

橢円体すべり面と粒子群最適化を用いた 三次元極限平衡法の広域斜面安定解析への適用

Application of a Three-Dimensional Limit Equilibrium Method
Based on Ellipsoidal Slip Surfaces and Particle Swarm Optimization
to Large-Area Slope Stability Analysis

須郷大地¹⁾, Choe John,²⁾, 外里健太³⁾, 野村怜佳⁴⁾,
寺田賢二郎⁵⁾, 渡邊康介⁶⁾, 森口周二⁴⁾
Daichi Sugo, John Choe, Kenta Tozato, Reika Nomura,
Kenjiro Terada, Kosuke Watanabe and Shuji Moriguchi

¹⁾東北大学大学院工学研究科（〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1, E-mail: daichi.sugo.s2@dc.tohoku.ac.jp）

²⁾University of Washington, Department of Industrial & Systems Engineering (〒 98195, Box 352650, Seattle, WA, United States)

³⁾八戸工業大学工学部（〒 031-8501 青森県八戸市大字妙字大開 88-1）

⁴⁾東北大学災害科学国際研究所（〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1）

⁵⁾東北大学大学院工学研究科（〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06）

⁶⁾中部電力（〒 437-1695 静岡県御前崎市佐倉 5561）

In large-area slope stability analyses using the three-dimensional limit equilibrium method, spherical slip surfaces are commonly assumed, as exemplified by Scoops3D. In this study, we introduce an ellipsoidal slip surface-based approach. Constraints based on digital elevation model data are imposed on the slip surface, reducing the number of parameters to be determined, and particle swarm optimization is employed to efficiently identify the critical slip surface. The analysis results demonstrated that the proposed method enhances both the accuracy and computational efficiency compared to the spherical slip surface-based analysis.

Key Words : Limit Equilibrium Method, Particle Swarm Optimization, Ellipsoidal Slip Surface, Large Area

1. 諸言

我が国には、2025年現在で約70万箇所もの土砂災害警戒区域が存在する。土砂災害は、特に豪雨や地震を誘因とするものが多く発生し、近年では令和元年東日本台風や令和6年能登半島地震で多くの斜面崩壊が発生した。こうした土砂災害を誘発する災害が頻発する一方で、対策のための予算・時間は有限であるため、効率的な対策が求められている。対策の効率化のためには、斜面の事前評価が有効であるが、豪雨や地震は、広域に影響を及ぼす災害であるため、それに誘発される斜面崩壊の危険度評価は、広域に対してなされるのが望ましい。

広域の斜面危険度評価においては、機械学習と組み合わせた統計モデルや、無限斜面仮定に基づく危険度評価が多く報告される。その主な理由は、以下の2つである。

- 計算自由度の大規模化に伴う計算コストの増加を避けるために、計算コストの低いモデルが優先されるため
- 広域を俯瞰する場合、一連の斜面崩壊過程のを追跡することよりも、危険な場所とその程度の大きさを知ることが重要視されるため

他方で、計算機能力の向上を追い風として、広域解析における3次元解析手法の適用も現実的な選択肢とな

りつつある。現在、広域斜面安定解析において最も広く用いられている3次元解析ソフトウェアとしては、USGS (United States Geological Survey) が開発しているScoops3D[1]がある。Scoops3Dは、球面をすべり面と仮定した3次元極限平衡法(LEM: Limit Equilibrium Method)による安全率計算が実装されたソフトウェアである。球面すべり面は決定すべきパラメータが少ないため、3次元解析であっても現実的な計算コストで解析が可能である。一方で、形状の異なる斜面が複数存在するような広域実地形では、すべり面形状が斜面により大きく異なることが想定される。そのため、球面ではすべり面を表現できない可能性が高く、幾何学的に自由度の高い形状によってすべり面を表現することが望ましい。以上を踏まえて、本研究では、球面すべり面の拡張として、橢円体をすべり面として仮定し広域を効率的に探索する枠組みを構築することを目的とする。なお、橢円体を仮定することによる計算コストの増加については、粒子群最適化(PSO: Particle Swarm Optimization)[2]を適用することによってその効率化を図る。

