

複雑な断層すべりの高次元パラメータベイズ推定

Bayesian estimation of high-dimensional parameters for complex fault models

中尾 魁¹⁾ 市村 強²⁾ 宗包 浩志³⁾ 小林 知勝⁴⁾ 堀 高峰⁵⁾ 藤田 航平⁶⁾

Kai Nakao, Tsuyoshi Ichimura, Hiroshi Munekane, Tomokazu Kobayashi, Takane Horii and Kohei Fujita

¹⁾ 東京大学 地震研究所 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1, E-mail: k-nakao@eri.u-tokyo.ac.jp)

²⁾ 博 (工) 東京大学 地震研究所 教授 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1, E-mail: ichimura@eri.u-tokyo.ac.jp)

³⁾ 博 (理) 国土地理院 地理地殻活動研究センター地殻変動研究室 (〒305-0811 茨城県つくば市北郷 1 番 E-mail: munekane-h96nu@mlit.go.jp)

⁴⁾ 博 (理) 国土地理院 地理地殻活動研究センター宇宙測地研究室 (〒305-0811 茨城県つくば市北郷 1 番 E-mail: kobayashi-t96dv@mlit.go.jp)

⁵⁾ 博 (理) 海洋研究開発機構 海域地震火山部門・地震津波予測研究開発センター (〒236-0001 神奈川県横浜市中区金沢区昭和町 3173-25 E-mail: horit@jamstec.go.jp)

⁶⁾ 博 (工) 東京大学 地震研究所 准教授 (〒113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1, E-mail: fujita@eri.u-tokyo.ac.jp)

Bayesian estimation using Monte Carlo sampling faces challenges with poor convergence of sample distributions when parameters are high-dimensional. In this study, we developed a sampling method that constructs a probability distribution close to the posterior probability distribution using a small number of samples, and then calculate the transition to the posterior probability distribution with a large number of samples, making it robust for high-dimensional settings. As an example of a high-dimensional problem, we estimated fault slip for the 2024 Noto Peninsula earthquake and demonstrated that a convergent posterior probability distribution can be obtained with less computational cost compared to a conventional sampling scheme.

Key Words : Bayesian estimation, Monte Carlo sampling, Crustal deformation, Fault model

1. はじめに

地震は地下における断層すべりにより発生する。断層すべりを直接観測することは困難であるが、観測された地殻変動から断層すべりを推定することが可能であり、これにより得られる断層モデルは地震のメカニズムを理解する上で重要である。地下構造モデルの曖昧さや観測情報の不足により推定には不確実性が伴うが、モデルパラメータを確率変数として扱い不確実性を考慮したベイズ推定が行われるようになってきている (例えば [1])。

このようなベイズ推定において、モデルパラメータの事後確率分布は一般に解析的には得られないため、多数のサンプルによって近似的に事後確率分布を求めるモンテカルロサンプリングが用いられる。この方法にはサンプル数を増やすことでサンプルの分布が真の事後確率分布に収束するという利点があるが、パラメータが高次元となるにつれ、必要なサンプル数が急増し、推定にかかる計算コストが大きくなるという難点がある。複雑な断層すべりを伴う地震を対象とした解析では、推定すべきパラメータの次元が大きくなり、既往手法を適用するだけでは事後確率分布の収束解を得るのが難しかった。本研究では、高効率なサンプリングアルゴリズムを用いる断層すべりのベイズ推定手法を開発し、高次元パラメータ推定に対する手法の頑健性を高めた。さらに、提案手法を 2024 年能登半島地震の断層すべり推定に適用し、事後確率分布の収束解を既往手法に比べて少ない計算コストで得られることを確

認した。本稿では、提案手法の詳細を示し、2024 年能登半島地震の断層すべり推定への適用、既往手法との比較について述べる。

2. ベイズ推定の定式化

推定の対象となる断層のジオメトリを表すパラメータと確率分布のスケールパラメータを合わせて θ と表す。ベイズ推定の目標は、地殻変動の観測データ d が与えられたときの θ の事後確率分布 $P(\theta|d)$ を求めることである。ベイズの定理により、 $P(\theta|d)$ は以下のように表される。

$$P(\theta|d) = \frac{P(d|\theta)P(\theta)}{\int P(d|\theta)P(\theta)d\theta} \quad (1)$$

尤度関数 $P(d|\theta)$ は、断層面上の非一様なすべり分布 s を考慮し、

$$P(d|\theta) = \int P(d|s, \theta)P(s|\theta)ds \quad (2)$$

のように定義される。実際には式 (2) の積分は解析的に求められず Reflective Hamiltonian Monte Carlo[2] をカーネルとする逐次モンテカルロ [3] によってモンテカルロ積分で計算される。 θ の事前確率分布 $P(\theta)$ は十分広い範囲の一樣分布とした。この設定において $P(\theta|d)$ は解析的には得られないため、モンテカルロサンプリングによってこれを多数のサンプルで近似して求める。

