

# Variational multiscale (VMS) 法による 安定化混合定式化の陰的 MPM への適用

Application of u-p mixed formulation  
stabilized by variational multiscale (VMS) method in implicit MPM

菅井理一<sup>1)</sup>, 野村怜佳<sup>2)</sup>, 森口周二<sup>2)</sup>, 寺田賢二郎<sup>1)</sup>  
Riichi Sugai, Reika Nomura, Shuji Moriguchi and Kenjiro Terada

<sup>1)</sup>東北大学大学院工学研究科 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, E-mail: sugai.riichi.p5@dc.tohoku.ac.jp)

<sup>2)</sup>東北大学災害科学国際研究所 (〒 980-8572 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1)

The material point method (MPM) is well-suited for large deformation analyses of solids but faces challenges in suppressing pressure oscillations in nearly incompressible and plastically incompressible materials. In this study, we develop *u-p* mixed formulation in elastoplastic problems at finite strain and incorporate it into implicit MPM, treating displacement and pressure as primal variables. Also, the variational multiscale (VMS) method is applied as a stabilization technique for the mixed formulation. This approach enables stable computations with equal-order interpolation using higher-order basis functions for both displacement and pressure fields. Through two benchmarks, we demonstrate the effectiveness of the proposed method in mitigating pressure oscillations.

**Key Words** : *Implicit MPM, Mixed formulation, Variational multiscale (VMS) method, Equal-order interpolation, Elastoplasticity at finite strain*

## 1. 序論

Material point method (MPM) [1] は連続体を物理量を持つ粒子の集合として分割し、物体の変形を空間に固定された背面格子により求める手法である。このとき、背面格子の変形は荷重ステップ毎にリセットするため格子の破綻を回避できる。そのため、土砂流動や金属切削などで見られる固体の大変形問題への高い適用性が注目されている。その一方で、これらの材料は微圧縮性や塑性非圧縮性を示すため、圧力振動の発生が問題となる。

微圧縮性および塑性非圧縮性に起因する数値不安定性に対する手法として、変位のみを独立変数とする定式化においては選択低減積分法が挙げられ、これまでに F-bar 法 [2] や F-bar projection 法 [3] が MPM に適用されてきた。これらの手法は微圧縮性に起因する体積ロッキングの回避に有効であり圧力振動も大幅に抑制するが、圧力振動の完全な抑制には課題が残っている。

上述した選択低減積分法のほかに、変位と圧力を独立変数とする *u-p* 混合定式化が微圧縮性による数値不安定性の解消に有効であることが知られている。ここでは、圧力を独立変数としたことで連続分布として評価できることから、圧力振動の抑制が期待される。混合定式化により安定した解析を行うためには LBB 条件を満足する必要があるが、これに対して変位と圧力を異なる次数の基底関数により補間する混合補間や、支配方程式に安定化項を追加する polynomial pressure projection (PPP) [4] や variational multiscale (VMS) 法 [5] が提案されてきた。混合定式化を MPM に適用する場合、数値誤差を抑制するために高次の基底関数を使用することが望ましい。その上で計算コストを抑えるためには、同

次補間による安定化手法を採用することが合理的である。混合定式化を MPM に適用した既往研究において、安定化手法として PPP を採用し弾塑性問題の解析を実施した例 [4] は報告されているが、VMS 法を用いた混合定式化の有限変形弾塑性問題への適用例は報告されていない。

本研究では、圧力振動を抑制することを目的として、variational multiscale (VMS) 法により安定化した *u-p* 混合定式化を有限変形弾塑性問題へと拡張し、extended B-spline (EBS) 基底関数に基づく陰的 MPM [6] に適用する。以下では提案手法の定式化の概略を説明し、圧縮性と微圧縮性超弾性体および塑性非圧縮性を示す弾塑性体に対する数値解析を通して、本手法の圧力振動の抑制性能を例証する。

## 2. *u-p* 混合定式化

### (1) 構成則

連続体の基準配置および現在配置をそれぞれ  $\mathcal{B}_0$ ,  $\mathcal{B}_t$  とする。また、それぞれの境界を  $\partial\mathcal{B}_0$ ,  $\partial\mathcal{B}_t$  とする。このとき、初期配置の位置ベクトル  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0 \cup \partial\mathcal{B}_0$  と現在配置の位置ベクトル  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t \cup \partial\mathcal{B}_t$  を用いて変形勾配テンソルは  $\mathbf{F} = \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X}$  で定義される。

