

Darcy-Brinkman式に基づく 非解像型流体-梁連成解析手法の開発

Development of an Unresolved Coupling Scheme for Fluid and Beams
Based on Darcy-Brinkman Equation

大日向智志¹⁾, 大村浩之²⁾, 磯部大吾郎³⁾

Satoshi Ohinata, Hiroyuki Omura and Daigoro Isobe

1) 筑波大学大学院 (〒305-8573 茨城県つくば市天王台1-1-1, E-mail: s2420854@u.tsukuba.ac.jp)

2) 博(工) 防災科学技術研究所 特別研究員 (〒305-0006 茨城県つくば市天王台3-1, E-mail: homura@bosai.go.jp)

3) 博(工) 筑波大学 システム情報系 教授 (〒305-8573 茨城県つくば市天王台1-1-1, E-mail: isobe@kz.tsukuba.ac.jp)

In this research, an unresolved coupling scheme based on the Darcy-Brinkman equation is developed for fluid and beams, and the validity is verified. The ASI-Gauss method and ISPH method are applied for structural and fluid analysis, respectively. A dam-break analysis with a single column was conducted to verify the drag forces calculated by the proposed method regarding the ratio of the particle diameter to the column width. Moreover, a dam-break analysis with a group of cylinders was conducted to verify the behavior of the cylinders against the flow.

Key Words : Darcy-Brinkman equation, Unresolved coupling scheme, ISPH method, ASI-Gauss method

1. はじめに

日本では2011年3月11日に発生した東北地方太平洋沖地震に伴い発生した津波など、これまでに多くの津波被害を受けている。津波対策を講じる際、浸水域の予測には数値解析が用いられることが多いが、津波のような自由表面を伴う非圧縮性流れを解く数値解析手法として粒子法が有用である。さらに、津波被害をより正確に予測するためには、建物の流失など、流体によって構造が破壊、大移動する過程まで考慮する必要がある。そのため、津波と建物が相互に影響しあう流体-構造連成 (Fluid-Structure Interaction, FSI) 問題を解く必要がある。粒子法を用いたFSI解析手法はこれまでにいくつか提案されている ([1] など) が、いずれも構造物の形状を詳細に表現する、つまり粒子で構造物を空間的に解像することを前提としている (以下、このようなFSI解析手法を解像型と呼ぶ)。

一方、都市レベルで浸水域を予測するような大規模な津波遡上解析では、現実的に使用できる計算資源を踏まえると粒子の直径を数m程度の大きさにすることが一般的である [2]。この粒子径オーダーに対して、樹木や家屋の構造部材などの断面寸法は高々数十cm程度であるため、部材の形状を十分細かく解像することができない。したがって、既存の連成解析手法はこのような広域の問題には適用できない。さらに、津波によって流出した家屋の柱や樹木などが移流していく挙動を計算する際には、波を柱や樹木の間隙を通る流れとして考慮する必要がある。

そこで本研究では、部材断面の形状を陽に表現せずに、部材に作用する流体力を抗力モデルに基づき流速から計

算する非解像型の連成解析手法を開発し、その妥当性の検証を行う。簡単のため構造部材は梁部材に限定する。また、流体計算には自由表面流れと浸透流を統一的に表したDarcy-Brinkman式 [3] を用いたISPH法を適用する。梁部材の解析には、曲げ変形を少ない計算コストで高精度に計算できるASI-Gauss法 [4] を用いる。

2. Darcy-Brinkman式を用いたISPH法

(1) 基礎方程式

本研究では、梁部材の間隙を通る流れを浸透流とみなし、自由表面流れと浸透流を統一的に表したDarcy-Brinkman式を流体解析に適用する。Darcy-Brinkman式は以下のように表記される。

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_D \quad (1)$$

$$\frac{C_r}{\varepsilon_f} \frac{D\mathbf{v}_D}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu_E \nabla^2 \mathbf{v}_D + \mathbf{a}_r \quad (2)$$