2. 解析手法

LEM解析における想定可能なすべり面は、実質無限通りのケースが存在する。そこで、現実的な時間で計

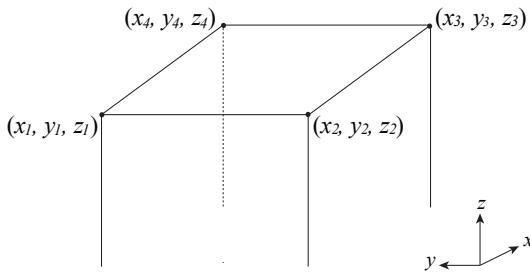


図-1 DEM セルを構成する 4 節点

算を終了できるよう制約を与えなければならない [3]。本研究では、実地形の数値標高モデル (DEM: Digital Elevation Model) の情報から、解析の想定ケースに制約を与える。以降では、DEM の情報による制約と、具体的な安全率の算出手順について説明する。

(1) ターゲットセルの抽出

本研究では、楕円体の設置の基準となる DEM セル (ターゲットセル) を地表面の角度により抽出する。図-1 のように、4 つの節点 (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, 2, 3, 4$) から構成される DEM セルの x, y 方向の平均標高差 $\Delta z_x, \Delta z_y$ を次式で算出する。

$$\Delta z_x = \frac{(z_2 + z_3) - (z_1 + z_4)}{2} \quad (1)$$

$$\Delta z_y = \frac{(z_3 + z_4) - (z_1 + z_2)}{2} \quad (2)$$

上式を用いて、次式のように DEM セルの平均傾斜角 θ を算出する。

$$\theta = \arctan \sqrt{(\Delta z_x / \Delta x)^2 + (\Delta z_y / \Delta y)^2} \quad (3)$$

本研究の実地形解析では、 θ が 20° から 60° の DEM セルをターゲットセルとして抽出する。

(2) ターゲットセルを基準とした楕円体の設置

楕円体を設置するために必要なパラメータは、中心座標 (x_c, y_c, z_c) 、楕円体の半径を定義する 3 方向 $[\zeta, \xi, \vartheta]$ (以降では 3 軸方向と表記する)、各方向の半径 $(r_\zeta, r_\xi, r_\vartheta)$ である。球を仮定する場合の大きな利点は、半径が 1 つのみであることと、3 軸方向を決める必要がないという点である。特に、楕円体の 3 軸方向は正規直交基底である限り任意に設定できるため、決定することが難しい。

本研究では、楕円体の 3 軸方向と中心座標に DEM の情報から制約を与える。まず、ターゲットセルの DEM データを用いて、正規直交基底 $[\zeta_0, \xi_0, \vartheta_0]$ を次式で算出する。

$$\zeta_0 = -\frac{(\Delta z_x, \Delta z_y, \Delta z_x^2 + \Delta z_y^2)^T}{|(\Delta z_x, \Delta z_y, \Delta z_x^2 + \Delta z_y^2)|} \quad (4)$$

$$\vartheta_0 = \frac{(-\Delta z_x, -\Delta z_y, 1)^T}{|(-\Delta z_x, -\Delta z_y, 1)|} \quad (5)$$

$$\xi_0 = \vartheta_0 \times \zeta_0 \quad (6)$$

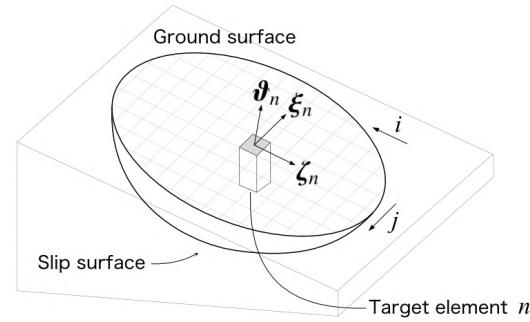


図-2 DEM セルから算出される正規直交基底

ここで、図-2 に示すように、 ζ_0 はターゲットセルの勾配の最も大きい方向を示す単位ベクトル、 ϑ_0 はターゲットセルの単位法線ベクトル、 ξ_0 は ϑ_0 と ζ_0 と右手系をなす方向の単位ベクトルである。

a) 3 軸方向の決定

本研究では、楕円体の回転 (3 軸方向の回転) を考慮する。 $[\zeta_0, \xi_0, \vartheta_0]$ を、 ϑ_0 を回転軸とし、半時計まわりに λ 回転させた場合の 3 軸方向 $[\zeta, \xi, \vartheta]$ は次式のように表現される。