変形勾配テンソルの乗算分解を仮定し、弾性成分  $\mathbf{F}^e$  と塑性成分  $\mathbf{F}^p$  を用いて変形勾配テンソルを次式で表す。

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (1)$$

本研究では等方性超弾性構成則を採用し、次式に示すひずみエネルギー密度関数  $\mathcal{H}$  により弾性挙動を記述する。

$$\mathcal{H}(\mathbf{b}^e) = \mathcal{H}^{\text{vol}}(\mathcal{J}^e) + \mathcal{H}^{\text{dev}}(\bar{\mathbf{b}}^e), \text{ with } \mathcal{H}^{\text{vol}} = \kappa \mathcal{G}(\mathcal{J}^e) \quad (2)$$

ここで、 $\mathcal{H}^{\text{vol}}$  と  $\mathcal{H}^{\text{dev}}$  はそれぞれひずみエネルギー密度関数の体積成分と偏差成分である。また、 $\mathcal{J}^e = \det \mathbf{F}^e$  は弾性変形勾配テンソルの行列式であり、 $\bar{\mathbf{b}}^e = (\mathcal{J}^e)^{-2/3} \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT}$  は弾性左 Cauchy–Green テンソルの等容変形成分である。特に、ひずみエネルギー密度関数の体積成分は、定数の体積弾性率  $\kappa$  と弾性変形勾配テンソルの行列式  $\mathcal{J}^e$  の関数  $\mathcal{G}(\mathcal{J}^e)$  で与えられるとする。

塑性流れ則は弾性左 Cauchy–Green テンソルの Lie 微分により次式で定義される [7]。

$$\mathcal{L}_t \mathbf{b}^e = -\frac{2}{3} \dot{\gamma} \text{tr}[\mathbf{b}^e] \mathbf{n} \quad (3)$$

ここで、 $\dot{\gamma}$  は塑性乗数、 $\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}^{\text{dev}} / \|\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}\|$  は Kirchhoff 応力テンソルの偏差成分  $\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}$  により定義される流れベクトルである。降伏関数  $f$  は降伏応力  $k$  と累積塑性ひずみ  $\bar{\epsilon}^p$  を用いて次式で与えられる。

$$f = \|\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} k(\bar{\epsilon}^p) \quad (4)$$

累積塑性ひずみの発展則を規定する関連硬化則は  $\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{2/3} \dot{\gamma}$  で与えられる。

## (2) 強形式

変位  $\mathbf{u}$  と圧力  $p$  を独立変数として、通常の平衡方程式に加えて、圧縮性および微圧縮性材料の両方に適用可能な圧力場に対する拘束式を考慮した次式を強形式とする。

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} + p \mathbf{1}) + \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{on } \mathcal{B}_i \quad (5)$$

$$\frac{d\mathcal{G}(\mathcal{J}^e)}{d\mathcal{J}^e} - \frac{p}{\kappa} = 0 \quad \text{on } \mathcal{B}_i \quad (6)$$

$$\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{on } \partial \mathcal{B}_i^D \quad (7)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} + p \mathbf{1}) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \partial \mathcal{B}_i^N \quad (8)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}$ 、 $\mathbf{1}$ 、 $\mathbf{g}$ 、 $\bar{\mathbf{u}}$ 、 $\mathbf{n}$ 、 $\bar{\mathbf{t}}$ 、 $\partial \mathcal{B}_i^D$ 、 $\partial \mathcal{B}_i^N$  はそれぞれ Cauchy 応力テンソルの偏差成分、2 階の恒等テンソル、物体力ベクトル、強制変位ベクトル、外向き単位法線ベクトル、表面力ベクトル、現在配置における Dirichlet 境界、現在配置における Neumann 境界である。