ここで、 ε_f は間隙率、 C_r は仮想質量係数、 \mathbf{v}_D はDarcy流速、 t は時間、 ρ は密度、 p は圧力、 ν_E は有効動粘性係数、 \mathbf{g} は重力加速度、 \mathbf{a}_r は梁部材から受ける抵抗による加速度である。また C_r 、 ν_E は以下の式に従って定義される。

$$C_r = 1 + 0.34 \frac{1 - \varepsilon_f}{\varepsilon_f} \quad (3)$$

$$v_E = \frac{v_f + v_T}{\varepsilon_f} \quad (4)$$

ここで v_f は流体の動粘性係数、 v_T は渦粘性である。

(2) 時間積分スキーム

ISPH法では、速度を陽的に、圧力を陰的に計算する射影法によって各ステップの速度、圧力を計算する。速度の更新は以下の式に従い行う。

$$\mathbf{v}_D^* = \mathbf{v}_D^n + \frac{\varepsilon_f \Delta t}{C_r} (\mathbf{v}_E \nabla^2 \mathbf{v}_D^n + \mathbf{g} + \mathbf{a}_r) \quad (5)$$

$$\mathbf{v}_D^{n+1} = \mathbf{v}_D^* - \frac{\varepsilon_f \Delta t}{C_r \rho_f} \nabla p^{n+1} \quad (6)$$

ここで、添え字*は n ステップと $n+1$ ステップの間に定義される中間状態を表す。また、 Δt は時間増分である。

圧力の更新は次式の圧力ポアソン方程式を解くことで行う。

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{C_r}{\varepsilon_f} \left(\frac{\rho_f}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}_D^* + \alpha_d \frac{\varepsilon_f \rho_f - \hat{\rho}_f^n}{\Delta t^2} \right) \quad (7)$$

ここで $\hat{\rho}_f$ は流体の数値的な密度、 α_d は緩和係数である。

(3) SPH法に基づく空間離散化

領域 Ω 内で連続なスカラー場 φ は関数のカーネル近似により次式のように近似できる。

$$\varphi(\mathbf{x}) \approx \int_{\Omega} \varphi(\xi) W(\xi - \mathbf{x}) d\xi \quad (8)$$

SPH法はこのカーネル近似に基づいた離散化スキームであり、式(8)を粒子離散化近似した形で書くと、

$$\varphi(\mathbf{x}_i) \approx \langle \varphi \rangle_i = \sum_{j \in \mathbb{P}_i} V_j \varphi_j W_{ij} \quad (9)$$

となる。ここで、 \mathbb{P}_i は粒子 i の影響半径内に存在する粒子の集合、 V_j は粒子 j が代表する体積である。

勾配、ラプラシアンなどの微分表現は、式(9)と φ のテイラー展開から導出され、それぞれ以下の式で表される。勾配は、

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}_i) \approx \langle \nabla \varphi \rangle_i = \sum_{j \in \mathbb{P}_i} V_j (\varphi_j - \varphi_i) \nabla W_{ij} \quad (10)$$

と書ける。同様にラプラシアンは、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi(\mathbf{x}_i) &\approx \langle \nabla^2 \varphi \rangle_i \\ &= 2 \sum_{j \in \mathbb{P}_i} V_j (\varphi_j - \varphi_i) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2} \nabla W_{ij} \end{aligned} \quad (11)$$

と書ける。

(4) 壁面の表現

本研究では水路の床、壁面の表現には大村ら(2023)[5]のIERP壁境界モデルを用いる。IERPモデルは、陽解法の粒子法への適用が前提のERPモデルをベースに、角部分の表現を精緻化し、半陰解法の粒子法に適用できるように発展した壁境界モデルである。

3. ASI-Gauss法

空間の離散化はすべての変位が線形関数で定義される線形Timoshenkoはり要素を用いる。また、時間積分法にはNewmarkの β 法を用いる。これらを用いると運動方程式、速度、加速度ベクトルは以下の式のように与えられる。

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \mathbf{R}_t \quad (12)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{u}}_t - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{u} \quad (13)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{\delta}{2\beta}\right) \dot{\mathbf{u}}_t \Delta t + \left(1 - \frac{\delta}{\beta}\right) \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\delta}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{u} \quad (14)$$