3. サンプリング手法

θ が高次元となる設定に頑健な $P(\theta|d)$ からのサンプリング手法を述べる．提案手法では，Generalized Transitional Markov Chain Monte Carlo (GTMCMC)[4] を用いる．GTMCMC では，ある importance distribution $q(\theta)$ を設定し， $\gamma = 0$ のとき $q(\theta)$ ， $\gamma = 1$ のとき $P(\theta|d)$ に一致するような中間分布

$$p_\gamma(\theta) = \frac{(P(d|\theta)P(\theta))^\gamma (q(\theta))^{1-\gamma} d\theta}{\int (P(d|\theta)P(\theta))^\gamma (q(\theta))^{1-\gamma} d\theta} \quad (0 \leq \gamma \leq 1) \quad (3)$$

を考える． $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_J = 1$ となるような $\gamma_j (j = 1, \dots, J)$ に対して $p_{\gamma_j}(\theta)$ を逐次的にサンプルの集合として近似することによって最終的に事後確率分布からのサンプルを得る．

$p_{\gamma_j}(\theta)$ を近似するサンプルの集合が得られているとき，次の中間分布 $p_{\gamma_{j+1}}(\theta)$ を得る手続きは以下の通りである．まず，サンプル集合 $\{\theta_k\}$ に対して

$$w_k = \left(\frac{P(d|\theta_k)P(\theta_k)}{q(\theta_k)} \right)^{\gamma_{j+1}-\gamma_j} \quad (4)$$

の変動係数が閾値 0.2 以下となる γ_{j+1} を求め， w_k を重みとしてリサンプリングを行う．さらに，サンプルの分布が退化することを防ぐために，そこで得られた各サンプルを開始点として MCMC 法で $p_{\gamma_{j+1}}(\theta)$ からサンプリングを行う．はじめに $q(\theta)$ から多数のサンプルを得て，上述の操作によるサンプルの分布の更新を γ が 1 に達するまで繰り返すことで $P(\theta|d)$ からのサンプルが得られる．

$q(\theta)$ の設定として最も単純なのは $q(\theta) = P(\theta)$ で，これは断層すべりのベイズ推定を行った Nakao et al. (2024)[1] で用いられている．しかし，モデルが複雑で θ が高次元になるにつれ， $P(\theta|d)$ は急峻なピークをもち， $P(\theta)$ からは大きく離れた分布となる．そのような場合には GTMCMC の過程で $p_\gamma(\theta)$ の近似に対する誤差が蓄積し，最終的に得られるサンプルの分布がサンプル数の増加に対して収束しなくなることがある．GTMCMC では， $q(\theta)$ を $P(\theta|d)$ に近い分布に設定し，遷移する 2 つの分布の距離を小さくすることで，必要な中間分布の数を削減し，またサンプルの分布の収束性を向上させることができる [4]．そこで，本研究では以下のようにして $q(\theta)$ を $P(\theta|d)$ に近い確率分布に設定する．はじめに，小さいサンプル数で $q(\theta) = P(\theta)$ とした GTMCMC により $P(\theta|d)$ からのサンプルを得る．このサンプル集合は $q(\theta)$ を構成するためにのみ用いられるため，正確に $P(\theta|d)$ に従っている必要はない．次に，このサンプル集合の分布を最もよく近似するガウス分布のパラメータ

$$\mu_q = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \theta_k, \quad \Sigma_q = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\theta_k - \mu_q)(\theta_k - \mu_q)^T \quad (5)$$

を計算する．そして， $q(\theta) = N(\mu_q, \Sigma_q)$ とした GTMCMC を用い，サンプルの分布の収束に十分なサンプル数で $P(\theta|d)$ からのサンプリングを行う．

4. 適用例

複雑な断層すべりのモデル化を必要とするような地震として 2024 年能登半島地震を取り上げ，この地震で

Global Navigation Satellite System (GNSS) と Synthetic Aperture Radar (SAR) により捉えられた地殻変動の観測データを用いて断層すべりの推定を行った．この地震では，複数の断層面ですべりが生じたと考えられており，断層 1, 2, 3 の 3 つの矩形セグメントを用いて複雑な断層ジオメトリを表せる設定で断層をモデル化した．推定においては， μ_q, Σ_q を得るための予備的なサンプリングでは θ のサンプル数を 19,200 とし， $q(\theta) = N(\mu_q, \Sigma_q)$ とする GTMCMC ではサンプル数を 19,200, 38,400, 96,000, 192,000 と増やしてサンプルの分布の収束を確認しながらサンプリングを行った．