## (3) 弱形式および線形化方程式

平衡方程式に関する弱形式  $\delta_u \mathcal{W}$  および圧力拘束式に関する弱形式  $\delta_p \mathcal{W}$  は、仮想変位  $\delta \mathbf{u}$  と仮想圧力  $\delta p$  を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta_u \mathcal{W} = & \int_{\mathcal{B}_i} \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} : (\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} + p \mathbf{1}) d\mathbf{v} \\ & - \left( \int_{\mathcal{B}_i} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} d\mathbf{v} + \int_{\partial \mathcal{B}_i^N} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\mathbf{a} \right) \\ & + \int_{\partial \mathcal{B}_i^D} \beta \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \frac{\sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} \mathbf{F}^T \mathbf{n}}}{\mathcal{J}} d\mathbf{a} \\ & - \left( \int_{\partial \mathcal{B}_i^D} \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} + p \mathbf{1}) \mathbf{n} d\mathbf{a} \right. \\ & \left. + \int_{\partial \mathcal{B}_i^D} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \left( \mathbf{a}^{\text{ep}} : \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{n} d\mathbf{a} \right) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta_p \mathcal{W} = & \int_{\mathcal{B}_i} \frac{\delta p}{\mathcal{J}} \left( \frac{d\mathcal{G}}{d\mathcal{J}^e} - \frac{p}{\kappa} \right) d\mathbf{v} \\ & - \int_{\partial \mathcal{B}_i^D} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot (\delta p \mathbf{n}) d\mathbf{a} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $\beta$ 、 $\mathcal{J} = \det \mathbf{F}$ 、 $\mathbf{a}^{\text{ep}}$  はそれぞれ penalty 係数、変形勾配テンソルの行列式、第一種弾塑性接線係数テンソルである。また、式 (9) の右辺第 3 項は penalty 項、式 (9) の右辺第 4 項および式 (10) の右辺第 2 項は Nitsche 項であり、これらは MPM において背面格子の境界と一致しない任意の Dirichlet 境界上に強制変位を課すために用いられる。

以上の弱形式を Newton–Raphson (NR) 法による反復解法を用いて解くために、次の線形化方程式が必要となる。

$$\begin{aligned} \delta_u \mathcal{W}' + D(\delta_u \mathcal{W})[\Delta \mathbf{u}] + D(\delta_u \mathcal{W})[\Delta p] \\ + \delta_p \mathcal{W}' + D(\delta_p \mathcal{W})[\Delta \mathbf{u}] + D(\delta_p \mathcal{W})[\Delta p] = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $\Delta \mathbf{u}$  と  $\Delta p$  はそれぞれ変位増分と圧力増分である。

## (4) Variational multiscale (VMS) 法

混合定式化において、変位場と圧力場は安定条件として LBB 条件を満足する必要がある。各場に異なる次数の基底関数を用いる混合補間が LBB 条件を満たす方法のひとつとして知られている。その一方で、後述する MPM では高次の EBS を基底関数として用いるため、計算コストと精度の両方の観点から同次補間できることが望ましい。そこで本研究では、安定化手法として VMS 法 [5] を採用し、任意の基底関数に対して同次補間を実現する。

VMS 法では、独立変数が背面格子のスケールで得られる解とそれよりも細かいスケールの解の和で与えられると考えるため、仮想変位、変位増分、仮想圧力、圧力増分は次のように分解される。

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^h + \delta \mathbf{u}', \quad \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^h + \Delta \mathbf{u}' \quad (12)$$

$$\delta p = \delta p^h + \delta p', \quad \Delta p = \Delta p^h + \Delta p' \quad (13)$$

ここで、上付き文字に“h”が付いている量が背面格子のスケールで得られる解、“'”付きの量がそれよりも細かいスケールの解である。これらを線形化方程式 (11) に代入して  $\delta \mathbf{u}'$  と  $\delta p'$  に関して整理し、圧力に関する項を残すように近似することで、 $\Delta \mathbf{u}'$  と  $\Delta p'$  は次式で表される。

$$\Delta \mathbf{u}' = \tau_1 \left( \mathbf{g} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} + \text{tr} \left[ \frac{\partial \Delta \mathbf{u}^h}{\partial \mathbf{x}} \right] \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \Delta \mathbf{u}^h}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \Delta p^h}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (14)$$

$$\Delta p' = \tau_2 \left\{ \frac{1}{\mathcal{J}} \left( \frac{d\mathcal{G}}{d\mathcal{J}^e} - \frac{p}{\kappa} \right) + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \mathcal{J} \partial \mathcal{J}^e} \text{tr} \left[ \frac{\partial \Delta \mathbf{u}^h}{\partial \mathbf{x}} \right] - \frac{\Delta p^h}{\kappa \mathcal{J}} \right\} \quad (15)$$

