

粗なメッシュ上の高精度圧力近似を用いる Stokes 問題の混合 Galerkin 法

A mixed Galerkin approximation for the Stokes problem using higher order approximation on coarse meshes

内海 晋弥¹⁾
Shinya Uchiumi

¹⁾博 (理) 北海道大学 電子科学研究所 特任助教 (〒 060-0812 北海道札幌市北区北 12 条西 7 丁目,
E-mail: shinya.uchiumi@es.hokudai.ac.jp)

A mixed Galerkin approximation for the Stokes problem is proposed. We use the standard finite element approximation for the velocity. On the other hand, the pressure is approximated by a higher order polynomial space on coarse meshes. We show by a numerical example that this method is accurate for a problem with a large external force, which is compared to the standard P2/P1-element. We also show that the resultant linear system is efficiently solved by a Krylov subspace method.

Key Words : Stokes problem, Galerkin approximation, finite element method, Krylov subspace method

1. はじめに

流体の挙動を制御する工学や産業応用の問題として、また、血管を流れる血の流量や物質の濃度を予測する医学の問題として [8], 流れ解析の需要は普遍的に現れる。非圧縮粘性流の運動を記述する Navier–Stokes 方程式の解の数値計算において、非線形性の扱いや移流項の適切な近似法等の多くの議論があるが、ここでは未知関数である流速と圧力の近似法に注目するために Stokes 問題に焦点を当てる。

問題を Galerkin 近似して解を求める場合、流速と圧力を近似する空間を独立に選ぶことはできず、これらの対が inf-sup 条件を満たすことが要求される [4,6]。これは、流速近似空間の自由度の数を圧力のそれよりも「十分多く」する必要性を意味している。Inf-sup 定数の大きさは近似解の精度だけではなく、離散化後の連立一次方程式の係数行列の条件数にも影響する [4]。Galerkin 近似の一つである有限要素法は様々な領域に適用可能であるという幾何学的柔軟性が特長の一つである。流速に三角形 2 次要素、圧力に三角形 1 次要素を用いる近似空間の対 (P2/P1 要素あるいは Taylor–Hood 要素) は inf-sup 条件を満たすものとしてよく知られている [4,6]。

一方、総説 [5,7] においては P2/P1 要素によって良好に近似解を計算できない例が報告されている。総説 [7] では大きな Coriolis 力や浮力が働く問題が挙げられている。ここでは通常の有限要素近似においては厳密に満たされない非圧縮性の近似度が重要な論点となっており、非圧縮性に関するペナルティ項である grad-div 安定化項の付加や厳密に非圧縮性を満たす Scott–Vogelius 要素の有効性が示されている。一方で [1] では、Coriolis 力が働く地球流体力学の問題においては、圧力離散空間を大きく、滑らかな空間に置き換えることが本質的であると述べられている。文献 [2,3,11] においては圧力の近似度に注目することにより、大きな外力と同種

の難しさである粘性係数依存性の改善が行われてきた。しかし、圧力の高精度近似は圧力の自由度の数の増加につながり、inf-sup 条件との両立が容易ではなくなるため、安定化手法が必要であった。

本報告においては、有限要素法がもつ幾何学的柔軟性と前述の圧力の高精度近似を両立させる目的で、流速に標準的な密なメッシュ上の有限要素空間を用い、圧力に粗なメッシュ上の高次多項式からなる空間を用いる粗密メッシュ混合 Galerkin 近似を提案する。これは、流速を有限要素近似、圧力をスペクトル近似する対 [12] の一般化であり、少ない自由度で高精度な圧力近似を実現することを意図している。大きな外力を持つ問題と、管状領域における流れ問題を設定し、精度と連立一次方程式の求解効率を P2/P1 要素と比較する。

2. Stokes 問題の粗密メッシュ混合 Galerkin 近似

(1) Stokes 問題とその Galerkin 近似

$(u, p) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ を未知関数とする Stokes 問題

$$-\nu \Delta u + \nabla p = f, \quad x \in \Omega, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1b)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (1c)$$

を考える。ここで、 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ は多角形領域、 $\partial\Omega$ はその境界、 $\nu > 0$ は粘性係数を表す定数、 $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ は与えられた関数である。この連続問題では $V \times Q := H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$ が基盤となる関数空間である。ここで、 $H_0^1(\Omega) := \{\psi \in H^1(\Omega); \psi = 0, x \in \partial\Omega\}$, $L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q \, dx = 0\}$ である。

注意 1. 議論を簡単にするためいくつかの条件をおいたが、第 3. 節では他の領域や境界条件の計算例も見ると。

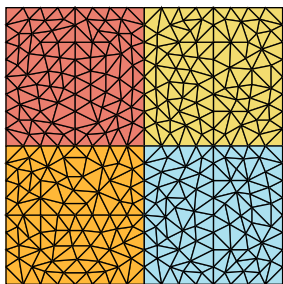


図-1 正方形領域 Ω に対する粗密メッシュ. 三角形分割が \mathcal{T}_h , 色分けされたマクロ要素の集まりが \mathcal{M}_h を表す.

