

# $\sigma$ 座標系への座標変換を用いたSPH法による効率的な自由表面流れ解析

Efficient Free Surface Simulation Using the SPH Method  
with Coordinate Transformation to the  $\sigma$ -Coordinate System

藤岡秀二郎<sup>1)</sup>, 辻勲平<sup>2)</sup>, 三目直登<sup>3)</sup>, 浅井光輝<sup>4)</sup>  
Shujiro Fujioka, Kumpei Tsuji, Naoto Mitsume and Mitsuteru Asai

<sup>1)</sup>九州大学 大学院工学府土木工学専攻 (〒 819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744, E-mail: s-fujioka@doc.kyushu-u.ac.jp)

<sup>2)</sup>東北大学 大学院工学研究科 助教 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, E-mail: kumpei.tsuji.e1@tohoku.ac.jp)

<sup>3)</sup>筑波大学 システム情報系 助教 (〒 305-8577 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail: mitsume@kz.tsukuba.ac.jp)

<sup>4)</sup>九州大学 大学院工学研究院附属アジア防災研究センター 教授

(〒 819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744, E-mail: asai@doc.kyushu-u.ac.jp)

The particle method is expected to have broad applicability due to improvements in accuracy. However, computational cost remains a practical issue. In this study, we apply the  $\sigma$ -coordinate system, which constant vertical resolution regardless of depth, to the SPH method to improve computational efficiency. Simulations with the  $\sigma$ -coordinate system require second-order derivatives. To enhance both accuracy and efficiency, we apply the high-accuracy approximation model, SPH(2). We verify the accuracy and efficiency through a hydrostatic pressure problem. In addition, we discuss volume conservation in simulation.

**Key Words :** SPH, SPH(2), Coordinate Transformation,  $\sigma$ -SPH

## 1. 緒言

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) 法や Moving Particle Semi-implicit (MPS) 法などの粒子法は、流体の分裂・結合現象を容易に表現できるため、津波や斜面崩壊などの災害シミュレーションに利用されている。一方で、粒子法では一般的に着目粒子から近傍粒子までの距離に応じたカーネル関数（重み関数の一種）を使った内挿近似を行うため、粒子配置が乱れた場合、計算精度が担保されない。また、全粒子に対して近傍粒子探索が必要なため他の数値計算手法に比べて計算コストが高いことが課題となっている。

前者の課題に対し本研究グループでは Taylor 級数展開の 2 次の項までを満足する 2 階微分モデル SPH(2) を提案し、既往の SPH モデルに対する優位性を確認してきた [1,2]。さらに、SPH(2) は混合微分を含む 2 階微分を個別に評価できるため座標変換にも適用可能なモデルである。そこで、MPS 法で提案された座標変換を用いた底面境界適合型粒子法 [3] を SPH 法に導入し、SPH(2) と併用することにより座標変換の適用と精度の両立が実現可能であることを確認してきた [4]。

本研究では、津波の解析に焦点を当て、気象・海洋分野のメッシュ型解法で用いられる水深に依らず鉛直方向の解像度を不变とする  $\sigma$  座標系 [5] への座標変換を SPH 法に導入した  $\sigma$ -SPH 法を提案し、沖合の不必要的粒子を削減することで高速化を図る。提案手法の精度検証として、静水圧問題を実施し、既往手法である底面境界適合型粒子法 [3,4] との計算効率の比較を行った。また、動的な問題を通して提案手法の体積保存性について議論した。

## 2. 座標変換の一般化

鉛直方向の座標変換における変換式は物理空間における水平方向の座標を  $x$ 、鉛直方向の座標を  $z$  とすると、2 次元条件下で以下のように表される [6]。

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{transformation pair}} \hat{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \alpha(z + \beta) \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで  $\alpha$ ,  $\beta$  はそれぞれ座標変換時の鉛直方向の倍率とシフト量を定める、 $x$  に関する任意の関数である。また、 $\hat{\mathbf{r}}$  は物理空間に座標変換を適用した射影空間における値であることを示す。続いて、この変換式におけるヤコビ行列  $\mathbf{J}$  を整理すると、

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} & \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_x \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\alpha_{r^1} = \frac{\partial \alpha}{\partial r^1}; \quad \beta_{r^1} = \frac{\partial \beta}{\partial r^1} \quad (3)$$

