

変分マルチスケール法による安定化を導入した速度-圧力一体型SPH流体解析

Velocity-Pressure Monolithic SPH Fluid Analysis
Introducing Stabilization by Variational Multiscale Method

岡野翔大¹⁾, 森川ダニエル²⁾, 葛宇甯³⁾, 浅井光輝⁴⁾
Shodai Okano, Daniel Morikawa, Louis Ge and Mitsuteru Asai

- 1) 九州大学 大学院工学府土木工学専攻 (〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡744, E-mail: s-okano@doc.kyushu-u.ac.jp)
- 2) 同濟大学 土木工程学院 助教 (〒200092 中華人民共和国上海市四平路1239号, E-mail: morikawad@jamstec.go.jp)
- 3) 国立台湾大学 土木工程学系 教授 (〒10617 中華民国台北市羅斯福路4段1号, E-mail: louisge@ntu.edu.tw)
- 4) 九州大学 大学院工学研究院アジア防災研究センター 教授
(〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡744, E-mail: asai@doc.kyushu-u.ac.jp)

The SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) method demonstrates high applicability for free surface flows and large deformation problems. However, ISPH (Incompressible SPH) faces a critical limitation. When multiple wall boundaries exist near the fluid, the method produces non-physical results due to multiple different Neumann boundary conditions. To address this drawback, we propose a novel SPH method for fluid dynamics based on velocity-pressure monolithic scheme with stabilization techniques. This eliminates the need to impose Neumann conditions for wall boundary. The effectiveness of the proposed method was verified through numerical examples, including a hydrostatic problem with constricted sections.

Key Words : SPH, Monolithic approach, Variational Multiscale Method, Boundary condition

1. はじめに

Lagrange記述によるメッシュフリーの粒子法は、領域の変形を粒子によって表現でき、個々の構成要素の移動を追跡することに優れていることから、流体・構造連成解析など複雑な現象において多くの応用研究が進められてきた。代表的な手法として、SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法や非圧縮性流体向けの応用であるISPH (Incompressible SPH) 法などが挙げられる。

しかしながら、射影法に基づく速度-圧力分離型解法の一つであるISPH法には重要な課題が存在する。具体的には、流体粒子の影響範囲内に異なる複数の壁境界が存在する場合(図-1)に複数の異なるNeumann境界条件を同時に満たす必要が生じ、非物理的な結果が計算される。例えば、土中の間隙水のミクロな流れや間隙水圧、土粒子との相互作用を精緻に計算する上でこの課題は大きな技術的制約となる。

このようなISPH法の課題に対する根本的な解決策として、本研究では速度-圧力一体型解法を提案する。一体型解法の特徴は、壁境界にNeumann境界条件を用いる必要がなく、Dirichlet境界条件のみで境界条件を付与できる点にある。これにより、従来のISPH法では実装が困難な壁境界を持つ問題への適用が可能となる。しかし、著者らが知る限りでは一体型解法によるSPH流体解析の実装例は報告されていない。そこで本研究では、一体型解法によるSPH流体解析手法とその数値安定化のための手法を提案する。

2. 数値計算手法

非圧縮性流体の支配方程式は、式(1)のNavier-Stokes方程式と式(2)の連続の式で表される。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (1)$$

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $D/Dt, \mathbf{v}, \rho, p, \nu, \mathbf{g}$ はそれぞれ物質時間微分、速度、密度、圧力、動粘度、外力(ここでは重力)である。式(1)、(2)を陰的Euler法により時間離散近似し整理すると、以下のブロック行列が得られる。

$$\begin{bmatrix} (1 - \Delta t \nu \nabla^2) \mathbf{I} & \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \\ \rho \nabla^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^n + \Delta t \mathbf{g} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