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \xi_0 \\ \vartheta_0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

b) 中心座標の制約

前述の通り、ターゲットセルは楕円体設置の基準となるセルであるため、効果的な計算のためには、楕円体により抽出されるすべり体に、ターゲットセルが必ず含まれるようにする必要がある。そのため、楕円体の中心座標 (x_c, y_c, z_c) に次式のような制約を与える。

$$(x_c, y_c, z_c)^T = (x_0, y_0, z_0)^T + \kappa r_\vartheta \vartheta_0 \quad (8)$$

ここで、 (x_0, y_0, z_0) はターゲットセルの中心座標、 $\kappa \in [0, 1]$ である。これにより、楕円体の移動方向がターゲットセルの法線方向に限定され、すべり体に必ずターゲットセルを含むようになる。

(3) 楕円体によるすべり体の抽出

基底を $[\zeta, \xi, \vartheta]$ とし、各方向の半径を $(r_\zeta, r_\xi, r_\vartheta)$ とする楕円体は次式で表現される。

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \\ \vartheta \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{r_\zeta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_\xi^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_\vartheta^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \\ \vartheta \end{pmatrix} = 1 \quad (9)$$

ここで、 ζ, ξ, ϑ は、基底 $[\zeta, \xi, \vartheta]$ から見た位置ベクトルの成分である。 $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1)^T$ を、基底ベクトルとする正規直交基底 $[e_1, e_2, e_3]$ において、楕円体の中心座標を (x_c, y_c, z_c) とすると、式

(9) は次式のように書き換える。

$$\begin{pmatrix} x - x_c \\ y - y_c \\ z - z_c \end{pmatrix}^T \mathbf{R}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{r_\zeta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_\xi^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_\theta^2} \end{pmatrix} \mathbf{R} \begin{pmatrix} x - x_c \\ y - y_c \\ z - z_c \end{pmatrix} = 1 \quad (10)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \zeta \cdot \mathbf{e}_1 & \zeta \cdot \mathbf{e}_2 & \zeta \cdot \mathbf{e}_3 \\ \xi \cdot \mathbf{e}_1 & \xi \cdot \mathbf{e}_2 & \xi \cdot \mathbf{e}_3 \\ \theta \cdot \mathbf{e}_1 & \theta \cdot \mathbf{e}_2 & \theta \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

すべり体の算出については、式(10)の (x, y, z) に節点座標を代入し、(左辺) ≤ 1 を満たす節点をすべり体を構成する節点として抽出する。また、すべり面 z 座標は、節点座標の (x, y) 座標のみを式(10)に代入した場合に算出される z 座標とする。

(4) 安全率の算出

LEM は安全率を抵抗力と駆動力の比として算出する方法である。安全率 F は次式のように定義される [4]。

$$F = \frac{1}{T} \{ cA + (N - uA(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2) \tan \phi \} \quad (12)$$

ここで、 T はせん断力、 c は粘着力、 A はすべり面の面積、 N は垂直力、 u はすべり面上の間隙水圧、 ϕ は内部摩擦角、 \mathbf{g} は重力の単位方向ベクトル、 \mathbf{n} はすべり面の単位法線ベクトルである。 N 、 T の導出は、いくつか存在する LEM の手法ごとに異なるが、本研究では、基本的な実装として、3 次元 LEM の中で安全率の求解に収束計算を必要としない唯一の手法である Hovland 法 [5] を採用する。土柱間に作用する内力を無視し、土柱 1 つに着目したすべり面の法線方向のつり合いを考えると、Hovland 法におけるすべり土柱 (i, j) に作用するせん断力の大きさ T と垂直力 N は次式のように表現される。

$$N = -W(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \quad (13)$$

$$T = \frac{1}{F} \{ cA - (W(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) + uA(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})^2) \tan \phi \} \quad (14)$$