となる。ここで  $r^1$  は座標軸の方向を定める変数で、本研究では  $r^1 = x$ ,  $r^2 = z$  である。さらにヤコビ行列  $\mathbf{J}$  を用いて物理空間における勾配と Laplacian を整理すると以下のように表される。

$$\nabla\phi = \mathbf{J}\hat{\nabla}\phi; \quad \hat{\nabla} := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

$$\nabla^2\phi = \mathbf{J}\hat{\nabla}^T\mathbf{J}\hat{\nabla}\phi =: \mathbf{c}_{\text{trans}}^T \hat{\mathbf{D}}\phi \quad (5)$$

$$\mathbf{c}_{\text{trans}} := \begin{bmatrix} (\alpha_x^2 + \alpha_{xx})(z + \beta) + (2 + \alpha)\alpha_x\beta_x + \alpha\beta_{xx} \\ 1 \\ \alpha^2 + [\alpha_x(z + \beta) + \alpha\beta_x]^2 \\ 2[\alpha_x(z + \beta) + \alpha\beta_x] \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{D}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} & \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} & \frac{\partial^2}{\partial \hat{z}^2} & \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}\partial \hat{z}} \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

座標変換を用いた解析では射影空間である  $\hat{x}-\hat{z}$  座標系において評価した物理量の 1 階微分や 2 階微分それぞれの値を用いることで、物理空間での支配方程式を解く。

### 3. 座標変換の例

本章では、既往手法である底面境界適合型粒子法 [3,4] と提案手法である  $\sigma$ -SPH 法について述べる。

#### (1) 底面境界適合型粒子法

底面境界適合型粒子法 [3,4] は図-1 に示すように底面高さに応じた座標変換を適用することで複雑な底面を有する問題を単純な平面の空間上で解析可能にする手法である。式(1)で導入した変換式における  $\alpha$  と  $\beta$  を以下のように定めると、底面境界適合型粒子法に対応する。

$$\alpha = 1.0; \quad \beta = -h(x) \quad (8)$$

ここで  $h(x)$  は物理空間における基準線からの底面高さである。

#### (2) $\sigma$ -SPH 法

$\sigma$ -SPH 法は、 $\sigma$  座標系 [5] を SPH 法へと適用することで計算効率の向上を図る手法である。 $\sigma$  座標系は、図-2 に示すように水深に依らず鉛直方向の解像度を一定とする手法で、例えば、津波解析においては水深が深い沖合での粒子を削減することが可能である。式(1)で導入した変換式における  $\alpha$  と  $\beta$  を以下のように定めると、 $\sigma$ -SPH 法に対応する。

$$\alpha = \frac{\hat{H}}{H - h(x)}; \quad \beta = -h(x) \quad (9)$$

ここで  $\hat{H}$ ,  $H$  はそれぞれ射影空間における基準線からの任意高さ、物理空間における基準線からの任意高さである。

### 4. 高精度粒子法 SPH(2)

#### (1) 流体の支配方程式

SPH 法を用いた Newton 流体の解析では、Navier-Stokes 方程式と連続の式を支配方程式としてその運動を解く。本研究では SPH 法の中でも非圧縮性流体を対象とした半陰解法である ISPH (Incompressible SPH) 法