ここで、 \mathbf{M} は全体質量マトリックス、 \mathbf{C} は全体減衰マトリックス、 \mathbf{K} は全体剛性マトリックス、 \mathbf{F} は節点外力ベクトル、 \mathbf{R} は節点内力ベクトルである。また β 、 δ はNewmarkの β 法における重みパラメータであり、本研究ではLynnら(2007)[4]の研究を参考に $\beta = 4/9$ 、 $\delta = 5/6$ とする。

ASI-Gauss法では、1つの梁部材を2つの線形Timoshenkoはり要素で表現する。弾性域では応力評価点が3次はり要素のものと一致するように数値積分点を配置し、塑性ヒンジが生じた後は塑性ヒンジの位置と応力評価点が一致するように数値積分点をシフトすることで、曲げ変形を精度よく解ける。

4. 非解像型流体-梁連成解析手法

(1) 部材の分割

流体の解像度に応じて流体力の計算を行うため、構造計算に用いるはり要素を、さらに細かいサブ要素へと分割する。サブ要素 i の長さ l_i は、流体粒子径と同程度になるように決定する。流体力の計算および流体が梁部材から受ける抵抗力の計算はサブ要素ごとに行う。

(2) 間隙率の計算

流体粒子 i の間隙率 ε_i を流体粒子 i の影響範囲の体積に対する範囲中にあるサブ要素の体積の割合と定義し、以下の式で求める。

$$\varepsilon_i = 1 - \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_{s,j} W_{ij} \quad (15)$$

ここで \mathbb{S}_i は、流体粒子 i の影響範囲内に存在するサブ要素の集合、 $V_{s,j}$ はサブ要素 j の体積である。

(3) サブ要素に作用する流体力

サブ要素 i に作用する流体力は、モリソン式から計算される抗力 $f_{d,i}$ と、圧力勾配から計算する浮力 $f_{b,i}$ の二つを計算する。 $f_{d,i}$ 、 $f_{b,i}$ はそれぞれ以下の式で計算する。

$$f_{d,i} = \frac{1}{2} \rho_f C_D \mathbf{u} |\mathbf{u}| D l_i + \rho_f C_M \frac{d\mathbf{u}}{dt} V_{s,i} \quad (16)$$

$$f_{b,i} = -\nabla p V_{s,i} \quad (17)$$

ここで、 C_D は抗力係数、 C_M は慣性係数である。流速 \mathbf{u} や圧力勾配 ∇p はサブ要素の中央位置で式(9)、(10)を利用して周囲の流体粒子の速度、圧力から内挿して計算する。また、はり要素が角柱の場合、Tamuraら(1999)[6]を参考に、抗力係数は以下の式に従って計算を行う。

$$C_D = \begin{cases} -7.149(\cos\theta + \sin\theta)^2 \\ \quad + 13.518(\cos\theta + \sin\theta) - 4.338 (0 \leq \theta < \pi/12) \\ 1.242(\cos\theta + \sin\theta)^2 \\ \quad + 0.671(\cos\theta + \sin\theta) - 0.915 (\pi/12 \leq \theta < \pi/4) \end{cases} \quad (18)$$

θ は角柱と流れ方向の迎え角で、 $\theta = 0$ でおおよそ $C_D = 2.0$ となる。得られたサブ要素ごとの流体力は以下の式に従って構造解析の節点力へと変換する。

$$\mathbf{F}_{D1} = \frac{1}{2} (1 - \xi_i) (\mathbf{f}_{d,i} + \mathbf{f}_{b,i}) \quad (19)$$

$$\mathbf{F}_{D2} = \frac{1}{2} (1 + \xi_i) (\mathbf{f}_{d,i} + \mathbf{f}_{b,i}) \quad (20)$$

ここで添え字1, 2は局所節点番号を表す。また、 ξ_i はサブ要素の中央位置を要素座標系で表したもので、 $-1 \leq \xi_i \leq 1$ の値をとる。