本研究では、モーメントのつり合い軸は橿円体の 3 軸方向ベクトルの 1 つである ξ に一致するものとして安全率を算出する。この ξ を用いると、モーメントのつり合い式は次式のように表現される。

$$\sum (\mathbf{r}_b \times \mathbf{T} + \mathbf{r}_b \times \mathbf{N} + \mathbf{r}_g \times \mathbf{W}) \cdot \xi = 0 \quad (15)$$

ここで、 \mathbf{r}_b は橿円体中心からすべり土柱 (i, j) 底面への位置ベクトル、 \mathbf{r}_g は橿円体中心からすべり土柱 (i, j) の重心への位置ベクトルである。安全率 F は、式(15)に、式(13)と(14)を代入することで算出される。なお、表記の簡単のため、式(13)、(14)、(15)において、 F および ξ 以外のすべてで、すべり土柱番号を示す (i, j) を省略している。

(5) 粒子群最適化による臨界すべり面探索

LEM における臨界すべり面探索は、すべり面を定義するパラメータを設計変数とする、安全率の最適化(最小化)問題として定義される。本研究では、この最適化問題の求解のために PSO を導入する。

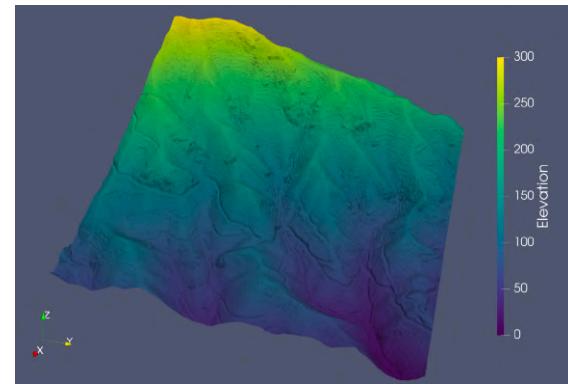


図-3 解析に使用する実地形データ (岩手県釜石市)

PSO では、はじめに D 次元空間に M 個の粒子をランダムな位置に発生させ、それぞれの粒子で目的関数の値(安全率)を計算する。前節までの議論により、本研究における設計変数は $r_\zeta, r_\xi, r_\theta, \kappa, \lambda$ の 5 つであるから、PSO における粒子の探索空間は 5 次元 ($D = 5$) となる。また、初期速度については全ての粒子で 0 とする [6]。第 1 ステップでは全ての粒子について、初期位置がパーソナルベスト \mathbf{x}_{pb} として記録され、その中最も小さい安全率を算出した粒子位置をグローバルベスト \mathbf{x}_{gb} として記録する。その後、粒子の速度と位置を以下の式で更新し、終了条件を満たすまで速度と位置の更新を繰り返す。

$$\mathbf{v}^{m,k+1} = \omega \mathbf{v}^{m,k} + c_1 \text{rand}_1(\mathbf{x}_{pb}^{m,k} - \mathbf{x}^{m,k}) + c_2 \text{rand}_2(\mathbf{x}_{gb}^k - \mathbf{x}^{m,k}) \quad (16)$$

$$\mathbf{x}^{m,k+1} = \mathbf{x}^{m,k} + \mathbf{v}^{m,k+1} \quad (17)$$

ここで、 ω は慣性重み係数、 c_1 は局所重み係数、 c_2 は大域重み係数、 rand_1 、 rand_2 はどちらも $[0, 1]$ の一様乱数、 m は粒子番号 ($m = 1, 2, \dots, M$)、 k は計算ステップ数である。

3. 球と橿円体の安全率の比較

本章では、実地形データを用いて、球と橿円体で解析を実施することによって、それぞれの臨界すべり面(最小安全率を与えるすべり面)の探索能力を分析する。使用する実地形データは図-3 に示す岩手県釜石市の 600 m × 600 m の 1 m メッシュ実地形データである。検討する球と橿円体のパラメータ範囲を表-1 に示す。また、粘着力は 10 kPa、内部摩擦角は 30° 、単位体積重量は 20 kN/m^3 とする。