$V_G \subset V$, $Q_G \subset Q$ をそれぞれ有限次元部分空間とする. Stokes 問題 (1) の Galerkin 近似問題は, 次を満たす $(u_G, p_G) \in V_G \times Q_G$ を求める問題である.

$$a(u_G, v_G) + b(v_G, p_G) = (f, v_G), \quad \forall v_G \in V_G, \quad (2a)$$

$$b(u_G, q_G) = 0, \quad \forall q_G \in Q_G. \quad (2b)$$

ここで, (\cdot, \cdot) は $L^2(\Omega)$ 内積 $(\phi, \psi) := \int_{\Omega} \phi \psi \, dx$ であり,

$$a(u, v) := \nu(\nabla u, \nabla v), \quad b(v, q) := -(\nabla \cdot v, q).$$

問題 (2) が適切であるためには, inf-sup 条件

$$\beta := \inf_{q_G \in Q_G \setminus \{0\}} \sup_{v_G \in V_G \setminus \{0\}} \frac{b(v_G, q_G)}{\|\nabla v_G\|_{L^2(\Omega)} \|q_G\|_{L^2(\Omega)}} > 0$$

の成立が要求される. さらに, 良好な数値解や理論結果を得るためには, β が離散化パラメータに依存しないことも要求される.

標準的な議論 [6] から次が成り立つ.

補題 1. $V_{G0} := \{w_G \in V_G; b(w_G, q_G) = 0, \forall q_G \in Q_G\}$ とするとき

$$\|\nabla(u - u_G)\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \inf_{w_G \in V_{G0}} \|\nabla(u - w_G)\|_{L^2(\Omega)} + \nu^{-1} \inf_{q_G \in Q_G} \|p - q_G\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3)$$

(2) 粗密メッシュ混合 Galerkin 近似

\mathcal{T}_h を Ω の三角形分割とし, 密なメッシュと呼ぶ. M を \mathcal{T}_h のいくつかの隣接する要素の和集合とし, これら M の集まりを \mathcal{M}_h とする. ただし, 三角形分割と同様に,

条件 1: $\cup_{M \in \mathcal{M}_h} M = \overline{\Omega}$,

条件 2: $\forall M_1, M_2 \in \mathcal{M}_h, M_1 \neq M_2 \Rightarrow \text{int}(M_1) \cap \text{int}(M_2) = \emptyset$

を満たすものとする. これを粗なメッシュと呼ぶ. $M \in \mathcal{M}_h$ をマクロ要素とも呼ぶ. 図 1 に Ω が正方形のときの例を示す.

$\mathbb{P}_m(\omega)$ を $\omega \subset \mathbf{R}^2$ 上の高々 m 次多項式の集合とする. Galerkin 近似対 (V_G, Q_G) として以下の粗密メッシュ混合 Galerkin 近似対を提案する:

$$V_{\mathcal{T}_h, k} := \{v_h \in V; v_{h|K} \in \mathbb{P}_k(K)^2, \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

$$Q_{\mathcal{M}_h, N} := \{q_h \in Q; q_{h|M} \in \mathbb{P}_N(M), \forall M \in \mathcal{M}_h\}.$$

ここで k, N は正の整数である.

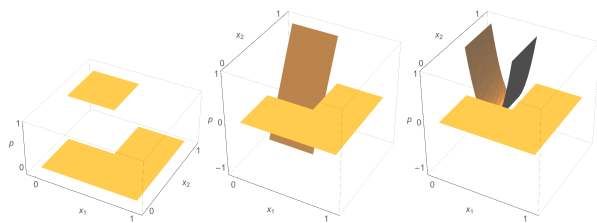


図-2 $\tilde{Q}_{\mathcal{M}_h, N}$ の基底の例.

注意 2. • 簡単のためにすべての $M \in \mathcal{M}_h$ で N は同じとしたが, 変えることも考えられる.

• $V_{\mathcal{T}_h, k}$ の元は連続であるが, $Q_{\mathcal{M}_h, N}$ の元は一般には不連続である.

(3) 圧力空間作成の指針

良好な近似解を得るための \mathcal{M}_h と N の選択についてコメントする.