(4) 流体が受ける抵抗力

前項で説明した流体力のうち、抗力 $f_{d,i}$ を周囲の流体粒子 j へ分配して加える。

$$f_{ji} = -f_{d,i} \frac{V_j W_{ij}}{\sum_{k \in \mathbb{P}_i} V_k W_{ik}} \quad (21)$$

f_{ji} は粒子 j がサブ要素 i から受ける力である。

5. 提案手法の妥当性検証

(1) 適用可能範囲の検証

提案手法の妥当性および適用可能範囲の検証を行うため、角柱付きダムブレイク解析を行う。適用可能範囲の検証には、角柱幅 D に対する流体粒子径 r の比 r/D の値を用いて行う。

検証に用いる系の概観を図1に示す。

検証方法は、(a)流体粒子径 r を固定し、角柱幅 D を変更、(b)角柱幅 D を固定し、流体粒子径 r を変更する2パターンで、提案手法から計算された流体力と既存手法のPMSモデ

ル[7]から計算される流体力を比較することで検証を行う。流体、構造解析の解析条件をそれぞれ表1, 2, 3に示す。

単位：[m]

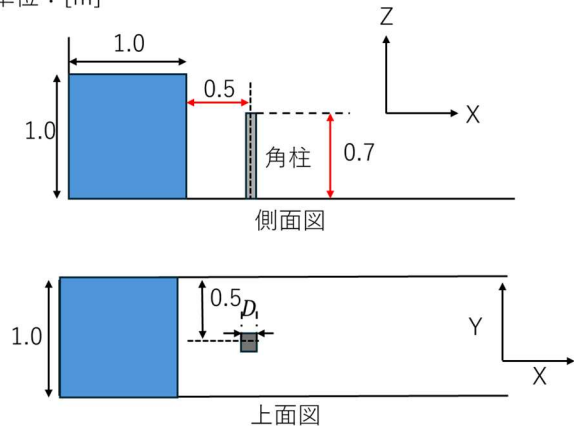


図1 適用可能範囲の検証で用いた系の概観

表1 適用可能範囲の検証で用いた流体解析条件

時間増分	1.0×10^{-3} [s]
総ステップ数	1000
流体粒子径 r	パターン(a)(b)で異なる
影響半径	$r \times 2.4$
滑り率	0.95
密度	1.0×10^3 [kg/m ³]
動粘性係数	1.0×10^{-6} [m ² /s]
重力加速度	9.8 [m/s ²]
緩和係数	1.0×10^{-3}

表2 適用可能範囲の検証で用いた構造解析条件

時間増分	1.0×10^{-3} [s]
総ステップ数	1000
ヤング率	2.06×10^{11} [N/m ²]
ポアソン比	0.3
降伏応力	4.00×10^8 [N/m ²]
密度	7.90×10^3 [kg/m ³]
重力加速度	9.8 [m/s ²]
角柱幅 D	パターン(a)(b)で異なる

表3 適用可能範囲の検証で用いた C_D 、 C_M

抗力係数 C_D	式(18)で計算
慣性係数 C_M	2.0

(a) 流体粒子径 r を固定し、角柱幅 D を変更

パターン(a)では、流体粒子径 r は $r = 0.02$ [m]で固定とし、角柱幅 D を $D = 0.01$ [m] ($r/D = 2$), $D = 0.0067$ [m] ($r/D = 3$), $D = 0.005$ [m] ($r/D = 4$), $D = 0.004$ [m] ($r/D = 5$)に変更し解析を行う。なお、比較対象である解像型の解析は $r = 0.01$ [m], $D = 0.05$ [m]の結果を用いる。

解析結果を図2に示す。なお、異なる角柱幅の抗力を比較するため結果のグラフは単位幅当たりの抗力に変換している。図2を見ると、 r/D の値が大きいほど比較対象である解像型の結果に近づいていることが確認できる。また、 $r/D \geq 4$ の場合は十分解像型に近い妥当な解が得られていることが確認できる。

r/D の値が小さいほど抗力を過小評価している理由についての考察を行う。提案手法はモリソン式から計算される抗力を計算しているが、抗力の計算は、角柱の影響を受けていない流れでの流速を用いることが理想的である。提案手法では、角柱のサブ要素中央の位置で内挿した流速から抗力を計算しているが、ここで得られた流速は角柱の影響を受けた流速である。 r/D の値が小さい、つまり角柱の断面の寸法に対して流体の粒子径が小さいと、角柱周辺の流速低下を必要以上に細かく表現し、サブ要素中央位置で内挿される流速は角柱の影響を受けない場合の流速に比べ遅くなる。その結果、 r/D の値が小さいほど抗力を過小評価したと考えられる。