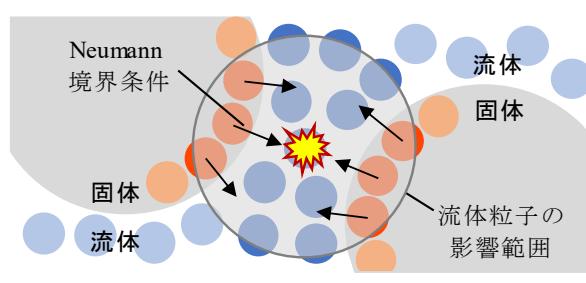


図-1 従来手法で正確な計算ができないケース

ここで、 Δt は時間増分、上付き文字は時間ステップを表す。

このとき、式(3)の行列は対角成分にゼロを含んでおり、それに起因しLBB (Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi) 安定性条件を満たしておらず、線形ソルバーの収束性が著しく低下する。そこで本研究では、流れのFEM解析で実績のある変分マルチスケール法[1] (VMS: Variational Multiscale) による安定化を導入した。代数的サブグリッドスケール [2,3]に基づくVMSにより速度場を分解すると、

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \\ = \bar{\mathbf{v}} + \tau \left(-\rho \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt} - \nabla p + \rho\nu\nabla^2\bar{\mathbf{v}} + \rho\mathbf{g} \right) \quad (4)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}'$ はそれぞれ速度の解像可能成分、サブスケール成分であり、 τ は次式で定義される安定化パラメータである。

$$\tau = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\tau_{\text{dyn}}}{\Delta t} + \frac{c_2 \|\bar{\mathbf{v}}\|}{h_\#} + \frac{c_1 \nu}{h_\#^2} \right)^{-1} \quad (5)$$

本研究では、先行研究[3]を参考に $\tau_{\text{dyn}} = 1.0$, $c_1 = 4.0$, $c_2 = 2.0$ に設定した。 $h_\#$ はバックグラウンドセルと等しい面積の円の直径、あるいは等しい体積の球の直径を表す[4]。

Quasi-static subscales formulation [5]に基づき式(3)に式(4)を代入し、計算コスト削減のため3次以上の高次微分項を省略すると以下に示す行列が得られる。

$$\begin{bmatrix} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\tau\rho}{\Delta t} \right) \Delta t \nu \nabla^2 \right\} \mathbf{I} & \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \\ \left(1 - \frac{\tau\rho}{\Delta t} \right) \rho \nabla^\top & -\tau \rho \nabla^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{v}}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{v}}^n + \tau \rho \nu \nabla^2 \bar{\mathbf{v}}^n + \Delta t \mathbf{g} \\ -\frac{\tau \rho^2}{\Delta t} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}^n \end{Bmatrix} \quad (6)$$

以上の操作によりLBB安定性条件が満たされたので、解像可能スケールにおいて式(1), 式(2)を同時に満たすような速度場と圧力場の求解が可能となる。

最後に、式(6)にSPH空間離散近似を適用しBi-CGSTAB法等の反復解法を用いて方程式を解き、式(7)により粒子位置 \mathbf{x} を更新する。

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{v}^{n+1} \quad (7)$$

なお、壁境界についてはDirichlet境界条件に基づき物理量を直接代入すればよいため[6]、提案手法では従来手法 (ISPH法) で必須であった圧力Neumann条件を必要としない。そのため、任意形状の壁境界への適用が可能となる。

3. 数値計算例

(1) 狹窄部を有するモデル

提案手法の優位性を検討するため、狭窄部を有する解析モデルで数値計算を実施した。SPH粒子径、時間増分、密度、動粘度はそれぞれ 0.01 m , 10^{-4} s , 1000 kg/m^3 , $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ に設定した。図-2には計算開始から100ステップ経過

時点での圧力分布を、図-3に理論値との比較結果を示す。得られた計算値は理論値と良く一致しており、相対二乗誤差 (RSE) は0.47%であった。これらの結果から、本手法により圧力を良好な精度で計算できることを確認した。

また、図-2の上部領域を自由落下させることにより、動的な場合についても検討した。図-4, 図-5はそれぞれ従来手法 (速度-圧力分離型解法) と提案手法 (速度-圧力一体型解法) の圧力分布を示している。その結果、従来手法では狭窄部で圧力値の激しい時間変化がみられたのに対し、提案手法では安定して計算できることを確認した。

以上より、提案手法では新しい境界処理手法により図-2に示すような狭窄部を含む形状での流体解析を精度よく計算できることを確認した。また、従来手法では、各壁粒子への法線ベクトルの設定が必要であり、曲面や角を持つ複雑な壁形状のモデル化は容易ではなかった。特に、急激な形状変化を伴う領域では法線ベクトルの定義が曖昧となり、計算の不安定性を引き起こす原因となっていた。一方、提案手法では壁表面の1層のみのモデル化で十分であり、計算手法の高度化のみならず実装の簡素化までも実現した。