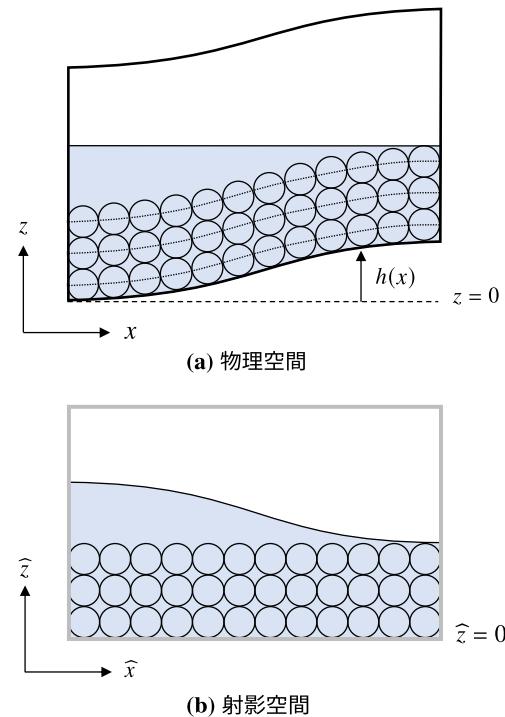


図-1 底面境界適合型粒子法の概略図

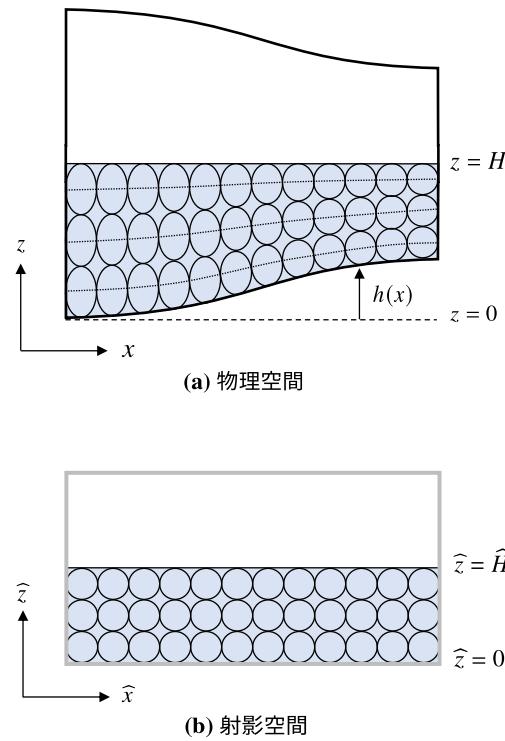


図-2  $\sigma$ -SPH の概略図

を用いて解析を行った。座標変換を適用する際の支配方程式はそれぞれ以下のように表される。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{J}\nabla p + \nu\mathbf{c}_{\text{trans}}^T \hat{\mathbf{D}}\mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (10)$$

$$\mathbf{J}\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (11)$$

ここで  $\rho, p, \nu, v, f$  はそれぞれ流体の密度、圧力、動粘性係数、速度、流体に作用する外力を示す。また、ISPH 法では次の時間ステップ  $N+1$  の圧力の算出のために以下の圧力 Poisson 方程式（以下、PPE と略記）を解く。

$$\mathbf{c}_{\text{trans}}^T \hat{\mathbf{D}} p^{N+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{J} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}^* \quad (12)$$

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^N + (\nu \mathbf{c}_{\text{trans}}^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{v}^N + \mathbf{f}^N) \Delta t \quad (13)$$

続いて、式(12)を解いて得た圧力  $p^N + 1$  を用いて、時間ステップ  $N+1$  における速度を算出する。

$$\mathbf{v}^{N+1} = \mathbf{v}^* - \Delta t \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{J} \hat{\nabla} p \right) \quad (14)$$

その後、物理空間における粒子の位置ベクトルを算出した速度を用いて更新する。

$$\mathbf{r}^{N+1} = \mathbf{r}^N + \mathbf{v}^{N+1} \Delta t \quad (15)$$

最後に式(1)を用いて、物理空間における粒子の位置ベクトルから射影空間における粒子の位置ベクトルを算出する。

## (2) SPH 法の空間離散化

SPH 法では連続体を粒子により空間離散化し、粒子の持つ物理量やその微分を、重み関数を用いることで以下のように単純な近傍粒子の和で粒子離散近似 (SPH 近似) する。

$$\langle \phi \rangle_i := \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_j \phi_j w_{ij} \quad (16)$$

$$\langle \nabla \phi \rangle_i := \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_j \phi_{ij} \nabla w_{ij} \quad (17)$$

$$\langle \nabla^2 \phi \rangle_i := 2 \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_j \phi_{ij} \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla w_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^2} \quad (18)$$

ここで  $V_j$  は粒子  $j$  の代表体積であり粒子の質量  $m_j$  と密度  $\rho_j$  を用いて  $V_j = m_j / \rho_j$  と表せる。 $\phi_j$  と  $w_{ij}$ ,  $\mathbf{r}_j$  はそれぞれ粒子  $j$  の物理量、粒子  $j$  の粒子  $i$  に対する重み、粒子  $j$  の位置ベクトルを表す。 $\phi_{ij}$  と  $\phi_{ij}$ ,  $\mathbf{r}_{ij}$  をそれぞれ  $\phi_{ij} := \phi_j - \phi_i$ ,  $\phi_{ij} := \phi_j - \phi_i$ ,  $\mathbf{r}_{ij} := \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$  と定義する。また、 $\mathbb{S}_i$  は粒子  $i$  の近傍粒子の集合である。本論文で括弧  $\langle \cdot \rangle$  は、近傍粒子の値を参照した SPH 近似であることを意味する。なお、座標変換を適用する際には、重みと位置ベクトルは射影空間における座標を参照する。

また、本研究では体積保存を満たすよう PPE を補正する安定化 ISPH 法 [7] を用いた。補正後の PPE は以下のように表される。

$$\langle \mathbf{c}_{\text{trans}}^T \hat{\mathbf{D}} p^{N+1} \rangle_i = \frac{\rho}{\Delta t} \langle \mathbf{J} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}^* \rangle_i + \gamma \frac{\rho - \langle \hat{\rho}^N \rangle_i}{\Delta t^2} \quad (19)$$

