

# Fictitious Domain 法に基づく 反復型 SPH-FEM カップリング

An iterative SPH-FEM coupling scheme based on the Fictitious Domain method

大村浩之<sup>1)</sup>, 辻勲平<sup>2)</sup>, ガルビン妃羅<sup>3)</sup>, 浅井光輝<sup>4)</sup>  
Hiroyuki Omura, Kumpei Tsuji, Ciara Galvin and Mitsuteru Asai

<sup>1)</sup>防災科学技術研究所 特別研究員 (〒 305-0006 茨城県つくば市天王台 3-1, E-mail: homura@bosai.go.jp)

<sup>2)</sup>東北大学 助教 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区 6-6-06, E-mail: kumpei.tsuji.e1@tohoku.ac.jp)

<sup>3)</sup>東北大学 大学院 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区 6-6-06, E-mail: galvin.ciara.s1@dc.tohoku.ac.jp)

<sup>4)</sup>九州大学 准教授 (〒 819-0395 福岡県西区元岡 744, E-mail: asai@doc.kyushu-u.ac.jp)

In this research, we proposed a SPH-FEM coupling scheme based on fictitious domain method to formulate particle method-based FSI analysis method in framework of IBM or FDM, which have been systematized in mesh-based FSI analysis research. Furthermore, we defined residuals based on the boundary conditions imposed on interfaces and the constraint conditions imposed in virtual fluid domain, and proposed the formulation and algorithm of the iterative SPH-FEM coupling by applying the block Gauss-Seidel method with the Aitken's acceleration. Through calculations for a plate subjected to hydrostatic pressure, we confirmed that the proposed iterative coupling is significantly superior in terms of numerical stability to the conventional serial staggered coupling and the existing methods.

**Key Words :** SPH, FEM, Partitioned iterative coupling, FSI, Fictitious domain method

## 1. 緒言

流体構造連成 (Fluid-Structure Interaction, FSI) 解析手法は流体と構造の連成系を 1 つの大きな連立方程式で解く一体型解法と、流体と構造を別々に離散化し、行列のブロック構造を利用して解く分離反復型解法に分類される。適切なカプラーを実装したうえで、流体と構造それぞれに個別のソルバーを適用できるという面で、分離反復型解法はソフトウェアモジュラリティの観点から特に有用である。

有限要素法 (Finite Element Method, FEM) や有限要素体積法 (Finite Volume Method, FVM) などを用いた FSI 解析手法がこれまでに数多く提案されている (例えば [1,2] など)。他方、Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) や Moving Particle Simulation (MPS) に代表されるように、計算点同士のコネクティビティ情報を必要としない粒子法が 1990 年代以降発展を続けている。特に近年では、SPH(2)[3] や LSMPS[4] など、数理的に高次の精度が担保された手法群が提案されており、メッシュベースの手法と同等の精度の流体解析が可能になってきている。FSI における流体解析に粒子法が適用できれば、自由表面を伴う FSI 問題などアプリケーションの幅が大きく拡がることは論を俟たない。

FSI 解析において重要な連成界面を幾何学的に表現したり、界面上における力学的な平衡条件を付与したりする方法論は、埋め込み境界法 (Immersed Boundary Method, IBM) [5] や仮想領域法 (Fictitious Domain Method, FDM) [6] としてこれまで発展してきている。メッシュベースの FSI 解析手法群では、基本的にこれらの方法論の枠組みで定式化されている。一方、粒子

法を用いた FSI 解析の研究例 [7,8] は少なからず存在するものの、IBM や FDM の枠組みで連成現象を定式化している例は管見の限り存在しない。また、連成界面での残差を定義し、分離反復型の計算アルゴリズムを提案している例も少なく、既往研究のほとんどが分離逐次型解析に留まっている。

以上を踏まえ、本研究では流体解析に SPH、構造解析に FEM を適用した場合の分離反復型カップリング手法を提案する。相互作用力の定式化には、FDM を用いる。これは、FDM では連成界面の形状情報を精度良く保持することが要求されるが、Lagrange 記述かつリメッシュを要しないという粒子法ではこの要求が自動的に満たされるためである。言い換えれば、流体を Euler 記述で解く場合、IBM を適用する、すなわち界面の形状情報を何らかの表現形式で流体メッシュ上に埋め込むことが一般的だが、粒子法を用いる場合は界面の形状が陽に保持されるため、FDM を用いるのが自然である。

本稿では、第 2, 3 章それぞれで FSI 問題の支配方程式とそれに対する FDM の定式化を示したのち、第 4 章で SPH および FEM による時空間方向の離散化を記述する。第 5 章で反復型解法としての定式化およびその計算フローを提案し、第 6 章に提案手法の妥当性検証結果を示す。

