

マイクロカンチレバー試験のための ロバストな SPH シミュレーション

Development of Robust SPH simulation for inter-/intra-granular crack propagation in micro-cantilevers

全世原¹⁾呂学龍²⁾松井和己³⁾山田貴博⁴⁾
Sewon Jeon, Xuelong Lyu, Kazumi Matsui and Takahiro Yamada

¹⁾修 (情) 横浜国立大学 大学院環境情報学府 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7, E-mail: jeon-sewon-yk@ynu.jp)

²⁾博 (工) 横浜国立大学 大学院環境情報学府 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7, E-mail: lu-xuelong-tc@ynu.ac.jp)

³⁾博 (工) 横浜国立大学 大学院環境情報研究院 准教授 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7, E-mail: kzm@ynu.ac.jp)

⁴⁾学博 横浜国立大学 大学院環境情報研究院 教授 (〒 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-7, E-mail: tyamada@ynu.ac.jp)

For the ceramics material, micro-cantilever test is widely used to evaluate mechanical properties and uncover its fracture mechanism. According to recent studies, it is known that the crack propagation in micro-cantilevers occurs in the inter-granular and intra-granular regions. However, it is impossible to know which crack propagation occurs in the micro-cantilevers before the test. To express this complex fracture phenomenon, a simulation method that can consider both intergranular and intragranular crack propagation is required. However, traditional FEM has limitation to simulate the intra-granular crack propagation in the micro-cantilevers due to its spatial discretization. Motivated by this, this study aims to develop a simulation which can consider and simulate inter-/intra-granular crack propagation in micro-cantilevers by using Smoothed Particle hydrodynamics(SPH), a meshless method.

Key Words : SPH, micro-cantilever test, crack propagation, brittle fracture

1. はじめに

多結晶セラミックスは、優れた機械的特性を有することから、幅広い産業分野で用いられている。しかし、近年の高度な製品設計においては、単に弾塑性挙動を理解するだけでなく、破壊に至るまでの挙動、特に破壊メカニズムの解明が極めて重要だとされている。

Tatami ら [1] の研究によると、セラミック製マイクロカンチレバーの破壊は、粒界の破壊 (inter-granular crack) だけでなく、弾塑性挙動の後に粒内の破壊 (intra-granular crack) によっても生じることが示されている。また、試験前に粒界が破壊されるのか粒内が破壊されるのかを予測することは依然困難であり、完璧に同様な試験片を作成し、同様な条件の下で試験を行うことはできないと言われている。

このような複雑な破壊現象をシミュレーション上でうまく再現するには、粒界および粒内の破壊を同時に考慮できるような手法が求められる。従来の有限要素法 (FEM) は、特定の破壊基準に基づいてノードを分割することで、き裂を表現することが可能であるが、破壊経路を事前に定義する必要がある。特に粒内での破壊を考慮する場合には、破壊経路が予測できず、計算が困難とされている。

そのため、本研究では大変形や破壊の解析に優れたとされているメッシュフリー法の Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) 法 [2] を用いる。SPH 法はパーティクルに変形の履歴を持たせることが可能であるため、弾塑性挙動も表現できる。しかし、従来の SPH 法は運動

方程式を陽的に解き、構成則においても陽的解法を用いることが多く、数値的不安定性が生じやすいと言われている。特に本研究で取り扱う破壊解析のように不安定になりやすい解析においては、計算の安定性が求められる。

大きな変形を扱う際 [3]、弾塑性挙動において回転の影響を分離して考えるため、超弾性ベースの材料モデルがよく用いられている。このような材料モデルは変形勾配を入力として用いるため、SPH 法においても変形勾配を計算する必要がある。ここで、Vidal ら [4] は、Bonet ら [5] により提案された CSPH(Corrected SPH) 法において連続体力学の枠組みで変形勾配を定義した。

本研究では、CSPH 法を用いて空間離散化においては陽解法、応力積分においては陰解法を用いることで、数値的安定性を向上させ、実際のマイクロカンチレバー試験で観測できた粒界・粒内破壊が同時に考慮できるロバストなシミュレーションを実現することを目的とする。