ここで、 $\langle \hat{\rho} \rangle$  は射影空間における数値密度である。また  $\gamma$  は安定化パラメータと呼ばれ、1 より十分小さい正の値である ( $0 < \gamma \ll 1$ )。

## (3) 高精度 SPH 近似モデル

SPH 近似モデルは Taylor 展開を用いて導出される。しかし前節で示した標準的なモデルは、粒子離散化した際のユニティ条件の成立や規則的な粒子配置を仮定して導出される。そのため、標準的なモデルは粒子離散化した状態や、少しでも粒子配置が乱れるような解析においては 1 次収束の速度すらない。そこで本研究では、1 階微分の算出に SPH 法で広く用いられる 1 次精度の勾配モデル、および 2 階微分の算出に SPH(2) [1,2] を用いた。1 次精度の勾配モデルと SPH(2) の式をそれぞれ以下に示す。

$$\langle \nabla \phi \rangle_i^{(1)} := \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_j \phi_{ij} \tilde{\nabla} w_{ij}; \quad \tilde{\nabla} := \left[ \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_j \nabla w_{ij} \mathbf{r}_{ij}^T \right]^{-1} \nabla \quad (20)$$

$$\langle \mathbf{D} \phi \rangle_i^{(2)} := 2 \mathbf{M}_i^{-1} \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_j \frac{\mathbf{r}_{ij}^T \tilde{\nabla} w_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^4} \mathbf{q}_{ij} (\phi_{ij} - \mathbf{r}_{ij}^T \langle \nabla \phi \rangle_i^{(1)}) \quad (21)$$

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

$$\mathbf{M}_i := \sum_{j \in \mathbb{S}_i} V_j \frac{\mathbf{r}_{ij}^T \tilde{\nabla} w_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^4} \mathbf{q}_{ij} \mathbf{p}_{ij}^T \quad (23)$$

$$\mathbf{p}_{ij} := [A(x, x) \quad A(z, z) \quad A(x, z)]^T \quad (24)$$

$$A(a, b) := a_{ij} b_{ij} - \mathbf{r}_{ij}^T \sum_{k \in \mathbb{S}_i} V_k a_{ik} b_{ik} \tilde{\nabla} w_{ik} \quad (25)$$

$$\mathbf{q}_{ij} := [x_{ij}^2 \quad z_{ij}^2 \quad x_{ij} z_{ij}]^T \quad (26)$$

ここで SPH 近似  $\langle \cdot \rangle$  の上付き文字  $(n)$  は Taylor 展開の  $n$  次の項までを満足するよう導出したモデルであることを示す。

## (4) $\sigma$ -SPH 法における体積保存処理と代表体積の補正

式(2), (9) より、 $\sigma$ -SPH 法における時間ステップ  $N$  でのヤコビアンを  $J^N$  とすると  $J^N = \alpha^N$  である。そのため、時間ステップ  $N$  における代表体積は  $V/J^N$  となり、 $\sigma$ -SPH 法では粒子の移動に伴い各粒子の代表体積が変化する。以上より、初期状態の体積を保存させるためには射影空間における数値密度が  $J^0/J^N \rho$  となる必要がある。そのため、 $\sigma$ -SPH 法においては安定化 ISPH 法での PPE (19) を

$$\langle \mathbf{c}_{\text{trans}}^T \hat{\mathbf{D}} p^{N+1} \rangle_i = \frac{\rho}{\Delta t} \langle \mathbf{J} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}^* \rangle_i + \gamma \frac{\rho J_i^0 / J_i^N - \langle \hat{\rho}^N \rangle_i}{\Delta t^2} \quad (27)$$

と改めなければならない。しかしながら、長時間の解析においては隣り合う粒子の数値密度の差が大きくなり、それに起因する数値不安定が生じることが考えられる。そのため、本研究では、初期状態でのヤコビアン  $J^0$  を  $\bar{J}^N$  へと補正した以下の式を用いる。

$$\langle \mathbf{c}_{\text{trans}}^T \hat{\mathbf{D}} p^{N+1} \rangle_i = \frac{\rho}{\Delta t} \langle \mathbf{J} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}^* \rangle_i + \gamma \frac{\rho \bar{J}_i^N / J_i^N - \langle \hat{\rho}^N \rangle_i}{\Delta t^2} \quad (28)$$

ここで、 $\bar{J}^N$  は  $J^0$  を平滑化した値である。着目粒子  $i$  とその近傍粒子の代表体積の変化  $\Delta V_{ij}$  を以下のように定