## 2. 支配方程式

図-1 に示す流体構造連成系において、 $\Omega_f$  における非圧縮性 Newtonian 流体の Lagrange 記述された支配方程式は以下のように記述される。

$$\rho_f \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_f \mathbf{g} + \mathbf{f}_f \quad \text{in } \Omega_f \quad (1)$$

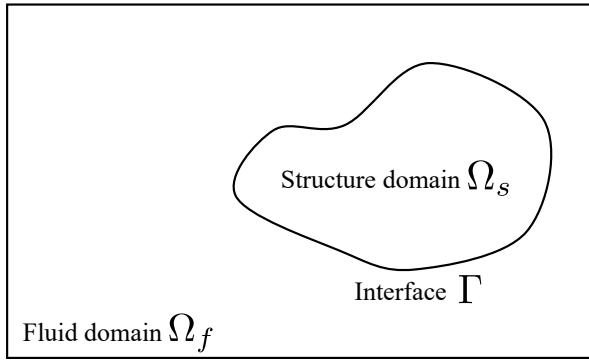


図-1 Fluid-structure system

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega_f \quad (2)$$

ここで、 $\rho_f, \mathbf{u}, t, p, \mu, \mathbf{g}$  はそれぞれ流体密度、流速、時間、圧力、粘性係数、重力加速度である。また、 $\mathbf{f}_f$  は連成界面上で構造から流体に向かって作用する相互作用力である。 $\Omega_s$  における構造物の運動方程式は次式で与えられる。

$$\rho_s \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \rho_s \mathbf{g} + \mathbf{f}_s \text{ in } \Omega_s \quad (3)$$

ここで、 $\rho_s, \mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}_s$  はそれぞれ固体密度、速度、応力である。また、 $\mathbf{f}_s$  は流体から構造に対して働く相互作用力である。

連成界面上における境界条件は力のつり合いと非すべり条件から、次式のように表される。

$$\mathbf{f}_f + \mathbf{f}_s = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \text{ on } \Gamma \quad (5)$$

### 3. Fictitious domain 法

Diaz-Goano et al. (2003) [9] に基づき、構造領域  $\Omega_f$  が仮想的な非圧縮性 Newtonian 流体で満たされていると仮定する。この時、 $\mathbf{f}_f$  の代わりに仮想流体に作用する未知の相互作用力を  $\lambda$  とする。また、速度場は構造物が持つ速度場  $\mathbf{v}$  で拘束される [10]。これにより、仮想流体を含む流体領域が満足する基礎式は全領域  $\Omega$  で成り立つ方程式として表される。

$$\rho_f \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_f \mathbf{g} - \lambda \text{ in } \Omega \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega \quad (7)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \text{ in } \Omega_s \quad (8)$$

$$\lambda = \mathbf{0} \text{ in } \Omega_f \quad (9)$$

次に、仮想流体の仮定と疑似相互作用力  $\lambda$  を含む場合に構造物が満たすべき運動方程式を導く。式(8)の両辺を時間微分し、 $\rho_s$  を乗じ  $\Omega_s$  に渡って積分すると、次式を得る。

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \frac{d\mathbf{u}}{dt} d\Omega = \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega \quad (10)$$

式(10)の右辺に式(3)を代入すると、次式を得る。

$$\int_{\Omega_s} \rho_s \frac{d\mathbf{u}}{dt} d\Omega = \int_{\Omega_s} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s d\Omega + \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{g} d\Omega + \int_{\Omega_s} \mathbf{f}_s d\Omega \quad (11)$$

式(11)の右辺第3項について、 $\mathbf{f}_s$  は表面力として定義しているため、流体の応力テンソル  $\boldsymbol{\sigma}_f$  と界面の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$ 、ならびに発散定理を用いて次式のように表せる。

$$\int_{\Omega_s} \mathbf{f}_s d\Omega = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega_s} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f d\Omega \quad (12)$$

なお、非圧縮性 Newtonian 流体について  $\boldsymbol{\sigma}_f$  について次式が成り立つ。

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -p \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (13)$$

$\mathbf{1}, \mathbf{D}$  はそれぞれ単位テンソル、ひずみ速度テンソルである。式(6, 8, 12, 13)を式(10)に代入して整理すると、次式を得る。

$$(\rho_s - \rho_f) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} + \lambda \text{ in } \Omega_s \quad (14)$$

式(14)の  $\lambda$  に式(10)の第1式を代入し、 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  を用いて整理すると、流体との相互作用を考慮した運動方程式として最終的に次式を得る。

$$\rho_s \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \rho_s \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \text{ in } \Omega_s \quad (15)$$

