

ひずみ勾配塑性論における境界条件の扱い

On the treatment of boundary conditions in strain gradient plasticity

小川展輝¹⁾, 黒田充紀²⁾

Hiroki OGAWA and Mitsutoshi KURODA

1) 山形大学・院 Graduate Student, Yamagata University

2) 山形大学院 Graduate school of Science and Engineering, Yamagata University

Strain gradient plasticity theory requires microscopic boundary conditions regarding plastic strains for boundary value problems. However, numerous studies in the literature have reported analyses conducted without consideration of such microscopic boundary conditions. The present study quantitatively examines differences between finite element solutions with and without consideration of microscopic boundary conditions, employing a plastic flow localization problem.

Key Words: Strain gradient plasticity, Viscoplasticity, Size effects, Finite element method

1. 諸言

古典的塑性論では実験で繰り返し報告されるサイズに依存する現象を表現できないという理由から, Aifantis[1]の先駆的研究以降, ひずみ勾配理論の理論的及び実験的研究が盛んに行われてきた. 最初期にAifantis[1]が提案した塑性ひずみ勾配を付与した降伏関数の最も簡単な形式は次の通りである.

$$\sigma_e + \nabla \cdot \mathbf{g}^p - H(\varepsilon^p) = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{g}^p = \beta \nabla \varepsilon^p \quad (2)$$

ここに, σ_e は von Mises 相当応力, ∇ は空間微分演算子, $H(\varepsilon^p)$ はひずみ硬化／軟化関数, β は次元整合のための係数（力の次元）である.

式(1)は空間勾配項を含むことから, 塑性ひずみ ε^p 又はその勾配 $\nabla \varepsilon^p$ に対する境界条件の設定が必須となる. 本研究では, ε^p に関する境界条件を“微視的境界条件”と呼ぶ. 不動態皮膜で拘束された金属層の単純せん断問題[2], 自由支持薄板の純曲げ問題[3]は界面法線方向の塑性ひずみ勾配が支配的であり, これを例にすれば, 微視的境界条件はその物体の変形挙動を本質的に決定づけるほど重要なである.

一方, 微視的境界条件を意識せずに解く方法も多数の文献で採用されている（最近では[4]）. 式(1)にべき乗型のひずみ速度依存性を考慮すると次のようになる.

$$\sigma_e + \nabla \cdot \mathbf{g}^p - H(\varepsilon^p) \left(\frac{\dot{\phi}^p}{\dot{\phi}_0} \right)^m = 0 \quad (3)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \sqrt{2/3} \dot{\phi}^p \quad (4)$$

ここに, m は速度感受性指数, $\dot{\phi}^p$ と $\dot{\phi}_0$ は塑性乗数（次元は time^{-1} ）とその基準値である. $m \rightarrow 0$ とすると式(3)は式(1)に一致する. 式(3)を $\dot{\phi}^p$ で解くと次式のようになる.

$$\dot{\phi}^p = \dot{\phi}_0 \left(\frac{\sigma_e + \nabla \cdot \mathbf{g}^p}{H(\varepsilon^p)} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (5)$$

従来理論による増分計算過程において, 現在発生している ε^p の 2 次空間勾配相当量 $\nabla \cdot \mathbf{g}^p$ を数値的に評価して式(5)に代入し, $\dot{\phi}^p$ を流動則に用いれば微視的境界条件を導入すること無く, 塑性ひずみ勾配を考慮した解析を逐次進

めることができるものである. このような微視的境界条件を無視した近似解析と式(1)（あるいは式(3)）を偏微分方程式として正しく解いた結果がどの程度一致するのか定量的に評価した研究は著者らの知る限りない.

本研究では, 初期不整に誘発されるせん断帯が発生する問題を例に, 正しく微視的境界条件を考慮する場合とそれを無視して解析した場合で解がどの程度一致するか検討したので報告する.

2. 問題設定

形状初期不整を持つ平面ひずみブロックの引っ張り解析を行う. 引張り変形を受ける幅 $2w_0$, 高さ $2h_0$ の平面ひずみブロック ($h_0/w_0 = 3$) を解析対象とするが, 実際には対称性を考慮して 1/4 部分を解く (Fig. 1). 右端面には振幅 $0.005w_0$ を持つ余弦波状の幾何学初期不整を与える. 上端面に強制変位速度 \dot{U} を与える. この問題を有限要素法により, Fig. 1 に示す 2 種類の要素分割 ((a) Coarse mesh of 10×30 quadrilaterals and (b) Fine mesh of 20×60 quadrilaterals) を用いて解析する. 有限要素定式化の詳細は後に述べる.