義する。

$$\Delta V_{ij} := C_V \frac{r_e - |\hat{r}_{ij}|}{r_e} \left( \frac{J_j^N}{\bar{J}_j^{N-1}} - \frac{J_i^N}{\bar{J}_i^{N-1}} \right) V =: \Delta J_{ij} V \quad (29)$$

ここで  $C_V$  は体積の平滑化度を定める任意の定数である。このとき粒子  $i$  と粒子  $j$  の体積は以下のように変化する。

$$V'_i = V_i + \Delta V_{ij}; \quad V'_j = V_j - \Delta V_{ij}, \quad (30)$$

ここで  $V'_i = J_i^N / \bar{J}_i^{N-1} V$  である。この関係を用いると  $\bar{J}_i^N$  と  $\bar{J}_j^N$  は以下のように表される。

$$\bar{J}_i^N = \frac{J_i^N \bar{J}_i^{N-1}}{J_i^N + \bar{J}_i^{N-1} \Delta J_{ij}}; \quad \bar{J}_j^N = \frac{J_j^N \bar{J}_j^{N-1}}{J_j^N - \bar{J}_j^{N-1} \Delta J_{ij}}. \quad (31)$$

この計算を着目粒子  $i$  の全ての近傍粒子に対して行うことで代表体積を平滑化する。そのため、ある近傍粒子  $j$  について式 (31) を計算した後、 $J_i^{N-1}$  に  $\bar{J}_i^N$  を代入し、次の近傍粒子に関して式 (31) の計算を行なうことを全近傍粒子に対して繰り返し行う。

## 5. 座標変換を適用した流体解析

本章では座標変換を適用した流体解析の結果を示す。まず静水圧問題を通して、既往手法である底面境界適合型粒子法 [3,4] (以下、BF-SPH と略記) と提案手法である  $\sigma$ -SPH 法の 2 つの手法で解析を実施し、計算精度と計算時間の比較を行う。また動的な問題を通して、前章で示した体積保存処理と代表体積の補正の妥当性を示す。また、本章で実施した解析には計算の安定化と高精度化のために粒子配置を規則的な状態へと近づける OPS (Optimized Particle Shifting) 法と人工斥力により粒子の過度な凝集を防ぐ DS (Dynamic Stabilization)，速度分布を滑らかにする XSPH を導入した。

### (1) 静水圧問題

本検証での解析モデルを図-3 に示す。 $x = 100$  cm 地点での鉛直方向の解像度を BF-SPH と  $\sigma$ -SPH の両手法で統一し、精度と解析に要した粒子数と計算時間の比較を行う。なお、 $\sigma$ -SPH では、 $x = 0$  cm の地点で  $\alpha = 1.0$ 、 $x = 100$  cm の地点で  $\alpha = 2.5$  である。

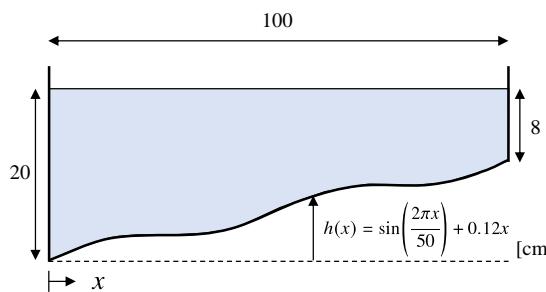


図-3 静水圧問題における解析モデル

解析結果を図-4 に示す。図-4(a-i) と図-4(b-i) に示す物理空間の圧力分布を比較すると、BF-SPH と  $\sigma$ -SPH の両手法の結果で大きな差はない、滑らかな圧力分布が

得られている。また、 $x = 0, 100$  cm 付近の粒子配置を見ると、BF-SPH では同一粒径の粒子が等間隔で分布しているが、 $\sigma$ -SPH では水深の浅い  $x = 100$  cm 付近では BF-SPH と同等の鉛直方向の解像度を保ち、 $x = 0$  cm 付近では鉛直方向の解像度が粗く、粒子数を削減できていることが確認できる。さらに、図-4(b-ii) に示す  $\sigma$ -SPH の射影空間の速度分布より、本来生じない流れがわずかに生じているものの、概ね 0 に近い値をとっており、BF-SPH の結果 (図-4(a-ii)) と大きな差がないことが確認できる。また、 $\sigma$ -SPH の射影空間では底面と水面がどちらも平面になっていることから、水深に依らず鉛直方向の解像度を一定とする  $\sigma$  座標系への座標変換が適切に作用していることが確認できる。