式 (3) の右辺第 2 項目を考慮すると, ν が小さい, または p が大きい問題において, 圧力の高精度な近似が有効であることがわかる. $\|p - q_G\|_{L^2(\Omega)}$ を小さくする観点, つまり, 各 $M \in \mathcal{M}_h$ に対して $\mathbb{P}_N(M)$ に良い近似能力を持たせる観点からは, N は大きく, M は星型であることが望ましい.

一方, inf-sup 定数の大きさとのバランスにより N を選ぶ必要もある. 文献 [6, II, Theorem 1.12.] の議論などから, 領域全体の inf-sup 安定性は各 M におけるそれに帰着される. \mathcal{M}_h が領域 Ω 全体のみからなるときの議論は [12] にある.

(4) 圧力空間の基底の選択と前処理

圧力の空間を次で置き換えると, 基底の導入などの実装面が容易になる.

$$\tilde{Q}_{\mathcal{M}_h, N} := \{q_h \in L^2(\Omega); q_{h|M} \in \mathbb{P}_N(M), \forall M \in \mathcal{M}_h\}.$$

式 (1) のように境界全てに Dirichlet 条件を課す場合, 定数の不定性のため, 圧力解 p_h は $\tilde{Q}_{\mathcal{M}_h, N}$ 内に一意に定まらない. 解くべき連立一次方程式の係数行列が正則にならないが, 最小残差 (MINRES) 法等の反復解法は適用できる [4].

$\tilde{Q}_{\mathcal{M}_h, N}$ の基底として次が考えられる.

$$\psi_{M, i, j}(x) = \begin{cases} P_{M1, i}(x_1) P_{M2, j}(x_2), & x \in M, \\ 0, & x \notin M. \end{cases}$$

ここで, $M \in \mathcal{M}_h$ で, i, j は $i + j \leq N$ を満たす非負整数であり, $P_{M, r, s}$ は M の x_r 方向に関して適切にスケールされた s 次の Legendre 多項式である. 図 2 に一例を示す. M が長方形であれば自然なスケーリングができる. そうでない場合でも任意のスケーリングで基底の定義自体はできるが, 係数行列の条件数を考慮すると, 領域に応じた基底の選び方には注意を要する. 基底の選び方により条件数が悪化することは virtual element method でも報告されている [9].

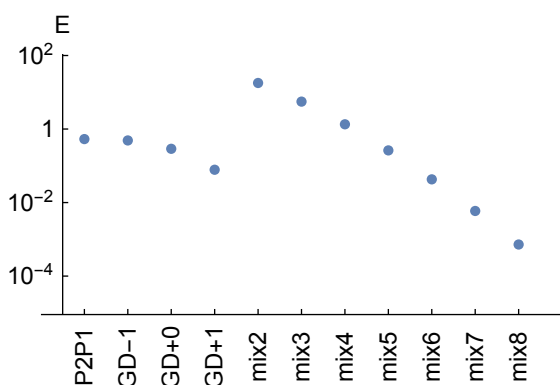


図-3 例 1 における数値結果の H^1 誤差. GD_m は grad-div 安定化項をパラメータ 10^m で付加したことを, $mixN$ の N は混合近似の圧力の次数を表す.

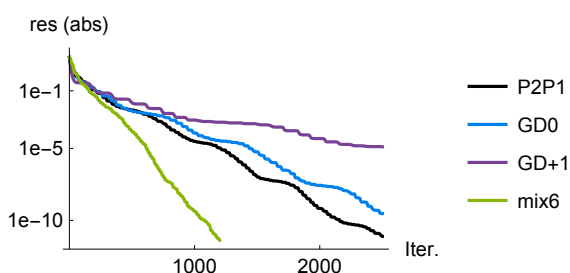


図-4 例 1 における MINRES の残差 (res) と反復回数 (Iter.). 凡例は図 3 と同じ.

3. 数値結果

粗密メッシュ混合 Galerkin 近似を単に混合近似 (mix) と呼ぶ. 混合近似の計算結果との比較のため, P2/P1 有限要素での計算結果も示す. 問題ごとに混合近似のための粗密メッシュを示すが, P2/P1 要素においても同じ密メッシュを用いる. 流速の有限要素空間の次数 k を 2 とする. 連立一次方程式は MINRES 法 [10] で解き, 初期ベクトルは 0, 前処理は無しとする.

例 1. $\Omega = (0, 1)^2$ とし, 式 (1a) において $\nu = 1$, $f = (0, 1000 \sin(3\pi x_2))$ とする.