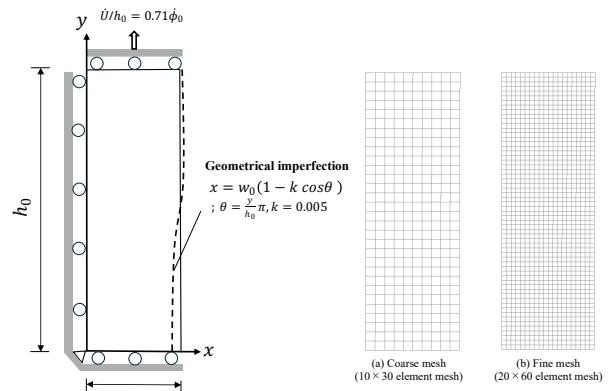


Fig. 1. Tensile problem of plane strain block with geometrical imperfection and its finite element discretization; (a) Coarse mesh (10×30 element mesh) and (b) Fine mesh (20×60 element mesh)

3. 理論と解析方法

3.1 基礎式

Kuroda[5]による有限変形を考慮した理論を採用する。ただし、空間勾配演算子は初期形状を参照した ∇_0 を用いる。全ひずみ速度 \mathbf{D} を弾性部分 \mathbf{D}^e と塑性部分 \mathbf{D}^p の加算分解で考え、 J_2 流動則を採用する。すなわち、

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (6)$$

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{C}^{-1} : \dot{\mathbf{r}} \quad (7)$$

$$\mathbf{D}^p = \phi^p \mathbf{N}^p \quad ; \quad \mathbf{N}^p = \dot{\mathbf{r}}' / |\dot{\mathbf{r}}'| \quad (8)$$

ここに、 ϕ^p は塑性乗数、 $\dot{\mathbf{r}}$ は Kirchhoff stress、 $\dot{\mathbf{r}}'$ はその偏差成分、 $\dot{\mathbf{r}}'$ は $\dot{\mathbf{r}}$ の Jaumann 速度、 \mathbf{C} はヤング率 E とポアソン比 ν のみで決まる等方線形弾性テンソルである。

式(3)にあるひずみ硬化／軟化関数 $H(\varepsilon^p)$ には、材料軟化を考慮した式(9)を用いる[6]。

$$H(\varepsilon^p) = \sigma_0 f_s(\varepsilon^p) \quad ; \quad f_s(\varepsilon^p) = \frac{S_1}{\sigma_0} - \left(\frac{S_1}{\sigma_0} - 1 \right) \exp \left[- \frac{S_2}{S_1} \varepsilon^p \right] \quad (9)$$

ここに、 σ_0 は参照応力値、 S_1 、 S_2 は応力次元のパラメータであり $S_2/S_1 = 6$ とする。 $\sigma_0/E = 1.6833 \times 10^{-4}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、基準塑性乗数 $\phi_0 = 0.02828 [s^{-1}]$ 、速度感受性指数 $m = 0.01$ とする。

式(3)に現れる β は次式で与える。

$$\beta = \sigma_0 l^2 \quad (10)$$

ここに、 l は材料の固有長さである。

3.2 数値計算方法

3.2.1 厳密手法（微視的境界条件を与える）

Kuroda and Tvergaard [7] の方法を採用する。変位速度 $\dot{\mathbf{u}}$ に加えて、 $\nabla_0 \dot{\varepsilon}^p$ を付加的節点自由度とする。時間積分には rate-tangent modulus 法[8]を採用し、要素剛性方程式は次の形となる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(uu)} & \mathbf{K}^{(ug)} \\ \mathbf{K}^{(gu)} & \mathbf{K}^{(gg)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{G}}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{F}}^{(u)} \\ \dot{\mathbf{F}}^{(g)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここに、 $\{\dot{\mathbf{U}}\}$ は節点量としての $\dot{\mathbf{u}}$ 、 $\{\dot{\mathbf{G}}^p\}$ は節点量としての $\nabla_0 \dot{\varepsilon}^p$ 、 $[\mathbf{K}^{(\cdot \cdot)}]$ は部分剛性行列、 $\dot{\mathbf{F}}^{(\cdot)}$ は部分荷重ベクトルである。本研究ではこの方法を ESGVP (Exact strain gradient viscoplasticity) と表記する。 $\{\dot{\mathbf{U}}\}$ に対しては 8 節点低減積分要素、 $\{\dot{\mathbf{G}}^p\}$ に対しては 4 節点完全積分要素を用いる。微視的境界条件として、対称面及び外表面の全てに \mathbf{g}^p の初期表面法線方向 \mathbf{n}_0 成分を 0 に拘束する micro-free condition ($\dot{\chi} \equiv \mathbf{n}_0 \cdot \dot{\mathbf{g}}^p = 0$) を与える。