すなわち、式(10)を解いて得られた仮想流体に作用する圧力勾配項と粘性項を外力として構造物に与えればよい。なお、これらの外力は表面力ではなく体積力として導かれていることに注意されたい。

### 4. 時間・空間方向の離散化

#### a) 流体領域の離散化

SPH(2)に従い式(6, 7)を空間方向に離散化する。流体粒子の集合を  $\mathbb{P}_f$ 、仮想流体粒子の集合を  $\mathbb{P}_s$ 、全粒子の集合を  $\mathbb{P}$  とすると、粒子  $i \in \mathbb{P}$  に関して式(6, 7)はそれぞれ次のように離散化される。

$$\rho_f \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -\langle \nabla p \rangle_i + \langle \mu \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i + \rho_f \mathbf{g} - \lambda_i \quad (16)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i = 0 \quad (17)$$

ただし、粒子  $i$  上で評価される SPH(2)に基づく空間微分モデルを  $\langle \rangle_i$  と表記している。これらの具体形については文献 [3] を参照されたい。

式(16, 17)をさらに時間方向に離散化する。ここでは、IBM や FDM でしばしば用いられる Direct-Forcing[11] と呼ばれるスキームを適用し、 $\lambda$  に関して式(6)を時間方向に分解する。さらに、SPH に基づく非圧縮性流れの解析手法 (Incompressible SPH, ISPH) に倣い、同様に Fractional Step 法に基づき圧力依存項と速度依存項を分離する。任意の物理量  $\phi$  を時間方向に離散表示し、 $n$  番目の時間ステップにおける物理量を  $\phi^n$  と記述すると、最終的に全粒子  $i \in \mathbb{P}$  に関して次式の解くべき方程式を得る。

$$\rho_f \frac{\mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} = \langle \mu \nabla^2 \mathbf{u}^n \rangle_i + \rho_f \mathbf{g} \quad (18)$$

$$\langle \nabla^2 p^{n+1} \rangle_i = \frac{\rho_f}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}^* \rangle_i \quad (19)$$

$$\rho_f \frac{\mathbf{u}_i^{**} - \mathbf{u}_i^*}{\Delta t} = -\langle \nabla p^{n+1} \rangle_i \quad (20)$$

$$\rho_f \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^{**}}{\Delta t} = -\lambda_i^{n+1} \quad (21)$$

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \Delta t \mathbf{u}_i^{n+1} \quad (22)$$

ただし、 $\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \mathbf{u}^{**}, \Delta t$  はそれぞれ位置、第1中間速度、第2中間速度、時間増分幅である。また、 $\mathbf{u}$  の時間微分には前方差分を適用している。

$\lambda^{n+1}$  は式 (8, 9, 21) より次式で与えられる。

$$\lambda_i^{n+1} = \begin{cases} -\rho_f \frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^{**}}{\Delta t} & \text{for } i \in \mathbb{P}_s \\ \mathbf{0} & \text{for } i \in \mathbb{P}_f \end{cases} \quad (23)$$

$\mathbf{v}_i^{n+1}$  は仮想流体粒子  $i$  上で評価される構造領域の速度場であり、具体的な計算方法は後述する。式 (21, 23) から、結局  $\mathbf{u}_i^{n+1}$  は次式に従って更新される。

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \begin{cases} \mathbf{v}_i^{n+1} & \text{for } i \in \mathbb{P}_s \\ \mathbf{u}_i^{**} & \text{for } i \in \mathbb{P}_f \end{cases} \quad (24)$$

### b) 構造領域の離散化

FEM および Newton-Raphson 法に従い式 (15) の非線形動的平衡方程式を離散化する。変位を主変数とすると、空間離散化後の方程式は次式のように表される。

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{M} \frac{d^2\boldsymbol{\delta}}{dt^2} = \mathbf{F} - \mathbf{Q} - \mathbf{M}\mathbf{a} \quad (25)$$

$\boldsymbol{\delta}, \mathbf{a}, \mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}$  はそれぞれ節点変位、節点加速度、全体接線剛性行列、全体質量行列、節点外力、節点内力である。

$\mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{Q}$  の具体形は割愛するが、要素には線形 Timoshenko 梁要素を用いる。線形 Timoshenko 梁要素は2節点12自由度の梁要素であり、全ての変位成分を同一の形状関数（1次 Lagrange 補間関数）で補間する。詳細は [12] などに記載されている。