得られたサンプルの分布について，特にサンプル数 96,000 と 192,000 の設定で得られた分布が同様となっていることから，192,000 サンプルで分布の収束解が得られていることが確認された．例として，断層 1 の端の緯度を表す y_{\min} ，断層 2 の傾斜角を表す dip_2 ，GNSS 観測の誤差の大きさを表す $\log \sigma_{\text{gnss}}^2$ の事後確率分布を表すサンプルのヒストグラムを図 1 に示す．

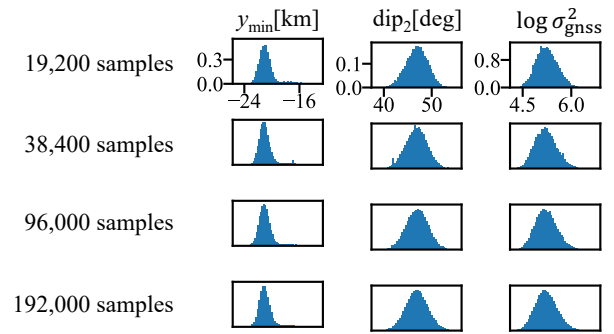


図-1 GTMCMC($q(\theta) = N(\mu_q, \Sigma_q)$) により推定されたサンプルの分布の例

θ のサンプルのそれぞれは断層モデルのジオメトリに対応しており，代表的なモデルとして， $P(\theta|d)$ のピーク値 $\hat{\theta}$ に対応するモデルを図 2 に示した．図中の断層面上のすべり分布は，条件付き事後確率分布 $P(s|d, \hat{\theta})$ のピーク値に対応するものである．

5. 既往手法との比較

本研究のように $q(\theta)$ を設定して GTMCMC によるサンプリングを行う場合と Nakao et al. (2024)[1] で用いられたように $q(\theta) = P(\theta)$ とする場合を比較し，提案手法の有効性を検証した．適用例と同様の設定において $q(\theta) = P(\theta)$ とし $P(\theta|d)$ からサンプリングを行った結果を図 3 に示す． $q(\theta) = P(\theta)$ とするとサンプルの分布のピーク位置や形状が 96,000 サンプルの場合と 192,000 サンプルの場合で異なっており，192,000 サンプルでも分布の収束解が得られていない．このことより，提案手法では適用例の計算においてサンプルの分布の収束性を実際に改善できていることが確認された．

さらに， $P(\theta|d)$ から 192,000 サンプルを得るために必要な計算コストを比較した． $q(\theta)$ を $P(\theta)$ または $N(\mu_q, \Sigma_q)$ とした場合の，サンプルの分布が $q(\theta)$ から $P(\theta|d)$ に至るまでの反復回数，及び計算時間を表 5. に示す．どちらの場合も計算はスーパーコンピュータ富岳の 8,000 ノー