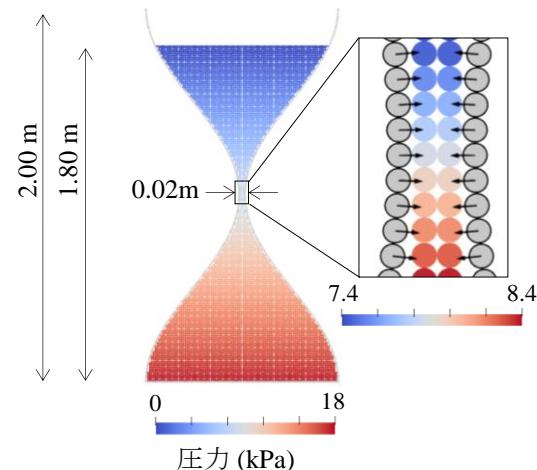


図-2 狹窄部を有する問題での圧力分布

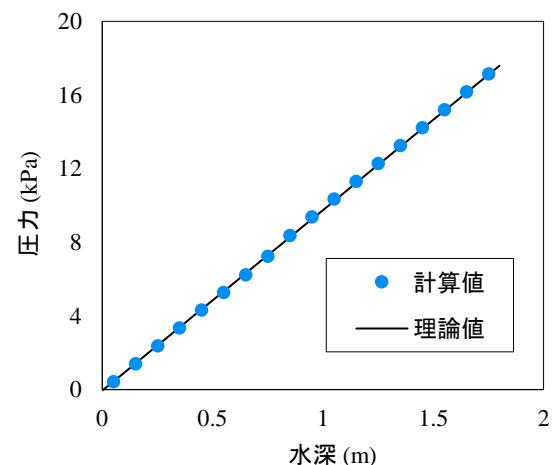


図-3 圧力の計算値と理論値の比較

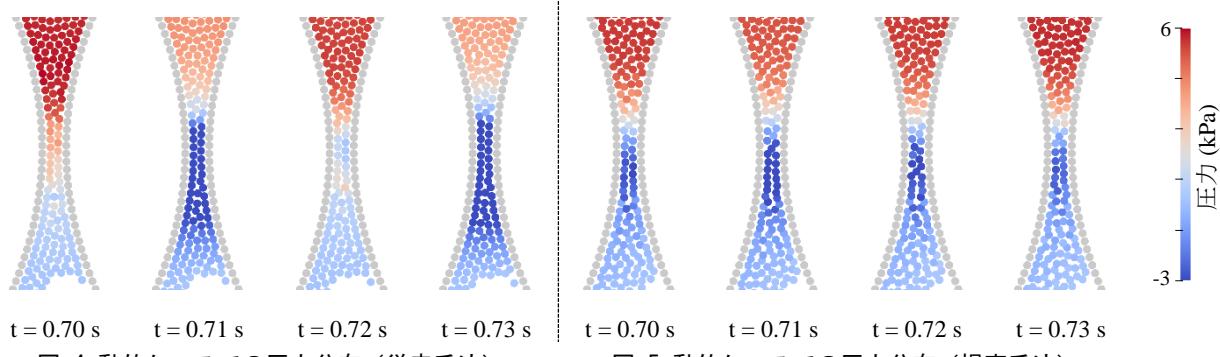


図-4 動的ケースでの圧力分布（従来手法）

図-5 動的ケースでの圧力分布（提案手法）

(2) エネルギー保存性の検証

次に、提案手法の物理的妥当性を検討するため、粒子法のコミュニティでエネルギー保存性のベンチマークとして広く用いられているOscillating droplet [7]と呼ばれる数値計算を実施した。

この問題では、半径1.0 mの円形の水滴に、次に示すボテンシャル場と初期速度場（図-6）を与える。

$$P = \frac{1}{2}W^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_x &= \sigma_0 \mathbf{r}_x \\ \mathbf{v}_y &= -\sigma_0 \mathbf{r}_y \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 \mathbf{r} は円の中心からの位置ベクトル、 W ($= 1\text{ kg}^{1/2}\text{ m}^{-3/2}\text{s}^{-1}$)、 σ_0 ($= 1\text{ s}^{-1}$) は定数である。SPH粒子径、時間増分、密度、動粘度はそれぞれ 0.0125 m 、 10^{-4} s 、 1 kg/m^3 、 $0\text{ m}^2/\text{s}$ に設定した。