式 (25) に Newmark's beta 法を用いて時間方向の離散化を適用すると、最終的に解くべき方程式は次のように表される。

$$\left( \mathbf{K}^{n+1,k} + \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{M}^{n+1,k} \right) \Delta \boldsymbol{\delta}^{n+1,k+1} = \mathbf{F}^{n+1} - \mathbf{Q}^{n+1,k} - \mathbf{M}^{n+1,k} \mathbf{a}^{n+1,k} \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{n+1,k+1} = \boldsymbol{\delta}^{n+1,k} + \Delta \boldsymbol{\delta}^{n+1,k+1} \quad (27)$$

$$\mathbf{v}^{n+1,k+1} = \mathbf{v}^{n+1,k} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \boldsymbol{\delta}^{n+1,k+1} \quad (28)$$

$$\mathbf{a}^{n+1,k+1} = \mathbf{a}^{n+1,k} + \frac{1}{\beta \Delta t} \Delta \boldsymbol{\delta}^{n+1,k+1} \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\delta}^{n+1,0} = \boldsymbol{\delta}^n \quad (30)$$

$$\mathbf{v}^{n+1,0} = \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \mathbf{v}^n + \Delta t \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \mathbf{a}^n \quad (31)$$

$$\mathbf{a}^{n+1,0} = -\frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{v}^n + \left( 1 - \frac{1}{2\beta} \right) \mathbf{a}^n \quad (32)$$

$\mathbf{v}$  は節点速度、 $k$  は Newton-Raphson 法に基づく非線形反復イタレーションのカウンターである。 $\beta, \gamma$  は Newmark's beta 法における時間積分パラメータであり、Hilber-Huges-Taylor (HHT) 法に基づき値を決定する。

$$\beta = \frac{(1-\alpha)^2}{4} \quad (33)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha \quad (34)$$

ここで、 $\alpha \in [-1/3, 0]$  は数値減衰パラメータであり、値が小さいほど減衰効果が大きくなる。

前述の通り、構造領域を満たす仮想流体は SPH で解くため、梁要素で離散化された構造領域を粒子で補間表現する必要がある。図 2 に示すように、要素内の自然座標  $\xi$  上の断面領域を粒子で離散表現する。断面の位置に応じた粒子集合を  $\mathbb{S}_\xi$  とする。断面内の任意の粒子  $i \in \mathbb{S}_\xi$  の修正変位は、 $\xi$  における中立軸上の変位  $\Delta \boldsymbol{\delta}_M$  と断面の回転行列  $\Delta \mathbf{R}$  を用いて次式のように求められる。

$$\Delta \boldsymbol{\delta}_i^{n+1,k+1} = \Delta \boldsymbol{\delta}_M^{n+1,k+1} + (\Delta \mathbf{R}^{n+1,k+1} - \mathbf{1}) \mathbf{r}_i^{n+1,k} \quad (35)$$

ただし、 $\mathbf{r}_i$  は中立軸に対する粒子  $i$  の相対位置ベクトルである。表式は割愛するが、仮想流体粒子の変位  $\boldsymbol{\delta}_i$ 、速度  $\mathbf{v}_i$ 、加速度  $\mathbf{a}_i$  は式 (35) を用いて式 (27~29) と同様に求めることができる。

要素を補間する仮想流体粒子  $i$  に作用する流体外力  $\mathbf{f}_i^{n+1}$  は、式 (15) の右辺第 3, 4 項を体積積分することで次式のように得られる。

$$\mathbf{f}_i^{n+1} = V_i^n \left( -\langle \nabla p^{n+1} \rangle_i + \langle \mu \nabla^2 \mathbf{u}^{**} \rangle_i \right) \quad (36)$$

$V_i$  は粒子  $i$  の代表体積である。要素  $e$  の節点外力  $\mathbf{F}_e$  は次式で与えられる。

$$\mathbf{F}_e^{n+1} = (f_{e,1}^{n+1} \quad f_{e,2}^{n+1} \quad \mathbf{m}_{e,1}^{n+1} \quad \mathbf{m}_{e,2}^{n+1})^\top \quad (37)$$

$$f_{e,\alpha}^{n+1} = \sum_i N_\alpha(\xi) f_i^{n+1} \quad (38)$$

$$\mathbf{m}_{e,\alpha}^{n+1} = \sum_i N_\alpha(\xi) [\mathbf{r}_i^n \times \{1 - \mathbf{t}^n(\xi) \otimes \mathbf{t}^n(\xi)\} f_i^{n+1}] \quad (39)$$

$N^\alpha(\xi), \mathbf{t}(\xi)$  はそれぞれ形状関数と要素上の単位接線ベクトルである。 $\mathbf{F}_e$  を系全体でアセンブルすることで、式 (26) における節点外力ベクトル  $\mathbf{F}$  が得られる。