2. CSPH の定式化

今、bonet らにより導出された CSPH の定式化を示す。

(1) 密度方程式

まず、本手法で用いられる密度の定義は以下である。

$$\dot{\rho} = -\rho \text{div} \mathbf{v} \quad (1)$$

ここで、 ρ はある空間の密度、 \mathbf{v} はその空間の速度ベ

クトルである。この密度方程式を解くためには、速度ベクトル \mathbf{v} とその発散を求める必要があり、その記述は以下のようである。

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{b=1}^N V_b \mathbf{v}_b W_b(\mathbf{x}), \quad V_b = \frac{m_b}{\rho_b} \quad (2)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{v})_a = \sum_{b=1}^N V_b (\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_a) \cdot \nabla W_b(\mathbf{x}_a) \quad (3)$$

ここで、あるポイントでの物理量を評価する際、そのポイント基準で影響半径を設定し、その影響半径内に存在するパーティクルたちを用いて評価する。上記の式で、 $-\mathbf{v}_a$ は一様な速度場において、発散が 0 にせらるるために導入されている。 V_b はパーティクルの代表体積、 m_b はパーティクルの質量、 ρ_b はパーティクルの密度、 ∇W_b はカーネル関数の勾配である。カーネル関数の勾配は以下で定義される。

$$\nabla W_b(\mathbf{x}_a) = \frac{dW}{dr} \frac{1}{r_{ab}} (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b), \quad r_{ab} = |\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b| \quad (4)$$

ここで、 W はカーネル関数であり、 r_{ab} はパーティクル間の距離である。以上より、式 (3), (4) と時間積分を用いることで、密度を持続的に更新することができる。

(2) 内部ポテンシャルエネルギーと内力

次に、内部ポテンシャルエネルギーと内力の定義を示す。簡単なケースを考えるため、等方的な応力テンソル $\sigma = p\mathbf{I}$ を仮定する。まず、体積変化率 J は以下のように表される。

$$J = \frac{V}{V^0} = \frac{\rho^0}{\rho} \quad (5)$$

そして、エネルギーの漏れのない断熱過程を仮定すると、材料の初期体積あたりの貯蔵内部エネルギー $U(J)$ と置くことができ、圧力 p は以下のように求められる。

$$p = \frac{dU}{dJ} \quad (6)$$

このとき、弾性材料を仮定すると、 $U(J) = (1/2)\kappa(J-1)^2$ である。また、連続体がドメイン上に N 個のパーティクルで離散化されたとすると全体の貯蔵エネルギー関数は次のように表される。

$$\Pi(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^N V_a^0 U(J_a) \quad (7)$$

ここで、 V_a^0 はパーティクルの代表初期体積であり、上記の関数は系の弾性ポテンシャルエネルギーを表す。このポテンシャルエネルギーから方向微分をとることで、内力が求められる。

$$D\Pi[\delta\mathbf{v}] = \sum_{a=1}^N \mathbf{T}_a \cdot \delta\mathbf{v}_a, \quad \mathbf{T}_a = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{v}_a} \quad (8)$$

式 (8) に式 (7) を代入し、式 (7) の微分において式 (5), (6) の関係を考慮した上でチェーンルールを適用すると、内力を導出することができる。

$$\begin{aligned} D\Pi[\delta\mathbf{v}] &= \sum_{a=1}^N V_a^0 D\mathbf{U}_a[\delta\mathbf{v}] \\ &= \sum_{a=1}^N V_a^0 p_a \left(-\frac{\rho_a^0}{\rho_a^2} \right) D\rho_a[\delta\mathbf{v}] \\ &= -\sum_{a=1}^N m_a \left(\frac{p_a}{\rho_a^2} \right) D\rho_a[\delta\mathbf{v}] \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、実際のパーティクルの速度に方向微分をとると時間微分と等価になることを考慮した上で式 (1) で定義した密度方程式を用いて内力を求めると、

$$\begin{aligned} D\Pi[\delta\mathbf{v}] &= \sum_{a,b=1}^N V_a V_b p_a \nabla W_b(\mathbf{x}_a) \cdot (\delta\mathbf{v}_b - \delta\mathbf{v}_a) \\ &= \sum_{a=1}^N \left[\sum_{b=1}^N V_a V_b (p_a + p_b) \nabla W_a(\mathbf{x}_b) \right] \cdot \delta\mathbf{v}_a \end{aligned} \quad (10)$$