また表-1 に解析に要した粒子数と計算時間を示す。表-1 より、BF-SPH では約  $3.7 \times 10^4$  個の粒子を要していたが、 $\sigma$ -SPH では約  $0.9 \times 10^4$  個と粒子数を約 1/4 に削減できた。また、計算時間は BF-SPH では 28 時間ほど、 $\sigma$ -SPH では 4.4 時間ほどとなっており、約 1/6 となった。

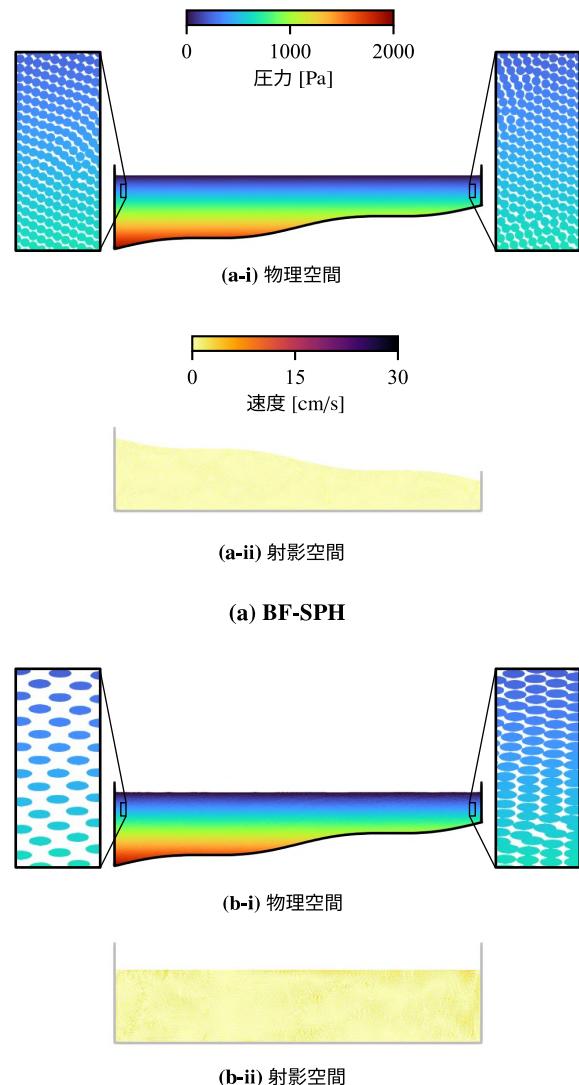


図-4 静水圧問題における 10 秒時点での解析結果

表-1 粒子数と計算時間の比較

	粒子数	計算時間 [h]
BF-SPH	37,285	28.3
$\sigma$ -SPH	9,086	4.4

## (2) 動的な問題

本検証での解析モデルを図-5に示す。本検証では安定化ISPH法におけるPPEに式(19)を用いた場合（体積保存処理なし）と、式(28)を用いた場合（体積保存処理あり）の結果を比較する。また、本研究では体積の平滑化度を定める $C_V$ を $1.0 \times 10^{-4}$ とした。本検証では、体積保存性の確認のため、以下に示す密度誤差 $e_\rho$ と総体積の誤差 $e_V$ を比較した。

$$e_\rho = \frac{\langle \rho \rangle^N - \rho}{\rho} \times 100 \quad (32)$$

$$\langle \rho \rangle_i^N = \frac{J_i^N}{J_i^N} \langle \hat{\rho} \rangle_i^N; \quad \langle \hat{\rho} \rangle_i^N := \sum_{j \in S_i} V_j \rho_j w_{ij} \quad (33)$$

$$e_V = \frac{V^N - V^0}{V^0} \times 100 \quad (34)$$

$$V^N = \sum_i \langle V \rangle_i; \quad \langle V \rangle_i := \frac{m_i}{J_i^N \langle \hat{\rho} \rangle_i^N} \quad (35)$$

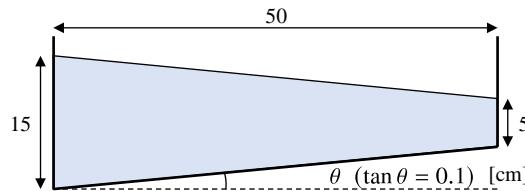


図-5 動的な問題における解析モデル

体積保存処理なしでの解析結果を図-6、体積保存処理ありでの解析結果を図-7に示す。図-6より、体積保存処理を用いない場合には、圧力は滑らかに分布しているものの密度の誤差が大きくなっている。また、100秒時点での結果を見ると、静水圧状態での理想的な自由表面位置であるグレーの破線より低い位置に自由表面があり、体積が減少していることが分かる。それに対し、体積保存処理を導入した図-7では、密度の誤差もほとんどなく、100秒時点での自由表面位置も理想的な自由表面位置とほぼ一致していることが分かる。