一般に、ISPH 法では粒子体積  $V_i$  は固定値として扱われる。しかし、構造領域を表す仮想流体粒子については、固体の変形に伴う体積変化率に応じて  $V_i$  を補正する必要がある。本研究では、次式に従い体積を更新する。

$$V_i^{n+1} = \det(\langle \mathbf{G} \rangle_i^{n+1}) V^0 \quad (40)$$

ここで、 $\mathbf{G}$  は変形勾配テンソルであり、変位ベクトルの1階微分で与えられる。また、 $V^0$  は初期粒子体積であり、3次元空間の場合は粒子径  $d$  を用いて  $V^0 = d^3$  で与えられる。

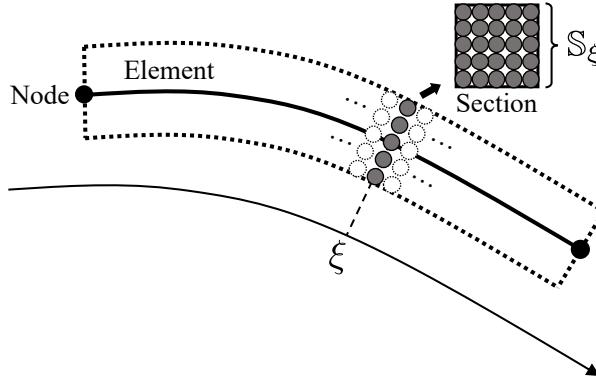


図-2 Discretization with particles for a beam element

## 5. 分離反復型 SPH-FEM カップリング

一般に、分離型の連成解析において、流体領域と構造領域の間で伝達される情報は連成境界面上の速度と力であるが、FDM を用いる場合は構造領域内部、すなわち仮想流体粒子上の速度と力が伝達される。したがって、流体解析は仮想流体粒子  $i \in \mathbb{P}_s$  に対して、 $\mathbf{u}_i^n$  を入力として第 2 中間速度  $\mathbf{u}_i^{**}$  を返す関数  $\mathcal{F}$  と捉えることができる。構造解析は外力  $\mathbf{f}_i^{n+1}$  を入力として  $\mathbf{v}_i^{n+1}$  を返す関数  $\mathcal{S}$  と解釈できるが、式 (8, 36) より、結局  $\mathcal{F}$  の入力は  $\mathbf{u}_i^{**}$ 、出力は  $\mathbf{u}_i^{n+1}$  で与えられる。したがって、ステップ間で生じる残差  $\mathbf{r}$  は次式で与えられる。

$$\mathbf{r}^{n+1} = (\mathbf{r}_1^{n+1} \quad \mathbf{r}_2^{n+1} \quad \cdots \quad \mathbf{r}_{|\mathbb{P}_s|}^{n+1})^\top \quad (41)$$

$$\mathbf{r}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \mathcal{S}(\mathcal{F}(\mathbf{u}_i^n)) \quad (42)$$

本研究では、この連立方程式の解法として Aitken 補外付 Block Gauss-Seidel 法 [13] を用いる。すなわち、分離反復型連成のためのイタレーション  $l$  を導入し、次式にしたがって仮想流体粒子の速度  $\mathbf{u}_i$  を更新する。

$$\mathbf{u}_i^{n+1,l+1} = \mathbf{u}_i^{n+1,l} - \omega^{n+1,l+1} \mathbf{r}_i^{n+1,l+1} \quad (43)$$

$$\mathbf{r}_i^{n+1,l+1} = \mathbf{u}_i^{n+1,l} - \mathbf{u}_i^{n+1,l+1} \quad (44)$$

$$\omega^{n+1,l+1} = -\omega^{n+1,l} \frac{\mathbf{r}^{n+1,l} \cdot (\mathbf{r}^{n+1,l+1} - \mathbf{r}^{n+1,l})}{\|\mathbf{r}^{n+1,l+1} - \mathbf{r}^{n+1,l}\|^2} \quad (45)$$

ただし、緩和係数の初期値は  $\omega^{n+1,0} = 0.1$  とする。緩和係数を用いない場合、式 (43) による速度の更新は元の更新式である式 (24) に一致する。

以上より、本研究で提案する FDM に基づく分離反復型 SPH-FEM カップリングの計算フローを Algorithm 1 に示す。第 15 行目の  $\varepsilon$  は収束判定に用いる閾値であり、本稿では  $\varepsilon = 10^{-3}$  とする。