となり、式 (8) により、内力 \mathbf{T}_a は

$$\mathbf{T}_a = \sum_{b=1}^N V_a V_b (p_b + p_a) \nabla W_a(\mathbf{x}_b) \quad (11)$$

と求められる。また、せん断成分についても同様に導出することができ、 $\sigma = p\mathbf{I} + \sigma'$ を考えると、内力は

$$\mathbf{T}_a = \sum_{b=1}^N V_a V_b (\sigma_b + \sigma_a) \nabla W_a(\mathbf{x}_b), \quad \sigma = p\mathbf{I} + \sigma' \quad (12)$$

と表せる。

(3) 運動量保存と相互作用力

本節では、運動量保存と相互作用力について説明する。それぞれのパーティクルの運動はニュートンの第2法則に支配される。これを式で示すと、

$$m_a \mathbf{a}_a = \mathbf{F}_a - \mathbf{T}_a \quad (13)$$

となり、 \mathbf{F}_a は外力、 \mathbf{T}_a は内力である。

ここで、外力の無い状態を想定すると、連続体として全体の運動量と角運動量は保存される。そのとき、系全体のパーティクルの運動量は次のように表される。

$$\mathbf{G} = \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{v}_a \quad (14)$$

外力が働く系全体の運動量の時間微分を考えると、

$$\dot{\mathbf{G}} = \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{a}_a = - \sum_{a=1}^N \mathbf{T}_a \quad (15)$$

となり、運動量が保存されるためにはその微分量が0である必要がある。

$$\sum_{a=1}^N \mathbf{T}_a = \mathbf{0} \quad (16)$$

つまり、どのような応力状態においても内力のつりあいが成り立つ必要がある。

ここで、相互作用力について考える。一般的にパーティクル a の内力はペアのパーティクルたち間の相互作用力の和で表される。

$$\mathbf{T}_a = \sum_{b=1}^N \mathbf{T}_{ab} \quad (17)$$

式 (12) を振り返ると、相互作用力 \mathbf{T}_{ab} は

$$\mathbf{T}_{ab} = V_a V_b (\sigma_a + \sigma_b) \nabla W_b(\mathbf{x}_a) \quad (18)$$

と置くことができ、 $\nabla W_a(\mathbf{x}_b) = -\nabla W_b(\mathbf{x}_a)$ と $\mathbf{T}_{ab} = -\mathbf{T}_{ba}$ であることを考えると、相互作用力はペアたちの総和で0となる。ここで、内力は全体ポテンシャルエネルギーから導出されるため、剛体並進運動によりポテンシャルエネルギーは変化しないことを見せると、運動量保存が保証できる。任意の一様な速度場 \mathbf{v}_0 において、ポテンシャルエネルギーの変化量が0であることを式で書くと、

$$D\Pi[\delta\mathbf{v}_0] = \sum_{a=1}^N \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{v}_0 = 0 \quad (19)$$

となり、 \mathbf{v}_0 が任意であることを考えると、式 (16)、内力のつりあいも成り立つことがわかる。

(4) 角運動量保存

角運動量保存について説明する。上記の運動量保存と同様に、系の原点基準の全体のパーティクル角運動量は

$$\mathbf{H} = \sum_{a=1}^N \mathbf{x}_a \times m_a \mathbf{v}_a \quad (20)$$

と書ける。上記と同様に全体の角運動量の微分が0になると、角運動量も保存される。

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_{a=1}^N \mathbf{x}_a \times m_a \mathbf{a}_a = - \sum_{a=1}^N \mathbf{x}_a \times \mathbf{T}_a \quad (21)$$