(b) 角柱幅 D を固定し、流体粒子径 r を変更

続いて、パターン(b)では角柱幅 D を $D = 0.01$ [m]に固定し、流体粒子径 r を $r = 0.01$ [m] ($r/D = 1$), $r = 0.02$ [m] ($r/D = 2$), $r = 0.03$ [m] ($r/D = 3$), $r = 0.04$ [m] ($r/D = 4$), $r = 0.05$ [m] ($r/D = 5$)に変化させた。なお、比較対象である解像型の解析は $r = 0.01$ [m], $D = 0.05$ [m]の結果を用い、パターン(a)同様結果のグラフは単位幅当たりの抗力に変換している。

パターン(b)の場合でも、 r/D が大きいほど比較対象である解像型の結果に近づいていることが確認できる。さらに、 $r/D \geq 4$ の場合で解像型に十分近い妥当な解が得られていることが確認できる。

(a), (b)の二つの検証から、提案手法は $r/D \geq 4$ の場合に妥当に抗力を計算できることが確認できた。

(2) 円柱群に対する妥当性検証

本項では、提案手法を円柱群に対して適用した際の妥当性検証を行う。比較対象として前項では既存手法を用いていたが、円柱群を対象にした解析では計算資源の制約のため解析できない。そこで、円柱群を開水路に設置した実験を行い特定の円柱の先端変位を計測し、これを比較対象とした。実験に用いた開水路は、水路寸法は幅0.5 [m], 全長13 [m], 最大水深0.6 [m]で、流量をポンプで制御できるものを利用した。