## Algorithm 1 Calculation flow of the proposed iterative SPH-FEM coupling at the $n + 1$ th time step

```

1: Initialize  $\delta^{n+1,0}, \mathbf{v}^{n+1,0}, \mathbf{a}^{n+1,0}$  (eq. (30-32))
2: for Coupling iteration loop:  $l = 0, 1, \dots$  do
3:   Initialize following variables of fluid particles  $\mathbb{P}_f$ 
4:    $\mathbf{x}_i^{n+1,l} \leftarrow \mathbf{x}_i^n, \mathbf{u}_i^{n+1,l} \leftarrow \mathbf{u}_i^n$ 
5:   Solve fluid domain and obtain  $\mathbf{u}_i^{*,l+1}, p_i^{n+1,l+1}$  for all particles  $\mathbb{P}$  (eq. (18-20))
6:   Calculate fluid forces  $\mathbf{f}_i^{n+1,l+1}$  exerted on fictitious particles  $\mathbb{P}_s$  and nodal force  $\mathbf{F}^{n+1,l+1}$  (eq. (36 - 39))
7:   Solve structure domain and obtain  $\delta^{n+1,l+1}, \mathbf{v}^{n+1,l+1}, \mathbf{a}^{n+1,l+1}$  (eq. (26-29))
8:   Calculate structural velocity  $\mathbf{v}_i^{n+1,l+1}$  and volume  $V_i^{n+1,l+1}$  of fictitious particles  $\mathbb{P}_s$  (eq. (35, 40))
9:   Update body force  $\lambda_i^{n+1,l+1}$  of all particles  $\mathbb{P}$  (eq. (23))
10:  Calculate residual vector  $\mathbf{r}^{n+1,l+1}$  for fictitious particles  $\mathbb{P}_s$  (eq. (41, 44))
11:  Update velocity  $\mathbf{u}_i^{n+1,l+1}$  of fluid particles  $\mathbb{P}_f$  (eq. (24)) and fictitious particles  $\mathbb{P}_s$  (eq. (43, 45))
12:  Update position  $\mathbf{x}_i^{n+1,l+1}$  of all particles  $\mathbb{P}$  (eq. (22))
13:  if  $\|\mathbf{r}^{n+1,l+1}\| / \|\mathbf{r}^{n+1,1}\| < \varepsilon$  then
14:     $\phi^{n+1} \leftarrow \phi^{n+1,l+1}$  ( $\phi$  is arbitrary variable)
15:    Break iteration loop
16:  end if
17: end for

```

## 6. 計算例

提案手法の妥当性を検証するために、図-3 に示す、側壁に囲まれ底面に両端固定の板を有する静水圧問題を解く。流体解析および構造解析の解析条件を表-1 に示す。

板の中央における鉛直方向変位  $\delta_z$  の理論解は次式で与えられる [14]。

$$\delta_z = \frac{(\rho_f H + \rho_s h) \|g\| L^4}{384D} \quad (46)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (47)$$

なお、ここでは構造解析に梁要素を用いているため、シェルの曲げ剛性と整合するよう板の弱軸まわりの断面二次モーメントに  $1/(1-\nu^2)$  を乗じている。

逐次時差解法 (Conventional Serial Staggered, CSS) および提案手法で計算された板の中央における鉛直方向変位の時刻歴をそれぞれ図-4, 5 に示す。CSS を用いた解析では初期段階から高周波の振動が発生し、その振動が成長することでやがて解が発散した。これは、板の振動に伴って圧力振動が励起され、それによってさらに振動が増幅することで数値的な不安定状態に陥ったためと考えられる。逐次解法を用いた場合に生じる数値的不安定性については、他の文献 (例えは [14] など) でも同様に確認されている。一方で、提案した反復型解法を用いた場合にはステップごとに残差の収束を担保しているため、このような不安定性は生じておらず、精緻な解が得られている。また、粒子間距離およ

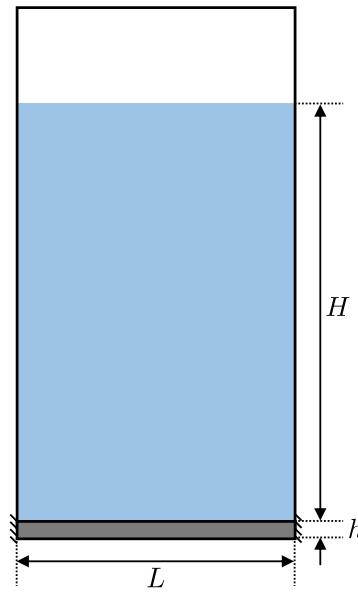


図-3 Initial configuration

表-1 Analysis conditions

Fluid analysis	
Height $H$	2.00 m
Density $\rho_f$	$1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
Viscosity $\mu$	$1.00 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$
Particle spacing $d$	10.00, 6.250, $5.000 \times 10^{-3} \text{ m}$
Time increment $\Delta t$	$5.000, 3.125, 2.500 \times 10^{-4} \text{ s}$
Structural analysis	
Thickness $h$	0.05 m
Length $L$	1.00 m
Density $\rho_s$	$2.70 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
Young's modulus $E$	$6.75 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
Poisson's ratio $\nu$	0.34
Number of elements	20
Time increment $\Delta t$	$5.000, 3.125, 2.500 \times 10^{-4} \text{ s}$
Numerical damping $\alpha$	0.00