つまり、角運動量の保存のためには

$$\sum_{a=1}^N \mathbf{x}_a \times \mathbf{T}_a = \mathbf{0} \quad (22)$$

のような条件が必要となる。上記の条件は、剛体の回転運動によりポテンシャルエネルギーが変化しないことすると、証明できる。原点基準の剛体回転は速度と角速度を $\delta\mathbf{v}_a$ 、 $\delta\omega$ の関係を用いて次のように記述できる。

$$\delta\mathbf{v}_a = \delta\omega \times \mathbf{x}_a \quad (23)$$

ここで、剛体回転運動において、ポテンシャルエネルギーの不变性により、

$$0 = D\Pi[\delta\omega \times \mathbf{x}_a] = \sum_{a=1}^N \mathbf{T}_a \cdot (\delta\omega \times \mathbf{x}_a) = \delta\omega \cdot \sum_{a=1}^N \mathbf{x}_a \times \mathbf{T}_a \quad (24)$$

となり、任意の角速度 $\delta\omega$ において、式 (22) は必ず成り立たないといけない。次は、カーネル関数の勾配のため、改めて剛体回転運動について考える。角速度ベクトル \mathbf{w} の成分を $(w_x, w_y, w_z)^T$ とすると、どのようなポイントでも速度ベクトルは

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{w} \times \mathbf{x} \quad (25)$$

と表すことができ、この速度場の勾配は

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{W}; \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

と表せる。

ここで、 \mathbf{W} の反対称性を考慮すると、空間離散化されてない状態での変形速度テンソル $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ とそのトレースである $\text{div} \mathbf{v}$ が0になることは自明である。しかし、SPH の空間離散化が行われると、速度の勾配は次のように評価される。

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v}_a &= \sum_{b=1}^n V_b (\mathbf{W} \mathbf{x}_b - \mathbf{W} \mathbf{x}_a) \otimes \nabla W_b(\mathbf{x}_a) \\ &= \mathbf{W} \sum_{b=1}^n (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a) \otimes \nabla \mathbf{x}_a \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、速度勾配が反対称テンソルであることを考慮すると、

$$\sum_{b=1}^N V_b (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a) \otimes \nabla W_b(\mathbf{x}_a) = \mathbf{I} \quad \text{for } a = 1, \dots, N \quad (28)$$

を満たさないといけない。そしてこの条件は、どのような線形速度分布においても正しくその勾配が評価できる条件でもある。

(5) CSPH のアルゴリズム

以上の理論を踏まえ、CSPH のアルゴリズムを示す。CSPH では、式 (28) を満たすようにカーネル関数の勾配に修正を加え、それらを合わせた手法を用いる。カーネル関数の勾配の修正とそれらの合成について述べる。まず、カーネル関数の勾配においては、修正行列 \mathbf{L} を導入する。

$$\tilde{\nabla} W_b(\mathbf{x}_a) = \mathbf{L}_a \nabla W_b(\mathbf{x}_a) \quad (29)$$

修正行列 \mathbf{L} は式 (28) を満たすよう、次のように求められる。

$$\begin{aligned} & \sum_{b=1}^N V_b(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a) \otimes \tilde{W}_b(\mathbf{x}_a) \\ &= \left(\sum_{b=1}^N V_b(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a) \otimes \nabla W_b(\mathbf{x}_a) \right) \mathbf{L}_a^T \\ &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (30)$$

以上の定義より修正行列 \mathbf{L} を陽的に求めることができる。

$$\mathbf{L}_a = \left(\sum_{b=1}^N V_b \nabla W_b(\mathbf{x}_a) \otimes (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_a) \right)^{-1} \quad (31)$$

(6) 変形勾配の算出

本節では、材料モデルに用いる CSPH における変形勾配の求め方について説明する。こちらの手法は、Vidal らにより提案されたものである。 \mathbf{x} は現配置の位置ベクトル、 \mathbf{X} は初期配置の位置ベクトルであり、 φ は \mathbf{X} と \mathbf{x} の線形写像関係を表す。

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \quad (32)$$

また、 \mathbf{F} は変形勾配テンソルである。

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_0 \varphi \quad (33)$$

ここで、SPH の勾配の近似で用いられる初期配置基準で補正されたカーネル関数の勾配を用いると、

$$\mathbf{G}_b(\mathbf{X}_a) = V_b \tilde{\nabla}_0 W_b(\mathbf{X}_a) \quad (34)$$