表-1 球と橿円体のパラメータ範囲

	Min	Max
$r(r_\zeta, r_\xi, r_\theta)$ [m]	10	30
d	0.4	0.9
λ [$^\circ$]	-30	30

各パラメータの次元を等間隔で 11 分割 ($r, r_\zeta, r_\xi, r_\theta$ は 2 m、 κ は 0.05、 λ は 6° 刻み) し、全てのパラメータの組み合わせについて計算した場合の球と橿円体の解析

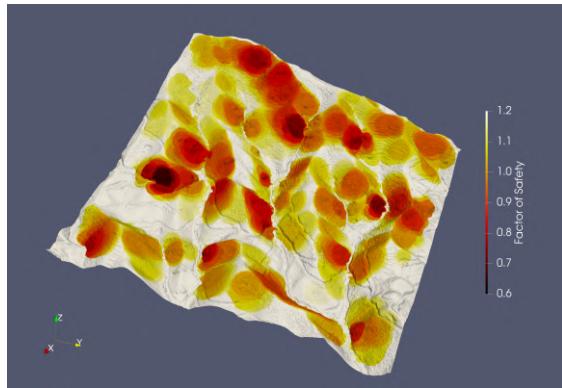


図-4 球による解析結果(グリッドサーチ)

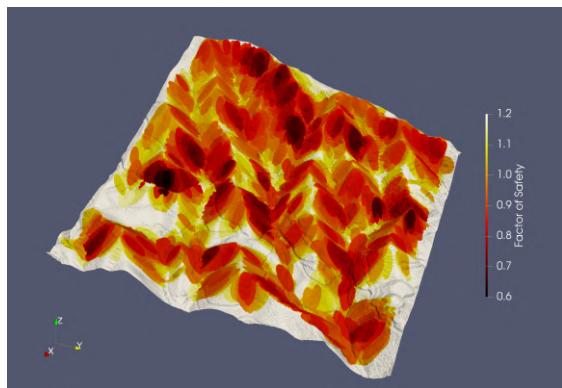


図-5 楕円体による解析結果(グリッドサーチ)

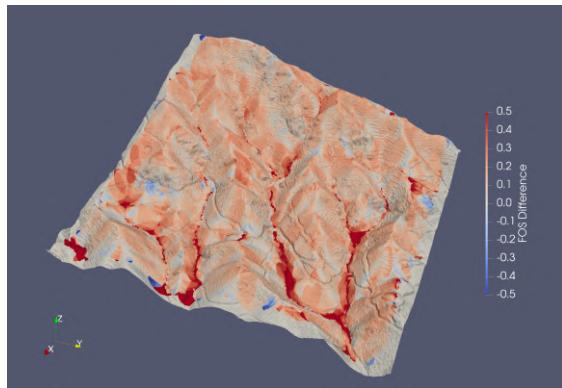


図-6 球と椭円体の安全率の差

結果をそれぞれ図-4、図-5に示す。また、図-6に安全率の差(球 - 楕円体)を示す。図-6では、椭円体の方が安全率が小さい部分(赤色の部分)が多くの領域を占めている。これは、椭円体がより危険なすべり面を探索できているということを示している。

4. 実地形への椭円体すべり面と PSO の適用

前章では、椭円体の方が最小安全率を探索する能力が高いことを示したが、計算コストが大きく異なっている。前章の計算条件では、ターゲットセル1つにつき、球が3次元、椭円体が5次元のパラメータ空間を探索しているため、それぞれ 11^3 (1331)回、 11^5 (161051)回の安全率の計算を行うこととなり、計算コストは 11^2 (121)倍異なる。本章では、この計算コストが増大する問題を解消するため、PSOを導入し、それによる計