び時間増分を小さくするほど理論解との誤差も小さくなっていることから、提案手法の収束性も確認された。

図-6にCSSおよび提案手法それぞれで解いた場合における流体粒子および仮想粒子の圧力分布を示す。上述の通り、CSSでは変位解の振動および発散が生じたが、それによって圧力解も不安定になっていることが図から確認できる。それに対して、提案手法では妥当な静水圧分布が計算されていることが分かる。

最後に、図-7に提案手法および既往研究それぞれで得られた鉛直方向変位の時刻歴を示す。Fourey et al. (2017) [14] は SPH-FEM 分離逐次時差解法、Khayyer et al. (2018) [15] および Morikawa and Asai (2021) [16] は SPH-SPH 分離逐次時差解法を用いている。SPH-SPH 分離逐次時差解法と提案手法を比較すると、理論解との誤差は同程度だが、提案手法による計算結果には振動が発生しておらず、連成反復計算によって極めて安定

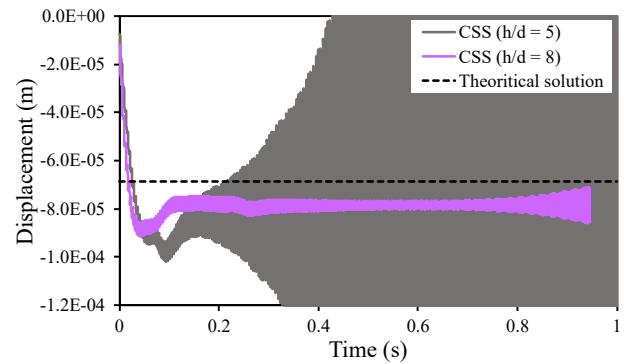


図-4 Displacement at the center for the conventional serial staggered coupling

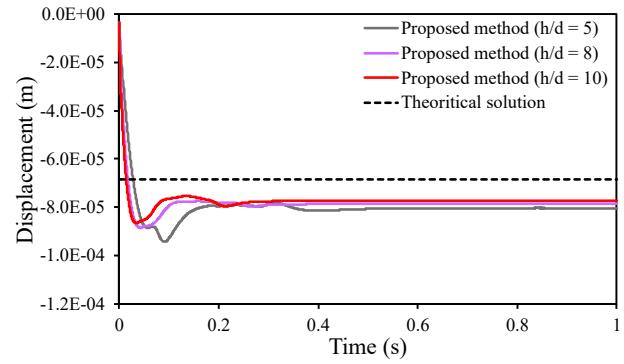
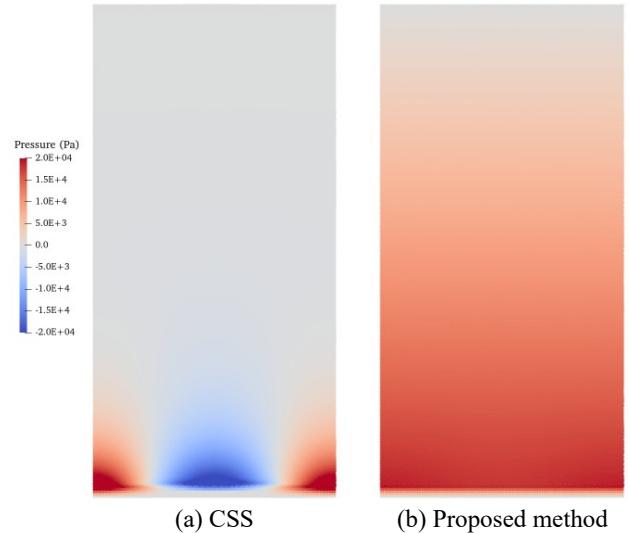


図-5 Displacement at the center for the proposed iterative coupling

図-6 Pressure distribution on particles with  $d = 5.00 \times 10^{-3} \text{ m}$  and  $\Delta t = 2.50 \times 10^{-4} \text{ s}$  at  $t = 1.0 \text{ s}$ 

的な解が得られている。また、図-7に示した Fourey et al. の結果は HHT 法の数値減衰 ( $\alpha = -0.3$ ) を導入した場合であり、 $\alpha = 0.0$  の場合は上述した図-4 と同様、解が発散することが確認されている [14]。図-7 の提案手法による結果は数値減衰を導入していないものであり、チューニングパラメータである  $\alpha$  を要せず安定的な解が得られるという面で提案手法の優位性が確認された。