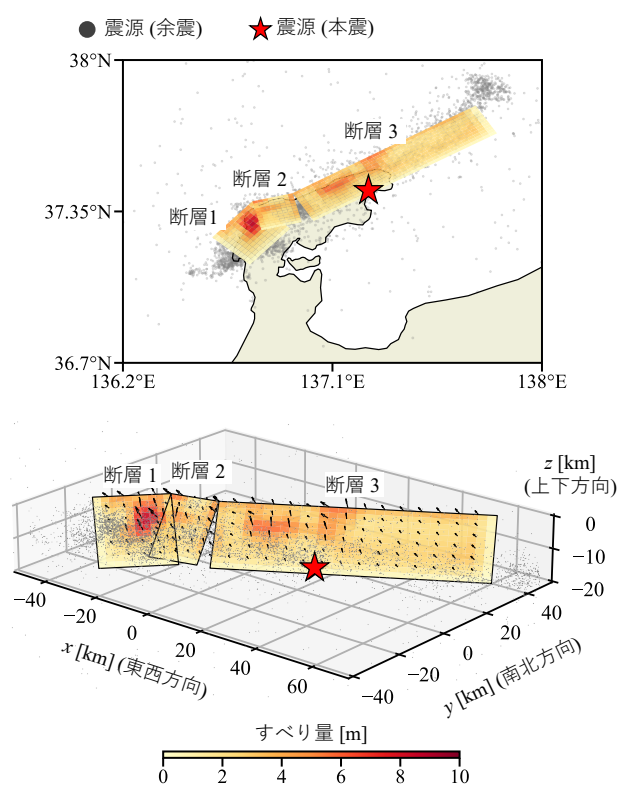


図-2 $P(\theta|d)$ のピーク値 $\hat{\theta}$ に対応する断層モデル

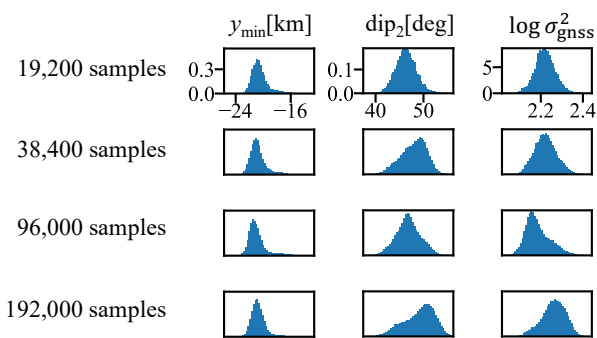


図-3 GTMCMC ($q(\theta) = P(\theta)$) により推定されたサンプルの分布の例

ドを用いて行っている． $q(\theta) = N(\mu_q, \Sigma_q)$ とした場合は $q(\theta) = P(\theta)$ とした場合に比べて反復回数と一反復あたりの計算時間がどちらも減少しており，これより提案手法ではより少ない計算コストでサンプリングを行うことができていることがわかる． $q(\theta)$ の選択によって一反復あたりの計算時間が異なった原因としては，式 (2) のモンテカルロ積分の評価にかかるコストが， θ が $P(\theta|d)$ のピークから離れると大きくなる傾向があることが挙げられる． $q(\theta) = N(\mu_q, \Sigma_q)$ の場合には， γ が 0 に近い段階からサンプルの分布 $p_\gamma(\theta)$ が $P(\theta|d)$ に近く，そのピークから大きく離れた θ に対する尤度評価が回避されている．尤度評価にかかるコストのばらつきが小さいことは並列計算の効率の観点でも有利であり，8000 ノード，192,000 サンプルの計算時間と 80 ノード，1,920 サンプルの計算時間の比は， $q(\theta) = P(\theta)$ の場合は 122%

であったが， $q(\theta) = N(\mu_q, \Sigma_q)$ の場合は 104%であった．

表-1 $q(\theta)$ を $P(\theta)$ または $N(\mu_q, \Sigma_q)$ と設定した場合の反復回数，計算時間

	$q(\theta)$	$P(\theta)$	$N(\mu_q, \Sigma_q)$
反復回数		69	21
総計算時間 [sec.]		18045	3354
一反復あたりの計算時間 [sec.]		261	159

6. 結論

本研究では，複雑な断層モデルに対するパラメータのベイズ推定のために，GTMCMC による高効率なサンプリングを行う推定手法を提案した．提案手法では予備的なサンプリングにより事後確率分布を粗く求め，それを近似する importance distribution から事後確率分布への遷移を多数サンプルで計算する．2024 年能登半島地震の断層すべり推定において，提案手法を用いることで，3 枚の断層セグメントからなる複雑なモデルにおけるパラメータの事後確率分布の収束解を得ることができた．また，既往手法との比較では，計算コストの削減とサンプルの分布の収束性の改善が確認された．本手法は，断層モデルに限らず，複雑なモデルへのベイズ推定の適用を広げると期待される．

謝辞： 本研究は，文部科学省「富岳」成果創出加速プログラム「「富岳」による地震の大規模シミュレーションの基礎拡充と社会実装へ向けた展開」(JPMXP1020230213)の一環として実施されたものです．また，本研究の一部は，スーパーコンピュータ「富岳」の計算資源の提供を受け，実施しました(課題番号：hp230203, hp240217)．本研究は JSPS 科研費 23H00213, 22K18823 の助成を受けたものです．本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2108 の支援を受けたものです．本研究で用いた ALOS-2 データは，地震予知連絡会 SAR 解析ワーキンググループ(地震 WG)を通じて，宇宙航空研究開発機構(JAXA)から提供を受けました．原初データの所有権は JAXA にあります．

参考文献

[1] Nakao, K. et al: Massively parallel Bayesian estimation with Sequential Monte Carlo sampling for simultaneous estimation of earthquake fault geometry and slip distribution, *J. of Computational Science*, Vol. 81, 102372, 2024.

[2] Mohasel Afshar, H. and Domke, J.: Reflection, Refraction, and Hamiltonian Monte Carlo, *Advances in Neural Information Processing Systems*, Vol 28, 2015.

[3] Ching, J. and Chen, Y.: Transitional Markov Chain Monte Carlo Method for Bayesian Model Updating, Model Class Selection, and Model Averaging, *J. of Engineering Mechanics*, Vol. 133, pp. 816-832, 2007.

[4] Lu, H. et al.: Generalized Transitional Markov Chain Monte Carlo Sampling Technique for Bayesian Inversion, arXiv:2112.02180, 2021.