ここで、 $\tau_1$  および  $\tau_2$  は安定化係数であり、背面格子長  $h$ 、せん断剛性係数  $\mu$ 、パラメータ  $c_1$ 、 $c_2$  を用いてそれぞれ次式で定義される [5]。

$$\tau_1 = c_1 h^2 / \mu \quad (16)$$

$$\tau_2 = c_2 \mu \quad (17)$$

以上で求めた  $\Delta \mathbf{u}'$  と  $\Delta p'$  を用いて得られる安定化項を式 (11) に追加することで、線形化方程式を以下のように修正する。

$$\begin{aligned} & \delta_{\mathbf{u}} \mathcal{W} + \mathbf{D}(\delta_{\mathbf{u}} \mathcal{W}[\Delta \mathbf{u}^h]) + \mathbf{D}(\delta_{\mathbf{u}} \mathcal{W})[\Delta p^h] \\ & \delta_p \mathcal{W} + \mathbf{D}(\delta_p \mathcal{W})[\Delta \mathbf{u}^h] + \mathbf{D}(\delta_p \mathcal{W})[\Delta p^h] \\ & + \sum_e \int_{\mathcal{B}_e^c} \left\{ -\text{tr} \left[ \frac{\partial \delta \mathbf{u}^h}{\partial \mathbf{x}} \right] \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \delta \mathbf{u}^h}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \mathcal{J} \partial \mathcal{J}^e} \frac{\partial \delta p^h}{\partial \mathbf{x}} \right\} \cdot \Delta \mathbf{u}' \, d\mathbf{v} \\ & + \sum_e \int_{\mathcal{B}_e^c} \left( \text{tr} \left[ \frac{\partial \delta \mathbf{u}^h}{\partial \mathbf{x}} \right] - \frac{\delta p^h}{\kappa \mathcal{J}} \right) \Delta p' \, d\mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 $\mathcal{B}_e^c$  は背面格子  $e$  に含まれる物理領域である。

### 3. EBS 基底関数に基づく陰的 MPM

#### (1) MPM による離散化

MPM では物理領域を一定体積を持つ質量要素に分割し、体積  $v_p$  を割り当てる粒子を配置する。また、物理境界も同様に要素分割した上で表面積  $a_p$  を割り当てた粒子を配置する。物理領域における被積分関数の体積分分および面積積分は、領域内の粒子位置で粒子に割り当てられた体積及び表面積との線形和で近似される。

#### (2) B-spline 基底関数

MPM において通常の線形基底関数を用いると、粒子が背面格子をまたいだ際に応力振動が発生する。この応力振動は cell-crossing error と呼ばれ、基底関数の空間勾配が背面格子の境界で不連続になることに起因する。この問題に対して、本研究では基底関数の空間勾配が背面格子の境界で連続となる高次の B-spline を基底関数として採用する。

1 次元の B-spline 基底関数は、パラメータ空間の座標  $\xi$  と次数  $d$  を用いて次の漸化式で定義される。

$$N_I^d(\xi) \equiv \frac{\xi - \xi_I}{\xi_{I+d} - \xi_I} N_I^{d-1}(\xi) + \frac{\xi_{I+d+1} - \xi}{\xi_{I+d+1} - \xi_{I+1}} N_{I+1}^{d-1}(\xi) \quad (19)$$

ここで、 $\xi_I$  はノット値で添字  $I$  はノット指標と呼ばれ、 $n$  個の基底関数の定義域はノット値を並べたノットベクトル  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+d+1}\}$  により規定され、0 次 B-spline は対応するノット区間で 1、それ以外で 0 をとる。

また、 $n_{\text{dim}}$  次元問題における B-spline 基底関数は、上記の 1 次元問題における基底関数のテンソル積を用いて

$$B_I^d(\xi) = \prod_{\alpha=1}^{n_{\text{dim}}} N_{I^\alpha}^d(\xi^\alpha) \quad (20)$$

のように表される。ここで、 $\xi^\alpha$  は  $\alpha$  方向のパラメータ座標である。また、 $I^\alpha$  は  $\alpha$  方向のノット指標であり、 $\alpha$  方向の B-spline 基底関数の制御点番号を表し、添字  $I$  は制御点  $(I^1, \dots, I^{n_{\text{dim}}})$  を表す。