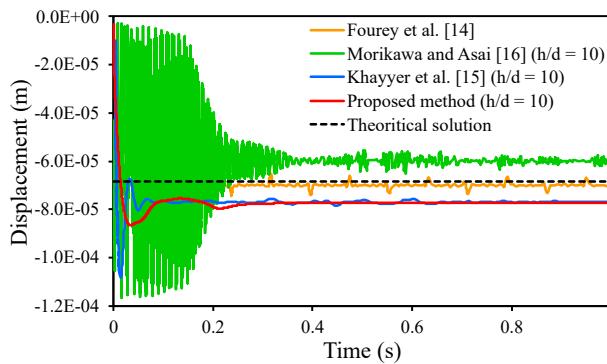


図-7 Displacement at the center for the proposed method and the existing methods

## 7. 結言

本研究では、メッシュベースのFSI解析研究で体系化されてきたIBMやFDMの枠組みで粒子法ベースFSI解析を定式化することを目的とし、SPHにFDMを適用した場合の流体構造連成解析手法を提案した。さらに、連成面の境界条件と仮想流体に課される拘束条件に基づいて残差を定義し、Aitken補外付Block Gauss-Seidel法を適用することで、分離反復型SPH-FEMカップリングの定式化と計算フローを示した。静水圧を受ける板材を対象にした検証計算の結果、提案手法がCSSならびに既往の類似手法に対して数値的安定性の面で有意に優れていることが確認された。

## 参考文献

- [1] F. Sotiropoulos, X. Yang, Immersed boundary methods for simulating fluid-structure interaction. *Prog. Aerosp. Sci.* **65**, 1–21 (2014).
- [2] F. P. T. Baaijens, A fictitious domain/mortar element method for fluid-structure interaction. *Int. J. Numer. Methods Fluids* **35**, 743–761 (2001).
- [3] M. Asai, S. Fujioka, Y. Saeki, D. S. Morikawa, K. Tsuji, A class of second-derivatives in the Smoothed Particle Hydrodynamics with 2nd-order accuracy and its application to incompressible flow simulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **415**, 116203 (2023).
- [4] T. Tamai, S. Koshizuka, Least squares moving particle semi-implicit method: An arbitrary high order accurate meshfree Lagrangian approach for incompressible flow with free surfaces. *Comput. Part. Mech.* **1**, 277–305 (2014).
- [5] C. S. Peskin, D. M. McQueen, A three-dimensional computational method for blood flow in the heart I. Immersed elastic fibers in a viscous incompressible fluid. *J. Comput. Phys.* **81**, 372–405 (1989).
- [6] R. Glowinski, T.-W. Pan, J. Periaux, A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **111**, 283–303 (1994).
- [7] T. Long, D. Hu, D. Wan, C. Zhuang, G. Yang, An arbitrary boundary with ghost particles incorporated in coupled FEM–SPH model for FSI problems. *J. Comput. Phys.* **350**, 166–183 (2017).
- [8] L. Han, X. Hu, SPH modeling of fluid-structure interaction. *J. Hydrodynam. B* **30**, 62–69 (2018).
- [9] C. Diaz-Goano, P. D. Minev, K. Nandakumar, A fictitious domain/finite element method for particulate flows. *J. Comput. Phys.* **192**, 105–123 (2003).
- [10] R. Glowinski, T.-W. Pan, T. I. Hesla, D. D. Joseph, A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *Int. J. Multiph. Flow* **25**, 755–794 (1999).
- [11] Z. Yu, X. Shao, A direct-forcing fictitious domain method for particulate flows. *J. Comput. Phys.* **227**, 292–314 (2007).
- [12] T. J. R. Hughes, R. L. Taylor, W. Kanoknukulchai, A simple and efficient finite element for plate bending. *Int. J. Numer. Methods Eng.* **11**, 1529–1543 (1977).
- [13] M. M. Joosten, W. G. Dettmer, D. Perić, Analysis of the block Gauss–Seidel solution procedure for a strongly coupled model problem with reference to fluid–structure interaction. *Int. J. Numer. Methods Eng.* **78**, 757–778 (2009).
- [14] G. Fourey, C. Hermange, D. Le Touzé, G. Oger, An efficient FSI coupling strategy between Smoothed Particle Hydrodynamics and Finite Element methods. *Comput. Phys. Commun.* **217**, 66–81 (2017).
- [15] A. Khayyer, H. Gotoh, H. Falahat, Y. Shimizu, An enhanced ISPH–SPH coupled method for simulation of incompressible fluid–elastic structure interactions. *Comput. Phys. Commun.* **232**, 139–164 (2018).
- [16] D. S. Morikawa, M. Asai, Coupling total Lagrangian SPH–EISPH for fluid–structure interaction with large deformed hyperelastic solid bodies. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **381**, 113832 (2021).