力学的エネルギー E_T の理論値は運動エネルギー E_K とポテンシャルエネルギー E_P の和として以下のように与えられる。

$$E_T = E_K + E_P \quad (10)$$

$$E_K = \sum_p^N \frac{1}{2} m_p \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p \quad (11)$$

$$E_P = \sum_p^N \frac{1}{2} W^2 V_p \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_p \quad (12)$$

ここで、 N 、 m 、 V は総粒子数、各粒子の質量、各粒子の体積である。ここでは、非減衰系（粘性ゼロ）を考えているので、理論的には力学的エネルギーは常に保存される。ただし、Hairerら[8]によれば時間積分法として陽的Euler法を用いた場合は系のエネルギーが増大する傾向に、陰的Euler法を用いた場合は系のエネルギーが減少する傾向にあることが知られている。

図-7に提案手法と従来手法における力学的エネルギー誤差の時刻歴を示す。計算開始から40秒経過時点では、従来手法の誤差が -7.8% であったのに対し、提案手法の誤差は -4.9% であった。また、図-7から明らかなように、提案手法の方が単位時間当たりの誤差増加量が小さいことも確認できる。この結果から、提案手法が従来手法と比較し

て誤差を低減できることを確認した。

この誤差低減の要因として、従来手法では速度-圧力分離型解法で計算された速度が連続の式を数値的に厳密に満たす保証がないのに対し、提案手法では係数行列に連続の式を組み込んでおりより厳密に連続の式を満たすアルゴリズムを採用しているためと考えられる。特筆すべきは、本検証が狭窄部を有するモデルなどの特殊な条件下ではなく、壁境界のない基本的な流体解析の条件下で実施されたにもかかわらず、提案手法の優位性が明確に示された点である。

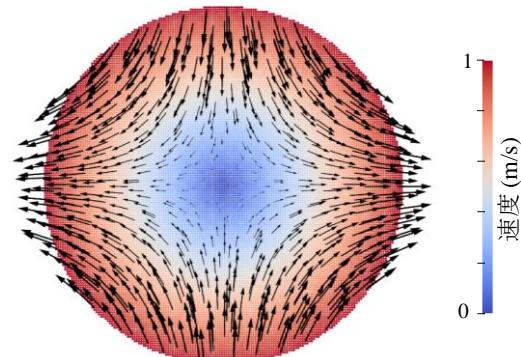


図-6 Oscillating dropletの初期速度場

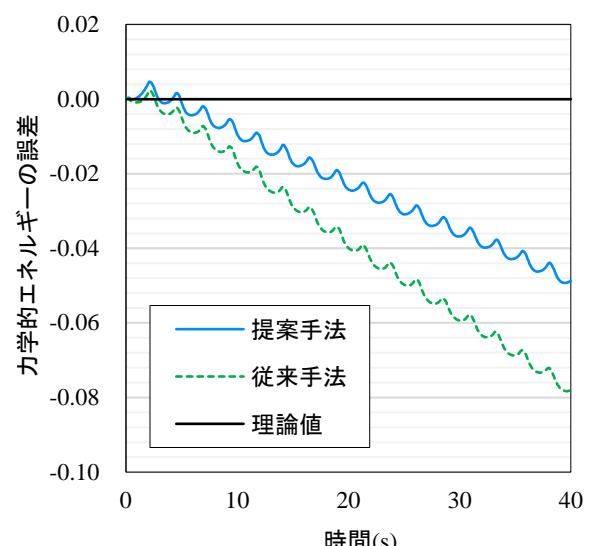


図-7 力学的エネルギー誤差の時刻歴

(3) 動的自由表面流れ問題

最後に、動的自由表面流れに対する提案手法の有用性の検討を行った。対象問題としてLobovskýら[9]によるダムブレイクの実験(図-8)を選択し、SPH粒子径、時間増分、密度、動粘度はそれぞれ 0.0025 m , 10^{-4} s , 1000 kg/m^3 , $10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ に設定した。