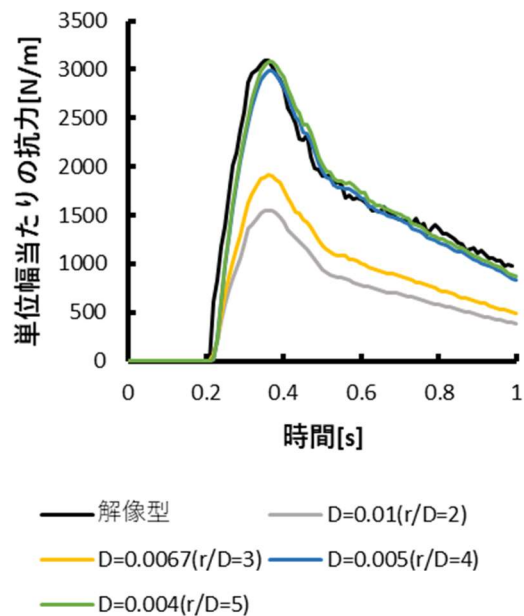


図2 パターン(a)単位幅当たりの抗力の比較

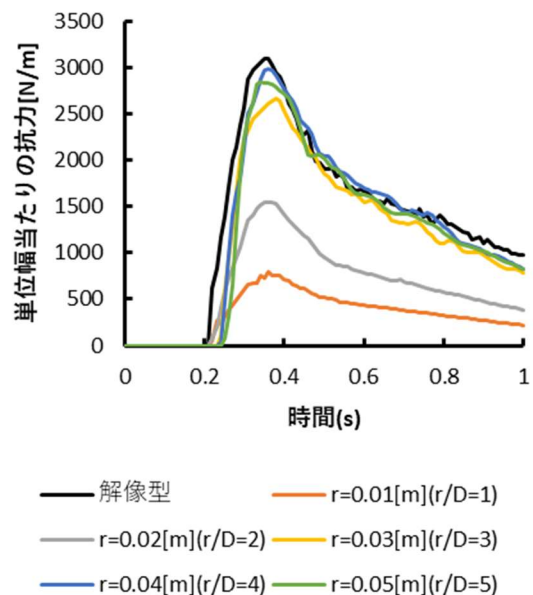


図3 パターン(b)単位幅当たりの抗力の比較

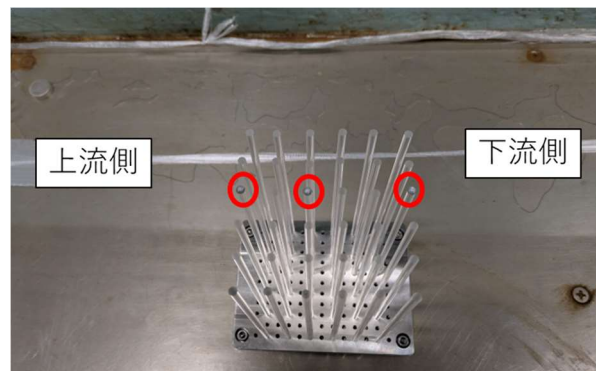


図4 実験に用いた円柱群の外観

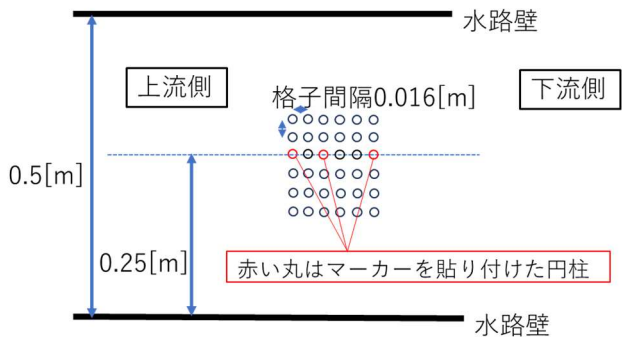


図5 実験での円柱群の配置

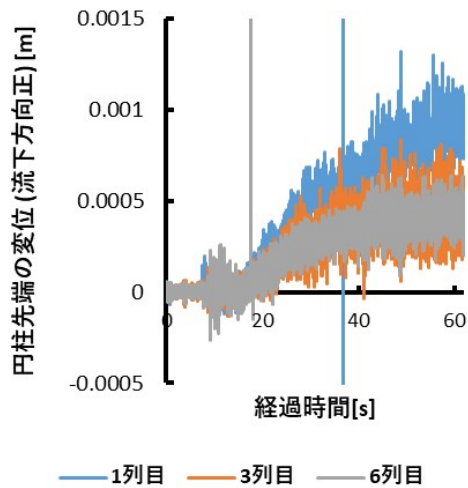


図6 実験で得られた円柱の先端変位の時刻歴

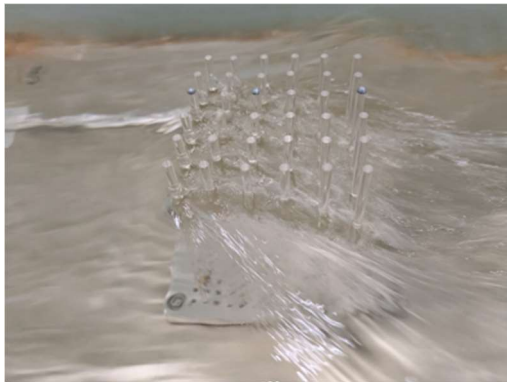


図7 実験中の円柱群付近の様子

実験に用いた円柱群は図4の通りである。図4中赤丸で囲った円柱の先端には(上流側から1, 3, 6列目)モーションキャプチャ用のマーカが貼り付けられており、先端変位を測定できる。円柱は直径4[mm]、長さ150[mm]のアクリル棒を用いた。円柱群の配置は図5の通りである。赤丸がマーカを貼り付けた円柱である。モーションキャプチャにはNobby Tech社のVENUS3Dを利用した。

流量を2.8[m³/min]で一定とし、モーションキャプチャを用いて計測した円柱先端の流れ方向への変位を図6に示す。また、実験中の円柱まわりにおける水面の様子を図7に示す。図6を見ると、円柱群のうち上流側の円柱の変位