また、体積の平滑化を行わない場合( $C_V = 0$ )には、図-6に生じているような密度誤差を0に近づけるような圧力を算出しようとする。100秒時点の結果から分かるように長時間の解析では粗密が混在するため、各粒子間で大きな力が働き、数値不安定が生じることが考えられる。しかし図-7で示す通り、保存処理を導入した場合においても安定した解析を実現しており、これは体積の平滑化の効果であると考えられる。また、体積の平滑化を行わない場合には、左側の粒子が右側へ移

動した際、射影空間において数値密度を小さく、つまり粒子配置を疎にするような力が働く。そのため、 $\sigma$ -SPHを用いたとしても水深が浅い領域で高解像度を維持することができない。以上より、式(28)のような体積保存処理と体積の平滑化を併用することで、体積保存に加えて数値安定性や精度の高い解析が実現可能だといえる。

総体積の誤差 $e_V$ の時間遷移を図-8に示す。図-8より、体積保存処理を行っていない場合には解析の初期に体積が大きく減少し、最終的に-5%ほどの誤差が生じている。それに対し、体積保存処理を適用した場合には、解析初期でわずかに体積が減少しているものの、体積保存処理なしのような体積の増減はほとんど生じず、誤差は±1%の範囲に留まっている。

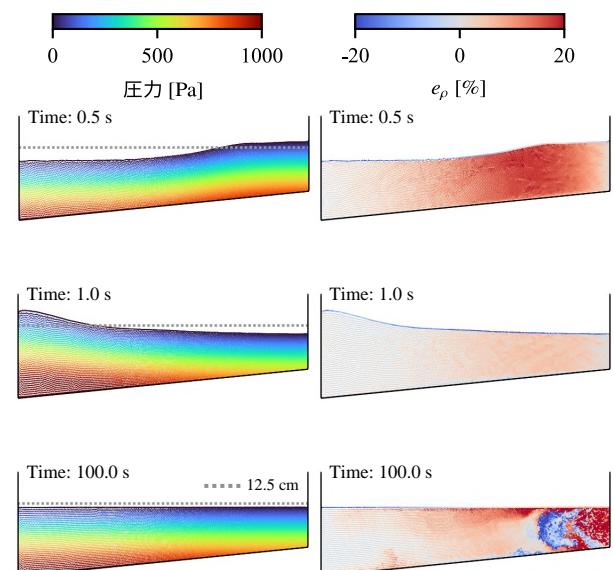


図-6 式(19)（体積保存処理なし）での解析結果

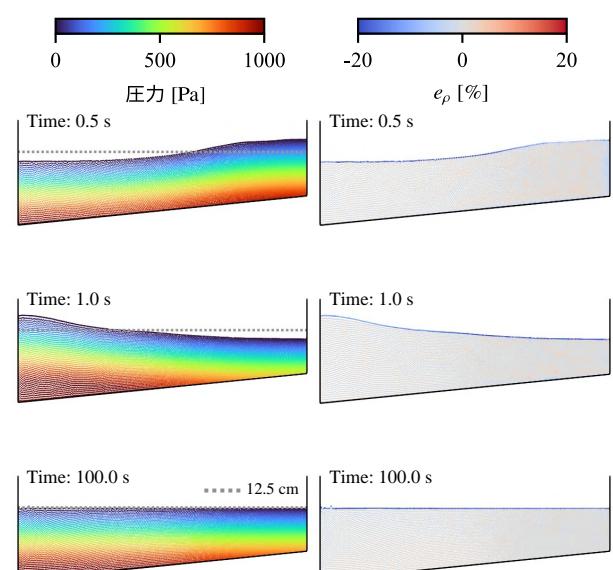


図-7 式(28)（体積保存処理あり）での解析結果

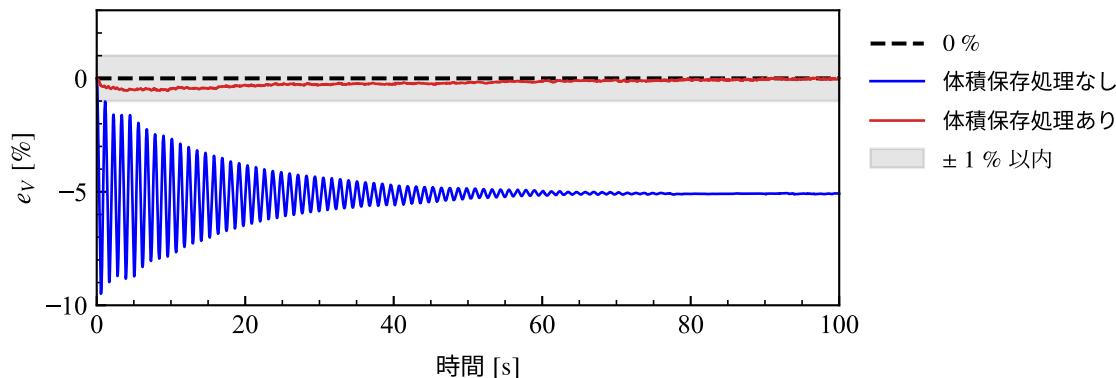


図-8 総体積の誤差の時間遷移

## 6. 結言

本研究では、粒子法の計算コストが高いという課題の改善のため、気象・海洋分野で用いられる $\sigma$ 座標系をSPH法に導入した $\sigma$ -SPH法を提案した。提案手法の妥当性と計算効率の確認のために、静水圧問題を対象とし、既往の手法である底面境界適合型粒子法と $\sigma$ -SPH法を適用した解析を実施した。その結果、圧力と速度の分布は底面境界適合型粒子法と $\sigma$ -SPH法で同程度の精度が得られた。また、解析に要した時間は $\sigma$ -SPH法が底面境界適合型粒子法に対して約1/6、すなわち約6倍の高速化を達成し、新たな効率的な粒子法の実現性を示した。続いて、 $\sigma$ -SPH法に対し4(4)で述べた体積保存処理と代表体積の補正を導入し、動的な問題を対象とした解析を実施した。体積保存処理を用いない場合には、総体積が時間の経過に伴い増減し、最終的に-5%ほどの誤差が残った。それに対し、体積保存処理と代表体積の補正の導入した場合には、総体積の増減はほとんど生じず、誤差を±1%の範囲で留め、安定した解析を実現した。

本研究では、体積保存処理のために長年の実績のある安定化ISPH法を採用した。しかしながら、安定化ISPH法は最適な密度になるような圧力を算出するようPPEを補正する手法であるため、多孔質体内部の流れのように数値密度が一定でない場合においては、解析の精度が低下することが明らかになっている[8]。そのため、今後は粒子再配列法の一種である密度ベースのParticle Shifting[8]を導入し、さらなる高精度化を図る。その後、3次元解析へ拡張した後、津波のシミュレーションなどの実問題への適用を目指す。