図-9、図-10に実験と数値計算での水面形状を示す。また、図-11は水槽右端の4点における圧力の時刻歴である。これらの結果から、動的自由表面流れ問題に対しても、提案手法が実際の現象とおおむね整合した結果を得られる

ことを確認した。

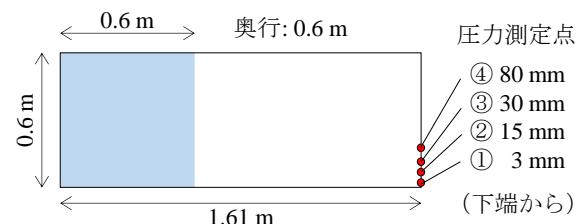


図-8 実験の概要

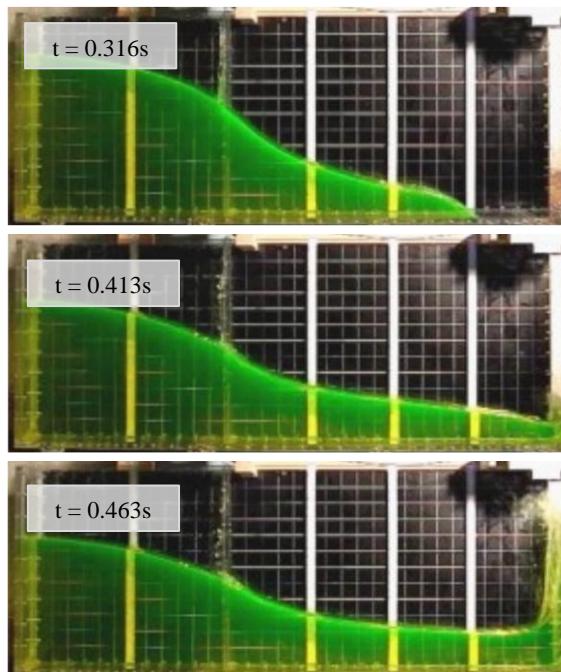


図-9 実験での水面形状

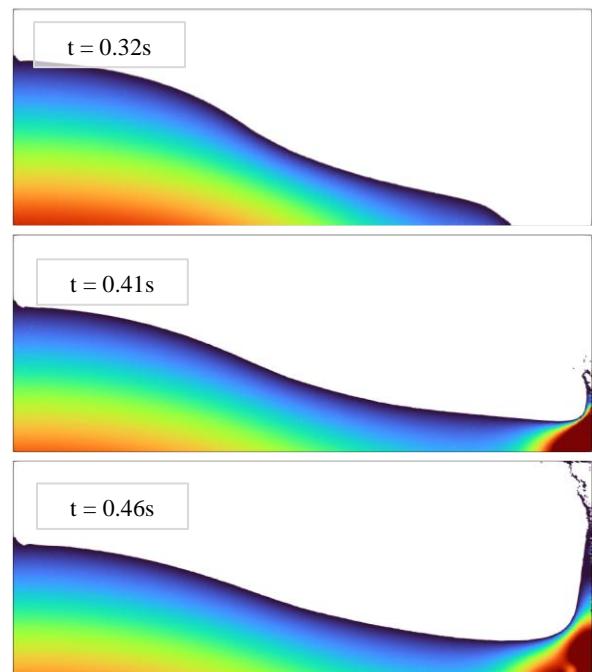
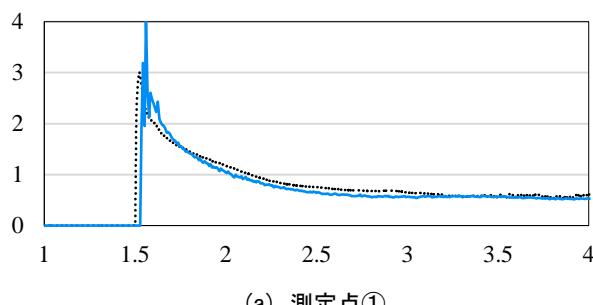
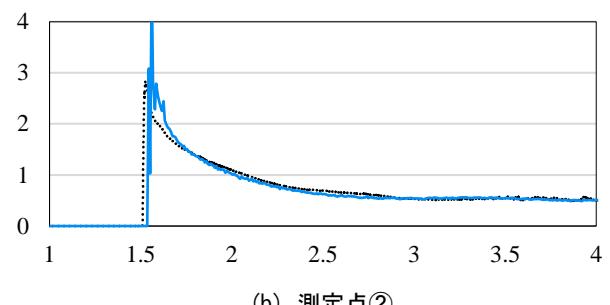