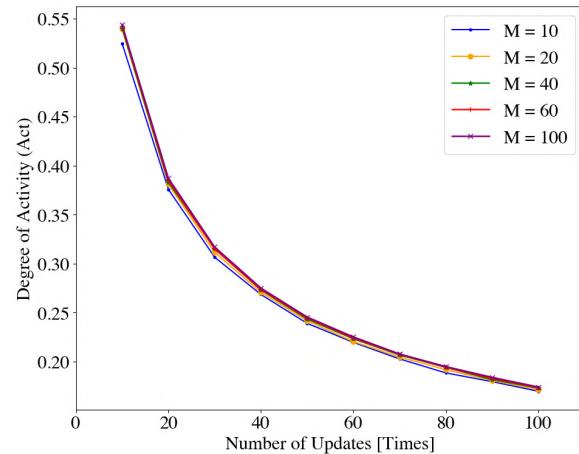


図-7 更新上限回数による活性度の変化

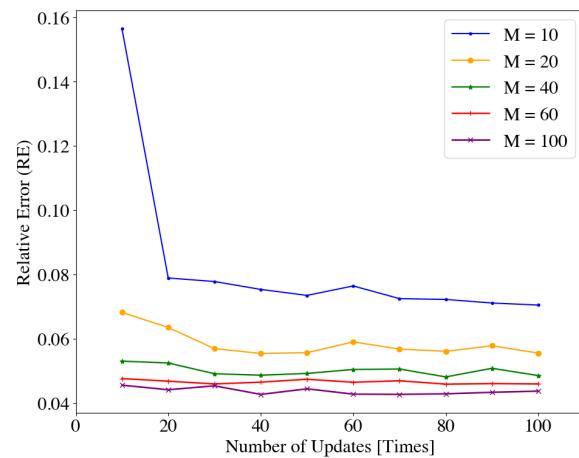


図-8 更新上限回数による相対誤差の変化

算量の低減効果を分析する。

(1) 実地形解析による PSO のパラメトリックスタディ

PSO の収束性と精度を議論するために、粒子群の活性度 Act と、相対誤差 RE を次式のように定義する。

$$Act = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\mathbf{v}^m)^2} \quad (18)$$

$$RE = \frac{F(\mathbf{x}) - F'(\mathbf{x})}{F'(\mathbf{x})} \quad (19)$$

$$\mathbf{x} = (r_\zeta, r_\xi, r_\theta, \kappa, \lambda) \quad (20)$$

ここで、 $F(\mathbf{x})$ は PSO により算出された安全率(グローバルベスト)、 $F'(\mathbf{x})$ はグリッドサーチ(先述の次元を等間隔で分割して総当たりの計算を行う方法)により算出された安全率(参照解)である。以降での参照解は、前章の椭円体のグリッドサーチの結果(1ターゲットセルあたり 11^5 回の計算を行ったもの)とする。なお、PSO はパラメータ空間を離散化する必要がないため、グリッドサーチよりも小さい安全率が算出される可能性がある。その場合、 $F(\mathbf{x}) = F'(\mathbf{x})$ として、PSO が正しく安全率を算出したと判定する。

粒子の数 M を $M = 10, 20, 40, 60, 100$ とし、更新上限回数を 10 から 100 まで 10 刻みで変化させた場合の、計算終了時の活性度と相対誤差をそれぞれ図-7、図-8 に示す。なお、これらの結果は、同一条件で PSO による計算を 5 回繰り返し行い、全てのターゲットセル（合計 10018）セルの平均値をとったものである。図-7 からは、更新上限回数が多くなるほど活性度が徐々に低下していく傾向が確認できる。これは、粒子の移動速度が発散せず、PSO の計算が適切に収束に向かっていることを示している。図-8 からは、 $M = 10$ の場合を除き、更新上限回数の変化に対して、相対誤差は大きく変化しないことが確認できる。これは、十分な数の粒子が存在する場合、まだ粒子群の活性度の高い状態で算出されたグローバルベストが、その後の計算で更新されても大きな値の変化はない、もしくは更新されないことを示している。一方で、図-8 の粒子数ごとのプロットの位置関係を見ると、同一の更新上限回数の場合、粒子数の増化にともなって、相対誤差は小さくなっている。これは、一定の目的関数 $F(x)$ の評価回数（粒子数 × 更新回数）を想定した場合、本研究で提案するすべり面のパラメータ設定では、更新回数よりも、粒子数が多い方がより良い精度で計算を行うことができるということを示している。