と書くことができ、

$$\mathbf{F}_a = \sum_{b=1}^N \mathbf{x}_b \mathbf{G}_b^T(\mathbf{X}_a) \quad (35)$$

のように変形勾配が求まると言われている。

3. 隠的応力評価ルーチン

陰的応力評価ルーチンにおいては、瀧澤ら [6] により開発された UMMDp(Unified Material Model Driver for Plasticity) の CSPH 用プラグインを開発し実装した。しかし、UMMDp は増分形式の応力評価ルーチンであるため、これを改造することで変形勾配を入力とする超弾性ベースの弾塑性モデルを計算するようにした。CSPH+UMMDp を組み合わせたコードの弾塑性解析における verification は先行研究 [7][8] より行われている。Verification の一例として、等方線形弾性、von-Mises 降伏基準、Swift 硬化則を組み合わせた材料モデルの理論解、In-house FEM code、CSPH+UMMDp の SS カーブの比較を Fig1 に示す。また、用いた材料パラメータを Table1 に示す。

$$\sigma = C(\varepsilon_p + \varepsilon_0)^n$$

Table1 Material parameters used for verification

$E[GPa]$	ν	$\sigma_y[MPa]$	$C[MPa]$	ε_0	n
202.0	0.3	264.4	868.8	0.0013	0.179

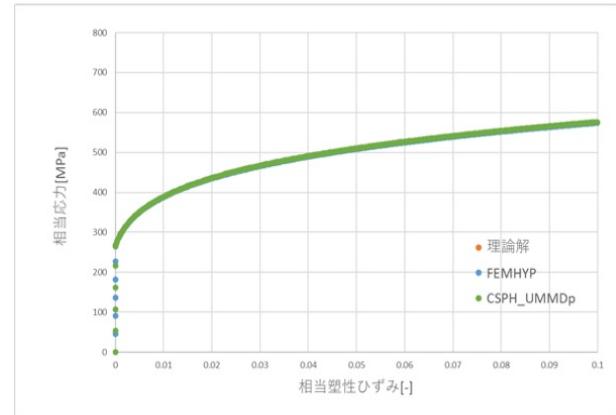


Fig.1 Comparison of SS curve between theoretical solution, In-house FEM code and CSPH+UMMDp

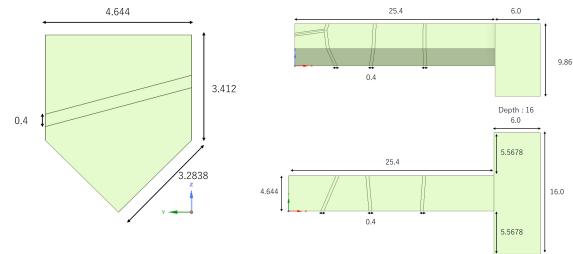


Fig.2 Model of micro-cantilever including 5 grains and 4 grain boundaries

4. マイクロカンチレバーの解析設定

本章では、マイクロカンチレバーの幾何形状と境界条件、さらに用いた材料モデルおよび破壊判定基準について述べる。

(1) 幾何形状および境界条件

マイクロカンチレバーの設計には、Voronoi 分割を用いてランダムな多結晶構造を生成する Neper を使用した。Neper により 5 つの異なる結晶粒からなる構造を作成し、CAD ソフトウェアを用いて粒界を設計することで、粒ごとに異なる材料特性や破壊基準を適用できるようしている。マイクロカンチレバーの寸法および形状は Fig2~4 に示す通りであり、4 つの粒界が含まれている。固定部と連結されている粒は材料物性を一致させることで 1 つの粒として扱っている。境界条件としては、固定板の 2 つの面を完全固定（速度 0 固定）とし、カンチレバー上面前方に速度を加える。