3.2.2 近似手法（微視的境界条件を与えない）

積分点における値を外挿して求めた ε^p の節点位置での値を、形状関数を用いて空間微分を行うことで近似的に塑性ひずみ勾配を評価する。こうして求めた $\nabla_0 \cdot \mathbf{g}^p$ を式(5)に代入すると、式(8)より \mathbf{D}^p が決まる。本方法では、付加的節点自由度は不要であり、計算の各ステップで $\nabla_0 \cdot \mathbf{g}^p$ を数値的に評価することを除いて、従来理論と同様のアルゴリズムとなる。よって、要素剛性方程式は従来の形のままである。すなわち、

$$[\mathbf{K}] \{\dot{\mathbf{U}}\} = \{\dot{\mathbf{F}}\} \quad (12)$$

実際の計算には 8 節点低減積分要素を用いる。以下では、この方法を ASGVP (Approximate strain gradient viscoplasticity) と表記する。

4. 計算結果と考察

Fig. 2 に ESGVP と ASGVP による巨視的公称ひずみが 2% 時点での変形と相当塑性ひずみ分布を示す。メッシュに依存しない解が確認できる。ここには示さないが、軟化材料に $l=0$ に相当する寸法非依存の従来理論を用いると、

要素分割を細かくすればするほどせん断帯の幅は狭くなり、解の一意性が失われることは周知の通りである。Fig. 2 に示すように材料の固有長さを考慮した場合（ここでは $l/h_0 = 0.1$ ）、2 つの計算方法による結果は区別が付かないほど酷似しており、微視的境界条件(micro-free)を正確に与えた ESGVP と与えていない ASGVP はほぼ同様の数値解を与えることがわかる。

ASGVP においては微視的境界条件を付与していないが、塑性ひずみ勾配は境界に沿う方向に支配的であり、境界法線方向成分は極めて小さい (Fig. 2 (c), (d))。この問題においては、 $\chi = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{g}^p = 0$ の条件が自然かつ近似的に満たされている。このような特殊な条件下においては、ASGVP の解は、ESGVP による厳密解をよく近似することがわかる。ただし、一般的な問題でこの条件が成立するかどうかを事前に予測することは困難であり、本例題を持って ASGVP の有効性が特に強調されるものではない。

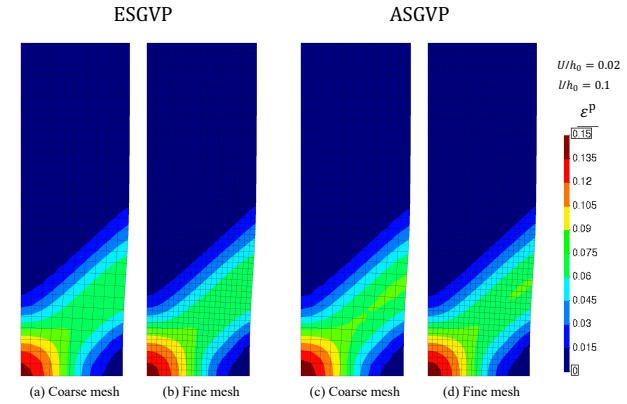


Fig. 2. Deformed meshes and contours of equivalent plastic strain with length scale $l/h_0 = 0.1$ at a macroscopic nominal strain of 0.02: calculation results using method ESGVP with coarse mesh(a) and fine mesh(b); ASGVP with coarse mesh(c) and fine mesh(d).

参考文献

- Aifantis, E. C. (1984). On the microstructural origin of certain inelastic models. *Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME*, 106(4), 326–330. <https://doi.org/10.1115/1.3225725>
- Kuroda, M., & Tvergaard, V. (2006). Studies of scale dependent crystal viscoplasticity models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(9), 1789–1810. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2006.04.002>
- Engelen, R. A. B., Fleck, N. A., Peerlings, R. H. J., & Geers, M. G. D. (2006). An evaluation of higher-order plasticity theories for predicting size effects and localisation. *International Journal of Solids and Structures*, 43(7–8), 1857–1877. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.05.072>
- Zhang, T., & Han, X. (2025). Stability discussion and application study of pseudo-corner models. *International Journal of Solids and Structures*, 308. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2024.113136>
- Kuroda, M. (2016). A strain-gradient plasticity theory with a corner-like effect: a thermodynamics-based extension. *International Journal of Fracture*, 200, 115–125. <https://doi.org/10.1007/s10704-015-0055-9>
- Lele, S. P., & Anand, L. (2009). A large-deformation strain-gradient theory for isotropic viscoplastic materials. *International Journal of Plasticity*, 25(3), 420–453. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.04.003>
- Kuroda, M., & Tvergaard, V. (2010). An alternative treatment of phenomenological higher-order strain-gradient plasticity theory. *International Journal of Plasticity*, 26(4), 507–515. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2009.09.001>
- Peirce, D., Shih, C.F., Needleman, A. (1984). A tangent modulus method for rate dependent solids. *Computers and Structures*, 18, 875–887. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(84\)90033-6](https://doi.org/10.1016/0045-7949(84)90033-6)