(2) PSO による計算条件の検討

LEM の臨界すべり面探索における計算コストは、(目的関数の計算時間)+(パラメータの更新に要する時間)で定義される。しかし本研究では、目的関数の計算 1 回に要する時間に対して、PSO によるパラメータの更新 1 回に要する時間は十分に小さい。そのため、ここでは、目的関数の評価回数で計算コストを議論する。前述の通り、PSO を用いた臨界すべり面探索では、目的関数の評価回数は、(粒子数 × 更新回数)で定義される。前章での球による解析では 1331 回であったこと、および前節の議論を考慮して、PSO による目的関数の評価回数を 1200 回（粒子数 60、更新 20 回）とした場合の結果を図-9 に、同一地点での参照解と PSO の安全率の差を図-10 に示す。図-10 から、安全率が比較的大きい部分では、PSO による安全率がグリッドサーチよりも大きい部分（赤色の部分）が散見されるが、正しく安全率を算出できている点（灰色の部分）が多いことが確認できる。これにより、PSO の導入によって楕円体を用いた場合に発生する計算コストの増大の問題を解消できる可能性が示された。

5. 結言

本研究では、3 次元 LEM による広域斜面安定解析の計算精度を向上させることを目的として、DEM の情報による制約を加えた楕円体すべり面を導入した。加えて、球と比較して高次元の空間の探索となる楕円体の臨界すべり面探索を効率化することを目的として、PSO による臨界すべり面探索を導入した。その結果、楕円体の導入により、球の解析と比較して最小安全率を探索する能力が向上し、PSO の導入によって、楕円体で増大した計算コストを抑えることに成功した。本研究では、PSO の計算条件は簡易的なものであったため、さ

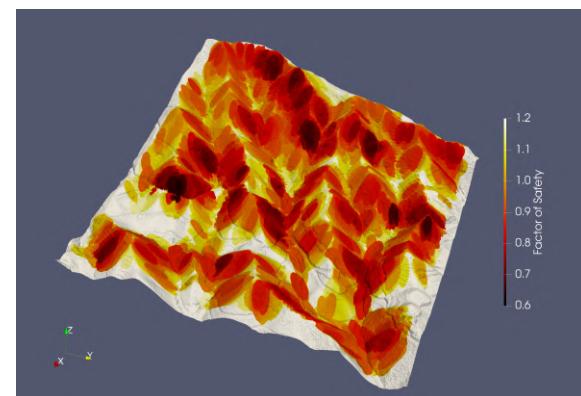


図-9 楕円体と PSO (粒子数 60、更新 20 回) による解析結果



図-10 楕円体解析での PSO とグリッドサーチの安全率の差

らなる計算効率化のため、実地形における PSO の初期値の設定や計算終了条件の詳細な検討が今後の課題である。

参考文献

- [1] Reid, M. E., et al.: Scoops3d: software to analyze 3d slope stability throughout a digital landscape, United States Geological Survey, 2015
- [2] Kennedy, J. and Eberhart, R.: Particle swarm optimization, *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*, Vol. 4, pp. 1942–1948, 1995
- [3] Rao, B., et al.: An efficient box search method for limit equilibrium method-based 3d slope stability analysis, *Transportation Infrastructure Geotechnology*, Vol. 11, No. 1, pp. 327–358, 2024.
- [4] Turnbull, W. J. and Hvorslev, M. J.: Special problems in slope stability, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, Vol. 93, No. 4, pp. 499–528, 1967
- [5] Hovland, H. J.: Three-dimensional slope stability analysis method, *Int. J. of Mechanical Science*, Vol. 103, No. 9, pp. 971–986, 1977.
- [6] Kalatehjari, R., et al.: Determination of three-dimensional shape of failure in soil slopes, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 52, No. 9, pp. 1283–1301, 2015.