が大きくなることが確認できる。流れが安定した時刻50[s]以降のグラフから、円柱群のうち1列目での変位はおよそ1[mm]、3, 6列目の円柱先端の変位は0.5[mm]程度であることが読み取れる。また、図7を見ると円柱群前方で水面が盛り上がり、円柱群後方で水面が下がっているという挙動が確認できる。流れが安定した際の円柱群最前列から1[cm]上流での水位は13[cm]、断面平均流速は、水深、水路幅および流量から計算し、0.71[m/s]だった。

次に、提案手法を用いて、以上の実験の状況に可能な限り近づけた解析を行う。解析に用いた系は図8の通りである。また、流体、構造解析の解析条件は表4、5、6の通りである。ここで、実験は水量一定の水流だったが、解析では技術的な課題から再現が行えなかったため、ダンプレイク解析で、円柱群近くでの水位、流速が近づくような条件に設定している。円柱の抗力係数は文献[8]を参考に $C_D = 1.2$ とした。

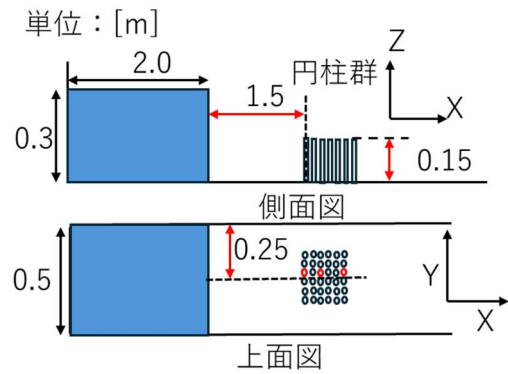


図8 円柱群解析に用いた系の概観

表4 円柱群解析での流体解析条件

時間増分	4.0×10^{-4} [s]
総ステップ数	10000
流体粒子径 r	0.016 [m]
影響半径	$r \times 2.4$
滑り率	0.00(非滑り条件)
密度	1.0×10^3 [kg/m ³]
動粘性係数	1.0×10^{-6} [m ² /s]
重力加速度	9.8 [m/s ²]
緩和係数	1.0×10^{-3}

表5 円柱群解析での構造解析条件

時間増分	4.0×10^{-4} [s]
総ステップ数	10000
ヤング率	3.2×10^9 [N/m ²]
ポアソン比	0.3
降伏応力	7.3×10^7 [N/m ²]
密度	1.20×10^3 [kg/m ³]
重力加速度	9.8 [m/s ²]
円柱幅 D	4.0×10^{-3} [m]

表6 円柱群解析での C_D , C_M

抗力係数 C_D	1.2
慣性係数 C_M	2.0

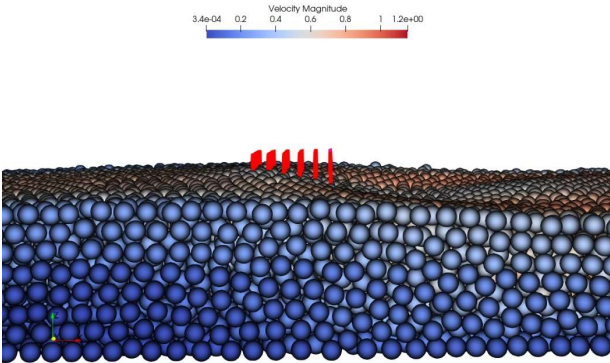


図9 時刻3.6[s]の可視化結果(コンター：流速，側面図)