図-10 数値計算での水面形状

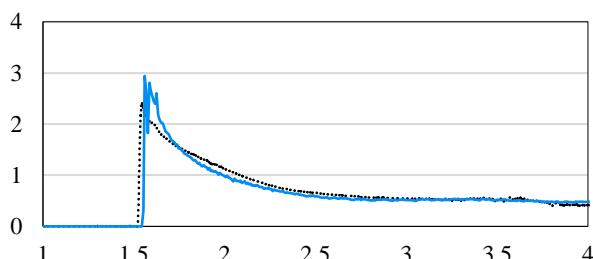
—— 計算値 ····· 実験値



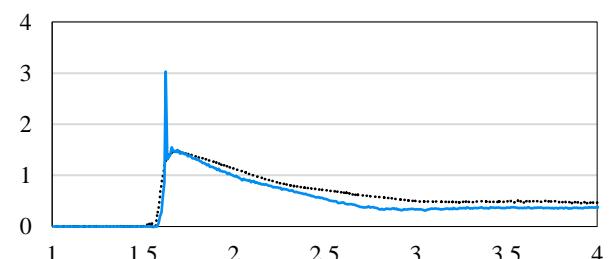
(a) 測定点①



(b) 測定点②



(c) 測定点③



(d) 測定点④

図-11 圧力の時刻歴 (横軸: 無次元化した時間, 縦軸: 無次元化した圧力)

4. おわりに

本研究では、任意形状の壁境界に適用可能な流体解析手法の開発を目的とし、Neumann境界条件が不要な速度・圧力一体型解法によるSPH流体解析手法を提案した。また、変分マルチスケール法（VMS）を導入し、安定した求解を可能とする定式化を構築した。

基礎的検討として実施した狭窄部を有するモデルでは、静的問題・動的問題のいずれにおいても提案手法が従来手法にない境界処理性能と壁境界のモデル化の容易さを併せ持つことが示された。さらに、実際のダムブレイク現象の再現に適用可能であることも確認した。

また、Oscillating droplet の数値計算では提案手法が従来手法と比較してエネルギーの誤差を低減できることを確認し、壁境界のない基本的な流体解析の問題においても計算手法としての優位性が示された。

今後の展望として、本手法の3次元問題への拡張を進める。これに伴う計算コストや使用メモリ量の増大に対しては、GPU並列計算やマルチグリッド前処理ソルバーの導入を予定している。そして、最終的には土中の間隙水流れ解析など、実務的な工学問題への応用を目指す。

謝辞: 本研究はJSPS 科研費JP-23KK0182・23H01662・24K00971、学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点jh240032・jh230021、セコム科学技術振興財団の支援を受けた。

参考文献

- [1] T. J. Hughes et al.: The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.116, No.1-2, pp.3-24, 1998.
- [2] R. Codina: A stabilized finite element method for generalized stationary incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.190, No.20-21, pp.2681-2706, 2001.
- [3] B. Chandra et al.: Stabilized mixed material point method for incompressible fluid flow analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.419, pp.116644, 2024.
- [4] T. E. Tezduyar et al.: Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.95, No.2, pp.221-242, 1992.
- [5] R. Zorrilla et al.: A modified finite element formulation for the imposition of the slip boundary condition over embedded volumeless geometries, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol.353, pp.123-157, 2019.
- [6] P. M. Gresho and R. L. Sani: *Incompressible Flow and Finite Element*, John Wiley & Sons Ltd., 1998.
- [7] J. J. Monaghan and A. Rafiee: A simple SPH algorithm for multi-fluid flow with high density ratios, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.71, No.5, pp.537-561, 2013.
- [8] E. Hairer et al.: *Geometric Numerical Integration*, Springer Series in Computational Mathematics, 2006
- [9] L. Lobovský et al.: Experimental investigation of dynamic pressure loads during dam break, *Journal of Fluids and Structures*, Vol.48, pp.407-434, 2014.