基底関数  $B_I^d$  を用いて粒子位置における変位  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_p)$  と圧力  $p(\mathbf{x}_p)$  を次式により近似する。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_p) \approx \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_p) = \sum_I \mathbf{u}^I B_I^d(\mathbf{x}_p) \quad (21)$$

$$p(\mathbf{x}_p) \approx p^h(\mathbf{x}_p) = \sum_I p^I B_I^d(\mathbf{x}_p) \quad (22)$$

ここで、 $\mathbf{u}^I$  と  $p^I$  は制御点  $I$  における変位と圧力の値である。

#### (3) Extended B-spline 基底関数

粒子が背面格子をまたいで移動するため、物理領域が背面格子を部分的に占める場合がある。このとき、補間近似に用いる基底関数のうちサポート領域を占める物体領域が少ない基底関数に対応する制御点が、剛性行列の悪条件下の原因になる。そのような基底関数がある場合には、それに関する制御点を補間近似から除外するとともに、隣接する基底関数を拡張して extended B-spline (EBS) 基底関数を構築することで、悪条件化の原因になる制御点を使用しない補間を実現する。これにより、近似精度を大きく低下させることなく剛性行列の悪条件化を回避できる。

B-spline 基底関数のサポート領域を占める物理領域の体積分率とその体積分率に閾値  $\phi_{\text{cr}}$  を設けて、その大小関係に応じて B-spline 基底関数を i) 標準基底関数 ( $\phi_I > \phi_{\text{cr}}$ )、ii) 欠陥基底関数 ( $0 < \phi_I \leq \phi_{\text{cr}}$ )、iii) 外部基底関数 ( $\phi_I = 0$ ) の 3 種類に分類する。いま、i) と ii) の制御点の集合をそれぞれ  $\mathbb{S}$ 、 $\mathbb{D}$  と表すと、変位場の補間近似式 (21) は次式のように改められる。

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathbb{S}} B_I^d(\mathbf{x}) \mathbf{u}^I + \sum_{J \in \mathbb{D}} B_J^d(\mathbf{x}) \mathbf{u}^J \quad (23)$$

そして、欠陥基底関数に関する制御点の値  $\mathbf{u}^J$  を標準基底関数に関する制御点の値  $\mathbf{u}^I$  を用いて次の線形結合により外挿する。

$$\mathbf{u}^J \equiv \sum_{I \in \mathbb{S}_J} E_{IJ} \mathbf{u}^I, \quad \text{with } E_{IJ} = \prod_{\alpha=1}^{n_{\text{dim}}} \left( \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq I^\alpha - K^\alpha}}^d \frac{J^\alpha - K^\alpha - \nu}{I^\alpha - K^\alpha - \nu} \right) \quad (24)$$

ここで、係数  $E_{IJ}$  は制御点  $I$  における  $d$  次の Lagrange 補間多項式の制御点  $J$  での値である。また集合  $\mathbb{S}_J$  は  $\mathbb{S}_J = \{K \in \prod_{\alpha=1}^{n_{\text{dim}}} \{J^\alpha - d - 1, \dots, J^\alpha - 1\} \subset \mathbb{S}\}$  であり、制御点  $K$  を始点として制御点  $J$  に隣接する  $(d+1)^{n_{\text{dim}}}$  個の標準基底関数の制御点の集合である。制御点  $I$  での値  $\mathbf{u}^I$  による  $\mathbf{u}^J$  の外挿式 (24) を用いて式 (23) を書き改めると次式のようになる。

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathbb{S}} \underbrace{\left( B_I^d(\mathbf{x}) + \sum_{J \in \mathbb{D}_I} B_J^d(\mathbf{x}) E_{IJ} \right)}_{B_I^{d,e}(\mathbf{x})} \mathbf{u}^I \quad (25)$$

ここで、 $\mathbb{D}_I = \{J \in \mathbb{D} : I \in \mathbb{S}_J\}$  は標準基底関数の制御点  $I$  に関連する欠陥基底関数の制御点  $J$  の集合である。また、式 (25) の下付き括弧の項を  $B_I^{d,e}(\mathbf{x})$  と表記し、EBS 基底関数と称する。変位の近似式と同様に、圧力の近似式 (22) も EBS 基底関数を用いて次式により近似される。

$$p^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathbb{S}} B_I^{d,e}(\mathbf{x}) p^I \quad (26)$$