**謝辞:** 本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2136, JSPS 科研費 JP-23KK0182, 23KK26356, 23K19132, 23H00160, 24K00971, 24K22288, セコム科学技術振興財団の支援を受けた。

## 参考文献

- [1] 藤岡秀二郎, 辻勲平, 浅井光輝: 高精度 SPH 法～空間 2 次精度の勾配・ラプラシアン・混合微分～, 土木学会論文集, Vol.79, No.15, pp.22–15019, 2023.
- [2] Asai, M., Fujioka, S., Saeki, Y., Morikawa, D. S., and Tsuji, K.: A class of second-derivatives in the smoothed particle hydrodynamics with 2nd-order accuracy and its application to incompressible flow simulations, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.415, pp.116203, 2023.
- [3] 松本久也, 井元佑介, 浅井光輝, 三目直登: 底面境界適合型 MPS 法の開発, 日本計算工学会論文集, Vol.2021, pp.20210017, 2021.
- [4] 藤岡秀二郎, 辻勲平, 三目直登, 浅井光輝: 空間 2 次精度を有する sph(2) を用いた座標変換による底面境界適合型粒子法, 土木学会論文集, Vol.80, No.15, pp.23–15017, 2024.
- [5] Phillips, N. A.: A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting, *J. Atmos. Sci.*, Vol.14, No.2, 1957.
- [6] Fujioka, S., Mitsume, N., Tsuji, K., and Asai, M.: A generalized vertical coordinate transformation based on SPH(2) for efficient free surface flow simulations, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=5137961> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.5137961>.
- [7] Asai, M., Aly, A. M., Sonoda, Y., Sakai, Y., et al.: A stabilized incompressible SPH method by relaxing the density invariance condition, *J. Appl. Math.*, Vol.2012, 2012.
- [8] Tsuji, K., Fujioka, S., Morikawa, D. S., and Asai, M.: A reliable SPH(2) formulation for Darcy-Forchheimer-Brinkman equation using a density-based particle shifting in the ale description, *Comput. Part. Mech.*, pp. 1–29, 2024.