分布しているため、代理均質化モデルが教師データを精度よく再現していることを確認できる。

### (1) オンライン計算

作成した代理均質化モデルを用いてマクロ構造の有限要素解析を実施し、FE<sup>2</sup> の結果と比較する。図-3 はマクロ構造の有限要素メッシュと境界条件を示しており、モデル左端は変位を固定し、右端の縁に等分布荷重を与える。図-4 は、モデル右端の等分布荷重が作用する縁のうち、手前側の縁における荷重-変位曲線を示す。ここで、FE-Surr と FE<sup>2</sup> はそれぞれ代理均質化モデルを用い

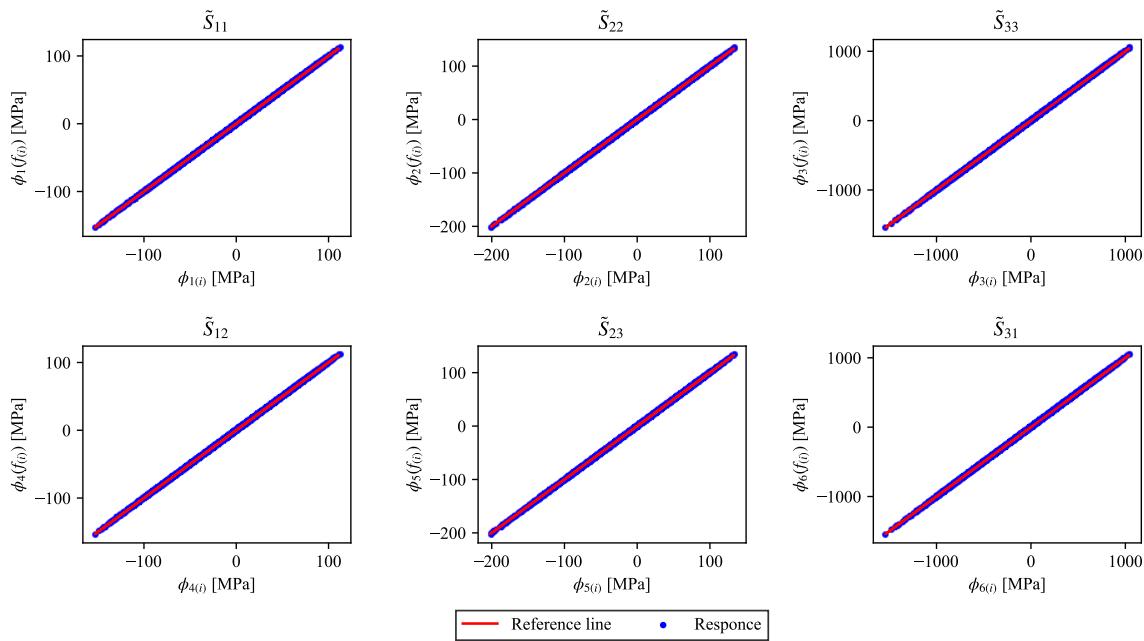


図-2 Reconstruction of surrogate model

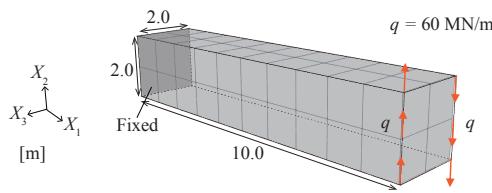


図-3 Macrostructure

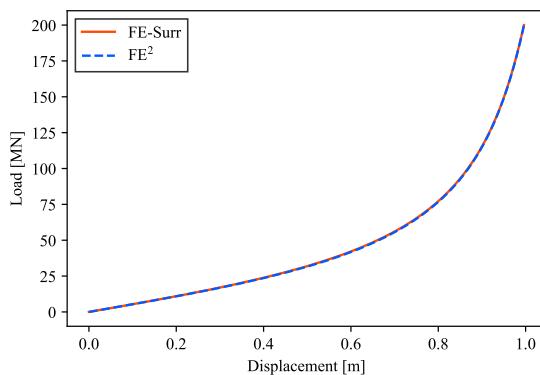


図-4 Load-displacement curve

たマクロ解析と  $FE^2$  法の結果である。図から、提案手法と  $FE^2$  の結果はよく一致していることが確認できる。

さらに、図-5 は等分布荷重を与えたときのマクロ構造の変位量分布と変形を示している。この結果より、2 つの手法から得られた変位量分布は一致しており、構築した代理均質化モデルが従来の  $FE^2$  と同様の精度で超弾性材料のマルチスケール解析を実施可能であることが分かる。

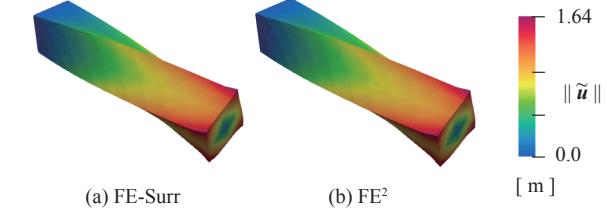


図-5 Displacement magnitudes of the macrostructures with the actual configurations

## (2) 結論

本研究では、有限変形理論の枠組みで超弾性体複合材料の三次元マルチスケール解析を実施した。本手法では、右ストレッチテンソルの成分比率テンソルの6成分を Muller の手法により一様にランダム生成し、数値材料試験を行うことでマクロ応力 - ひずみ関係のデータベースを構築した。そして、このデータベースに対して RBF による大域補間を行い、代理均質化モデルを作成した。数値計算例では、構築したモデルを用いて三次元のマクロ解析を実施し、提案手法の妥当性を検証した。その結果、従来の  $FE^2$  と同様の精度で超弾性材料のマルチスケール解析を実施可能であることが確認された。今後は、本手法を弾塑性複合材料のマルチスケール解析へと拡張する。

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 JP24KJ0418 の助成を受けたものです。

## 参考文献

- [1] P. Kanouté, D. P. Boso, J. L. Chaboche, and B. A. Schrefler. Multiscale methods for composites: A re-

- view. *Arch. Comput. Methods Eng.*, Vol. 16, No. 1, pp. 31–75, 2009.