### 4. 数値解析例

提案手法の圧力振動の抑制性能を例証するために圧縮性および微圧縮性超弾性体に対する解析と、弾塑性

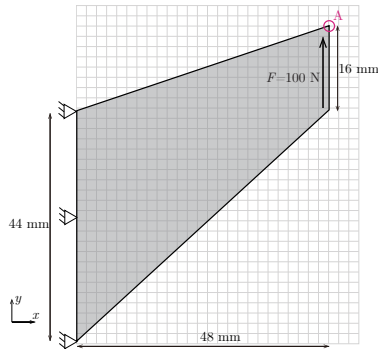


図-1 Cook 膜問題におけるモデル形状と境界条件

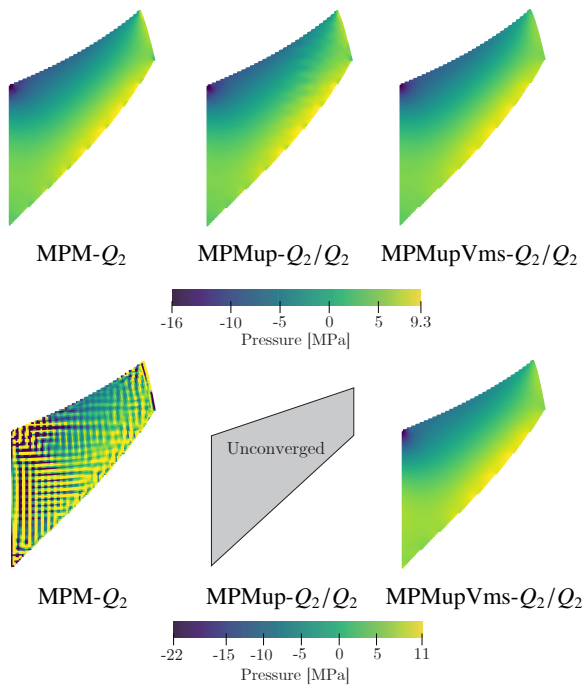


図-2 Cook 膜問題における圧力分布（上段が圧縮性材料，下段が微圧縮性材料）

体に対する解析を実施する。両解析ともに奥行方向を1格子として平面ひずみ状態を仮定した準3次元準静的解析とする。基底関数には全解析で2次EBS基底関数を採用する。提案手法の比較のため弾性体に対する解析においては、変位のみを独立変数とする定式化、VMS法を適用しない $u-p$ 混合定式化、VMS法を適用した $u-p$ 混合定式化の3種類で解析を行う。また、それぞれを“MPM- $Q_2$ ”，“MPMup- $Q_2/Q_2$ ”，“MPMupVms- $Q_2/Q_2$ ”と称する。

### (1) 弾性問題

提案手法の圧縮性および微圧縮性の超弾性体に対する性能評価のために、図-1に示すCook膜問題を実施する。超弾性構成則には次のひずみエネルギー密度関

表-1 材料パラメータ

Parameter		Value	Unit
Bulk modulus	$\kappa$	164.204	GPa
Shear modulus	$\mu$	80.196	GPa
Initial yield stress	$\sigma_{y0}$	450	MPa
Critical yield stress	$\sigma_{y\infty}$	750	MPa
Saturation parameter	$\delta$	16.93	
Linear hardening parameter	$H_0$	129.4	MPa
Penalty parameter	$\beta$	200	GPa
Occupation parameter	$\phi_{cr}$	0.01	
Algorithmic parameter	$c_1$	0.1	
	$c_2$	1.0	
Cell length	$h$	1.0	mm

数で定義されるHenckyモデルを採用する。

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_{\text{vol}} + \mathcal{H}_{\text{dev}} \\ &= \frac{\kappa}{2}(\ln \mathcal{J})^2 + \mu \left[ (\ln \lambda_1)^2 + (\ln \lambda_2)^2 + (\ln \lambda_3)^2 - \frac{1}{3}(\ln \mathcal{J})^2 \right]\end{aligned}\quad (27)$$

ここで、 $\lambda_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, n_{\text{dim}}$ ) は主ストレッチである。圧縮性材料と微圧縮性材料のポアソン比をそれぞれ0.3と0.4999とする。その他の定数は圧縮性材料と微圧縮性材料で共通とし、ヤング係数は240.565 MPa、安定化パラメータは $(c_1, c_2) = (0.1, 1.0)$ とする。粒子は1格子あたり $4 \times 4 \times 1$ 個配置する。また、格子1辺の長さを2.0 mmとする。