(2) 材料モデル

本研究において、表したい現象は粒界・粒内での破壊現象であるため、粒それぞれの異方性は考慮しない。

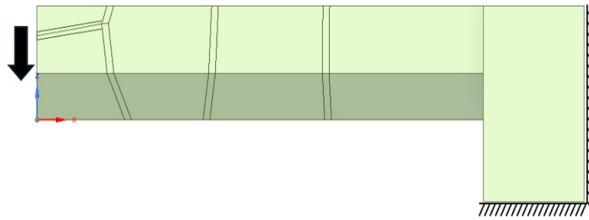


Fig.3 Applied boundary conditions for the simulation of micro-cantilever test

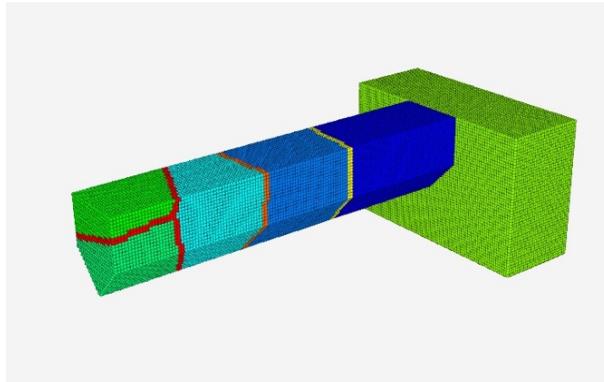


Fig.4 Discretized model of micro-cantilever

Table2 Material parameters of grains

$E[GPa]$	ν	$C[MPa]$	ε_0	n	$\rho[kg/m^3]$
222.0	0.3	868.8	0.0013	0.179	7974.0
212.0	0.3	868.8	0.0013	0.179	7974.0
202.0	0.3	868.8	0.0013	0.179	7974.0
192.0	0.3	868.8	0.0013	0.179	7974.0
182.0	0.3	868.8	0.0013	0.179	7974.0

Table3 Material parameters of grain boundaries

$E[GPa]$	ν	$C[MPa]$	ε_0	n	$\rho[kg/m^3]$
202.0	0.3	868.8	0.0013	0.179	7974.0

材料モデルとしては、線形弾性、von-Mises 降伏基準、Swift 硬化則を用いている。粒と粒界の材料パラメータは Table2,3 に示す通りである。

(3) 破壊判定基準

脆性破壊を表現するために、破壊の判定基準を導入する。脆性破壊に関する多くの研究 [9],[10] では、塑性ひずみや主応力に基づいた複雑なモデルが提案・使用されているが、本研究では簡単な塑性ひずみ基準を採用している。

ここでは、相当塑性ひずみ ε_p が限界相当塑性ひずみ ε_L に達したときに破壊が生じると仮定し、次のように定義される損傷係数 D を用いる。

$$D = \varepsilon_p / \varepsilon_L \quad (36)$$

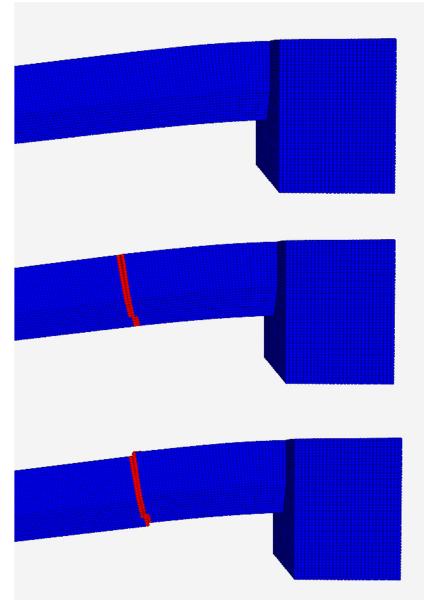


Fig.5 Intergranular fracture propagation of microcantilever

if $D \geq 1$, consider as fracture and consider stress as 0

5. 解析結果

本節では、上記の条件で行った数値解析の結果を示す。また、粒界・粒内での破壊を再現するため、それぞれ違う限界相当塑性ひずみを設定した。Fig5 は粒界の破壊を示しており、粒界の限界相当塑性ひずみを 0.002、粒内は 1.0 である。また、Fig6 は粒内の破壊を示しており、粒内の限界相当塑性ひずみを 0.002、粒界は 1.0 である。図中の赤色のパーティクルは破壊したパーティクルを示している。