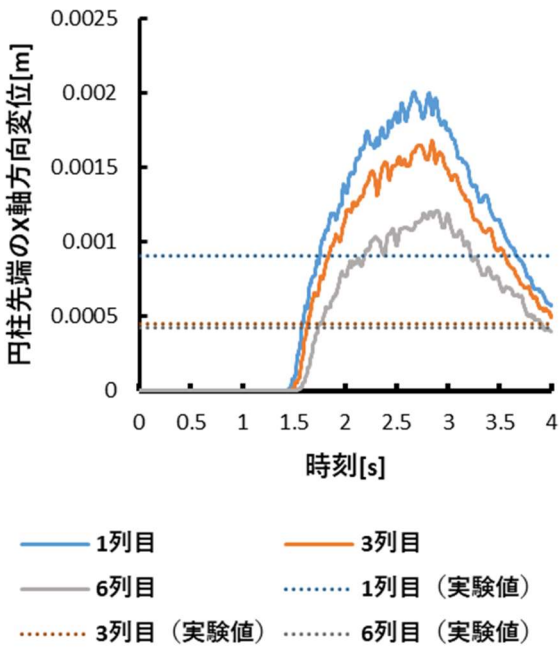


図10 解析での1, 3, 6列目の円柱先端変位の時刻歴

図9の円柱周囲の流体の挙動を見ると、円柱上流側で水面が盛り上がり、後流側で下がるという図7の写真とよく似た流体のマクロな挙動の再現が行えていることが確認できた。これは流体解析にDarcy-Brinkman式を導入したため、円柱群の間隙を流れる流体挙動をよく再現できたためだと考えられる。

図10に示すように、一番上流側の円柱が最も変位が大きく、後流側ほど変位が小さいという結果が得られた。なお、図中の実験値は実験結果のうち流れが安定した経過時間55 [s]以降の変位の平均値をとった値である。時刻3.6 [s]で円柱群最前列から1 [cm]上流位置の水位は13 [cm]、流速は0.64 [m/s]だった。この時点での変位は図11より、1列

目は0.98 [mm]、3列目は0.84 [mm]、6列目は0.69 [mm]だった。1列目の変位は実験値に近い値となった一方、3, 6列目の変位は実験値に比べ大きな値となった。過大評価となった原因について、本解析では抗力係数 C_D を一定値 $C_D = 1.2$ として与えていたことが原因であると考えられる。円柱群の密集度合いに応じた抗力係数の設定を導入することで改善されることが考えられる。

6. まとめ

本研究では、Darcy-Brinkman式に基づく流体解析とは異なる要素の構造解析を組み合わせる連成解析手法として、部材形状を陽に表現せず流速場から流体力を計算する非解像型流体-梁連成解析手法の開発を行った。既存手法との比較や、開水路を用いた実験との比較を行うことで提案手法は流体粒子径 r と部材幅 D の比 r/D が4以上の場合、単円柱に対して妥当に流体力を計算でき、流体のマクロな挙動も追跡可能であることが確認できた。今後の展望としては、円柱群の密集度合いに応じた抗力係数の設定を導入することが挙げられる。

参考文献

[1] C. Antoci, M. Gallati and S. Sibilla, Numerical simulation of fluid-structure interaction by SPH, *Computers & Structures*, Vol. 85, pp. 879-890, 2007.

[2] 江口 史門, 浅井 光輝, 大谷 英之, 一色 正晴, 建物群を含む地表面詳細モデルを用いた粒子法による三次元津波遡上解析, 土木学会論文集A1 (構造・地震工学), Vol. 72, No. 4 (地震工学論文第35巻), I_367-I_377, 2016.

[3] H. Akbari and M. M. Namin, Moving particle method for modeling wave interaction with porous structures. *Coastal Engineering*, Vol. 89, pp59-73, 2013.

[4] K. M. Lynn and D. Isobe, Finite Element Code for Impact Collapse Problems of Framed Structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 69, No. 12, pp. 2538-2563, 2007.

[5] 大村 浩之, 三目 直登, 浅井 光輝, 磯部大吾郎, 粒子法とASI-Gauss法のカップリングに基づく波浪-骨組構造連成解析, 計算工学講演会論文集, Vol. 28, 2023.

[6] T. Tamura and T. Miyagi, The effect of turbulence on aerodynamic forces on a square cylinder with various corner shapes, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol.83, pp135-145, 1999.

[7] S. Koshizuka, A. Nobe, and Y. Oka, Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 26, No. 7, pp. 751-769, 1998.

[8] R. C. Binder, FLUID MECHANICS, *prentice-Hall, Inc* FOURTH EDITION, pp. 169-170, 1962.