図-2の上段に圧縮性材料、下段に微圧縮性材料の圧力分布を示す。圧縮性材料の結果では、MPM- $Q_2$ およびMPMupVms- $Q_2/Q_2$ では滑らかな圧力分布が得られているが、MPMup- $Q_2/Q_2$ において圧力振動が見られた。この圧力振動はLBB条件を満足しないことに起因すると考えられる。また、微圧縮性材料の結果では、MPM- $Q_2$ で顕著な圧力振動が見られ、MPMup- $Q_2/Q_2$ では収束解が得られなかった。これらはいずれもLBB条件を満足しないことによると考えられる。一方で、MPMupVms- $Q_2/Q_2$ では滑らかな圧力分布が得られた。

以上の結果より、提案手法では圧縮性材料において変位法と同等の圧力分布が得られ、微圧縮性材料においては圧力振動を完全に抑制できた。これにより、圧縮性および微圧縮性材料の両方に対する有効性が確認された。

### (2) 弾塑性問題

提案手法の塑性非圧縮性による圧力振動の抑制性能を例証することを目的に、図-3に示す切り欠き付試験片の引張問題を実施する。ここでは、試験片の対称性から図中左の青枠で示した上半分の領域を解析対象とし、解析モデル形状と境界条件を図中右に示す通りとする。超弾性構成則として次式のひずみエネルギー密度関数を採用する[7]。

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_{\text{vol}} + \mathcal{H}_{\text{dev}} \\ &= \left[ \frac{\kappa}{2} \left( \frac{1}{2}(\mathcal{J}^e)^2 - 1 \right) - \ln \mathcal{J}^e \right] + \left[ \frac{\mu}{2} (\text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^e] - 3) \right]\end{aligned}\quad (28)$$

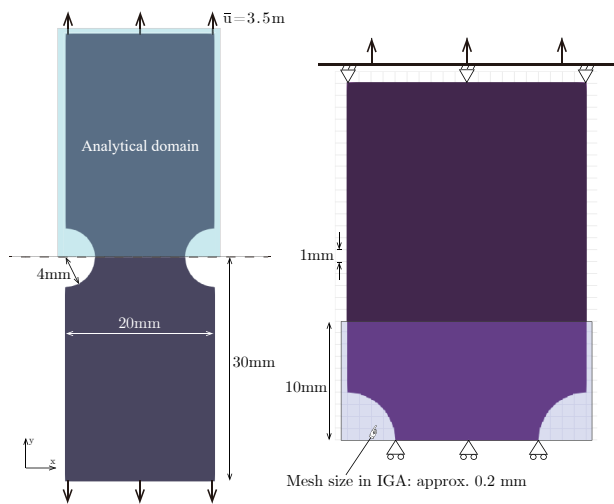
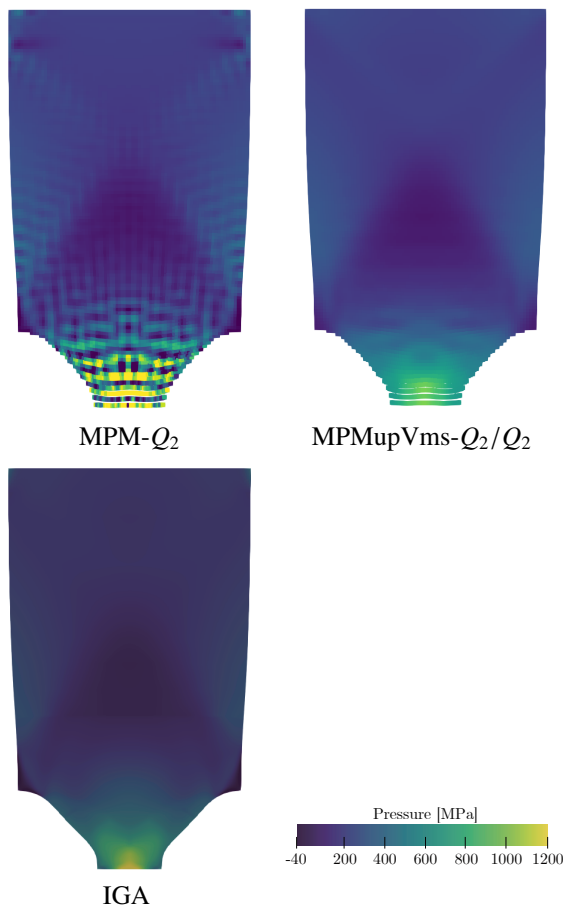