6. 結言

本研究では、実際のマイクロカンチレバー試験で観測できた粒界・粒内破壊が同時に考慮できるロバストなシミュレーションを提案・実現した。詳しくは、CSPH に陰的応力積分を組み合わせ、計算安定性を向上し、簡単な脆性破壊モデルを導入することで、粒界・粒内破壊を同時に考慮できるようにした。今後、結晶の異方性を考慮した材料モデルを導入することで、より実際のマイクロカンチレバー試験に近いシミュレーションが実現できると考えられる。

参考文献

- [1] J.Tatami, M. Katayama, M. Ohnishi, T. Yahagi, T. Takahashi, T. Horiuchi, M. Yokouchi, K. Yasuda, D.K. Kim, T. Wakihira and K. Komeya: Local fracture toughness of Si3N4 ceramics measured using single-edge notched microcantilever beam specimens, *Journal of the American Ceramic Society*, Vol.98, pp. 965-971, 2015.

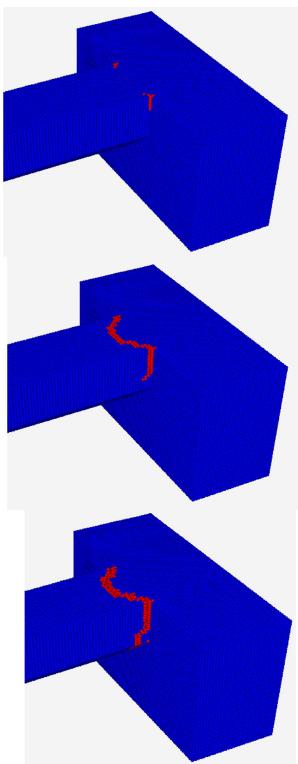


Fig.6 Intragranular fracture propagation of microcantilever

ities, 計算工学講演会論文集, Vol.29, 2024.

- [10] E. Hoek and Z. T. Bieniawski: Brittle Fracture of Rock, *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, Vol.69, No.2, pp.37–50, 1968.
- [11] K. Inuzuka, M. Muramoto, K. Matsui, T. Yamada and J. Tatami: Numerical simulation of microcantilever testing for ceramic materials, 計算工学講演会論文集, Vol.28, 2023.
- [12] E. A. de Souza Neto, D. Peric and D. R. J. Owen: *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*, Wiley, 1st Edition, 2008.
- [13] C. H. Lee, A. J. Gil, A. Ghavamian and J. Bonet: A Total Lagrangian upwind Smooth Particle Hydrodynamics algorithm for large strain explicit solid dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.344, pp.209–250, 2019.

- [2] J.J. Monaghan: Smoothed particle hydrodynamics, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Vol.30, pp.543-574, 1992.
- [3] J. Bonet and R. D. Wood: *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*, Cambridge University Press, 2008.
- [4] Y. Vidal, J. Bonet and A. Huerta: Stabilized updated Lagrangian corrected SPH for explicit dynamic problems, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol.69.13, pp.2687-2710, 2007.
- [5] J. Bonet and T.S. Lok: Variational and momentum preservation aspects of smoothed particle hydrodynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.180, pp.97-115, 1999.
- [6] H. Takizawa, T. Kuwabara, K. Oide and J. Yoshida: Development of the subroutine library UMMDp for anisotropic yield functions commonly applicable to commercial FEM codes, *Journal of Physics: Conference Series*, 2016.
- [7] X. Lyu, D. Igi, S. Jeon, K. Matsui and T. Yamada: Verification and Validation of finite strain elasto-plastic analysis by SPH method, 計算工学講演会論文集, Vol.29, 2024.
- [8] S. Jeon, X. Lyu, K. Matsui and T. Yamada: Comparison Between Implicit FEM and CSPH on Elasto-plastic Problems, 計算工学講演会論文集, Vol.29, 2024.
- [9] D.S. Morikawa and K. Asai: Smoothed Particle hydrodynamics simulation of landslides with discontinu-