- [2] K. Terada, I. Saiki, K. Matsui, and Y. Yamakawa. Two-scale kinematics and linearization for simultaneous two-scale analysis of periodic heterogeneous solids at finite strain. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 192, No. 31-32, pp. 3531–3563, 2003.
- [3] Robert Fleischhauer, Tom Thomas, Junji Kato, Kenjiro Terada, and Michael Kaliske. Finite thermo-elastic decoupled two-scale analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 121, No. 3, pp. 355–392, 2020.
- [4] Jan N. Fuhg, Michele Marino, and Nikolaos Boukoula. Local approximate gaussian process regression for data-driven constitutive models: development and comparison with neural networks. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 388, p. 114217, 2022.
- [5] Y. Yamanaka, S. Matsubara, N. Hirayama, S. Moriguchi, and K. Terada. Surrogate modeling for the homogenization of elastoplastic composites based on RBF interpolation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 415, p. 116282, 2023.
- [6] Akari Nakamura, Yosuke Yamanaka, Reika Nomura, Shuji Moriguchi, and Kenjiro Terada. Radial basis function-based surrogate computational homogenization for elastoplastic composites at finite strain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 436, p. 117708, 2025.
- [7] Grégoire Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 23, No. 6, pp. 1482–1518, 1992.
- [8] R. Storn and K. Price. Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *J. Glob. Optim.*, Vol. 11, No. 4, pp. 341–359, 1997. Cited By :19885.
- [9] Mervin E. Muller. A note on a method for generating points uniformly on n-dimensional spheres. *Commun. ACM*, Vol. 2, No. 4, p. 19–20, April 1959.