図-3 モデル形状および境界条件

図-4  $\bar{u} = 3.0 \text{ mm}$  における圧力分布

また、降伏関数として次式を用いる。

$$k(\bar{\epsilon}^p) = \sigma_{y0} + (\sigma_{y\infty} - \sigma_{y0})(1 - \exp[-\delta\bar{\epsilon}^p]) + H_0\bar{\epsilon}^p \quad (29)$$

ここで、 $\sigma_{y0}$ 、 $\sigma_{y\infty}$ 、 $\delta$ 、 $H_0$  はそれぞれ初期降伏応力、終局降伏応力、硬化速度を制御するパラメータ、線形硬化係数である。本解析例で使用する材料パラメータの値を表-1 に示す。また、1 格子あたりの初期粒子数を  $4 \times 4 \times 1$ 、NR 法の収束閾値を初期残差の  $10^{-10}$  倍とする。本解析は弾性問題での結果を踏まえて、“MPM- $Q_2$ ” お

よび“MPMupVms- $Q_2/Q_2$ ”により解析を実施する。それらに加えて、図-3 右側の網掛けした領域のメッシュサイズを約 0.2 mm とし 2 次 NURBS 基底関数を用いた IGA による解析を実施し、その結果を参照解とする。

図-4 に強制変位を  $\bar{u} = 3.0 \text{ mm}$  を与えた時点における圧力分布を示す。“MPM- $Q_2$ ”で切り欠き周辺において顕著な圧力振動が見られるのに対して、“MPMupVms- $Q_2/Q_2$ ”では圧力分布に水平方向の縞状の乱れが見られるものの圧力振動はかなりの程度抑えられており、参照解である“IGA”の圧力分布と同様の分布傾向が得られた。よって、提案手法は塑性非圧縮性に起因する圧力振動の抑制に対して有効であるといえる。

## 5. 結論

本研究では、VMS 法により安定化した  $u$ - $p$  混合定式化を有限変形弾塑性問題へと拡張し、EBS 基底関数に基づく陰的 MPM に適用した。提案手法の圧力振動の抑制性能を例証するために、圧縮性および微圧縮性超弾性体に対する解析と、弾塑性体に対する解析を実施した。弾性体に対する解析結果から、圧縮性材料に対しては提案手法は変位のみを独立変数とする定式化と同様に滑らかな圧力分布が得られ、微圧縮性材料に対しては提案手法は圧力振動を完全に抑制した。また、弾塑性体に対する解析結果から、提案手法では変位のみを独立変数とする定式化で見られた顕著な圧力振動を大幅に抑制し、参照解とした IGA の圧力分布と同様の分布傾向が得られた。よって、提案手法は微圧縮性と塑性非圧縮性に起因する圧力振動の抑制に有効であることが分かった。今後は、動的問題への適用性検討を行うとともに、メッシュ破綻が問題になるような大きな変形を伴う複雑な現象への適用を検討する。

謝辞: 本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2114 の支援を受けたものです。

## 参考文献

- [1] Sulsky, D. et al.: A particle method for history-dependent materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.118, pp.179–196, 1994.
- [2] Coombs, W. et al.: Overcoming volumetric locking in material point methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.333, pp.1–21, 2018.
- [3] Sugai, R. et al.: Extended B-spline-based implicit material point method enhanced by F-bar projection method to suppress pressure oscillation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.124, pp.2423–2448, 2023.
- [4] Iaconeta, I. et al.: A stabilized mixed implicit Material Point Method for non-linear incompressible solid mechanics, *Computational Mechanics*, Vol.63, pp.1243–1260, 2019.
- [5] Codina, R. et al.: Finite element approximation of stabilized mixed models in finite strain hyperelasticity involving displacements and stresses and/or pressure — An overview of alternatives, *International Journal for*

*Numerical Methods in Engineering*, Vol.125, e7540, 2024.

- [6] Yamaguchi, Y. et al.: Extended B-spline-based implicit material point method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.122, pp.1746–1769, 2021.
- [7] Simo, J.: A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.66, pp.199–219, 1988.