$u = 0$ が解であるため, u の H^1 セミノルムを見ることがにより誤差を計算することができる. ここでは P2/P1 要素使用時に grad-div 安定化項 (例えば [7] を参照) を加えた結果も見. 図 1 の粗密メッシュを用いる. 混合近似における $Q_{M_h, N}$ の基底は各正方形に関してスケリングをし, 次数 N は変化させて実験する.

図 3 は各計算手法における H^1 誤差を示している. P2/P1 要素の誤差は 1 に近い. grad-div 安定化項を大きなパラメータで付加すれば改善が見られる. 混合近似は N を大きくすれば誤差は 10^{-2} 以下となった. 図 4 は MINRES の収束履歴を示している. grad-div 安定化項を付加すると無しのとき (P2P1) よりも収束が遅くなり, 特に大きなパラメータの時にそれが顕著である. 一方, 混合近似 ($N = 6$) の収束は P2/P1 要素よりも速い.

例 2. Ω を図 5 で与えられた領域とし, 式 (1a) において $\nu = 1$, $f = 0$ とする. Γ_{in} においては Dirichlet 条件

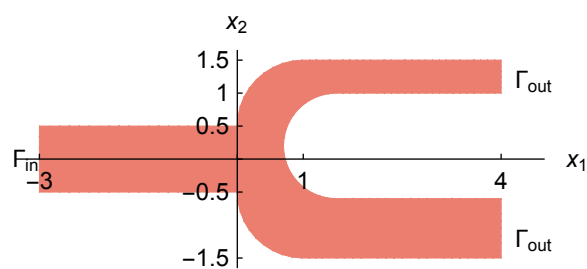


図-5 例 2 の領域 Ω と境界.

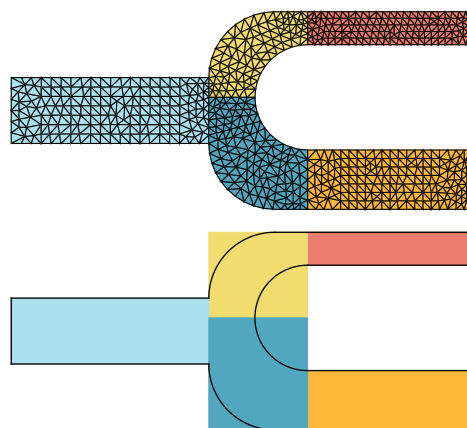


図-6 上: 例 2 で用いる粗密メッシュ. 三角形分割は密なメッシュを, 色分けされたマクロ要素の集まりが粗なメッシュを表す. 下: Legendre 多項式の基準となる長方形.

$u = (4(x_2 + 0.5)(0.5 - x_2), 0)$ を, Γ_{out} においては Neumann 条件 $\nu \frac{\partial u}{\partial n} - pn = 0$ を, その他の境界においては $u = 0$ を課す. ここで n は外向き単位法線ベクトルを表す.

図 6 上に示す粗密メッシュを用い, $Q_{M_h, N}$ における次数 N は 4 とし, 基底は下に示す長方形に関してスケールした.

図 7 と図 8 の第 1 行はそれぞれ P2/P1 要素と混合近似による数値解の流速第 1 成分を示している. 顕著な差は観察されない. 第 2 行以降は MINRES の反復過程の途中における数値解を示している. 400 ステップ, $x_1 = 4$ において, P2/P1 要素の解はほぼ 0 であるが, 混合近似の解は最終結果と同じ形をしている. 図 9 と図 10 はそれぞれ P2/P1 要素と混合近似による圧力の数値解と反復過程を示している. 混合近似の解からは, $x_1 = 0$ 付近においてマクロ要素の境界における不連続性が観察される. その他の傾向は流速のそれと同じである.

4. おわりに

本稿では流速を密なメッシュで, 圧力を粗なメッシュで高次多項式を用いる方法を提案し, 精度と連立一次方程式の反復解法における効率を比較した. 本稿では MINRES の前処理については触れられなかったが, これを考慮した反復回数と計算効率の比較は今後の重要な課題である.

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 JP21K13838 の助成を受けた.

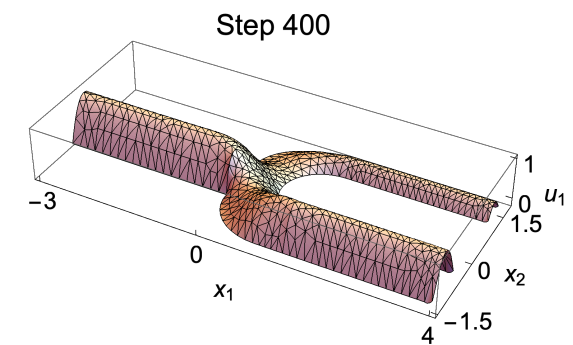
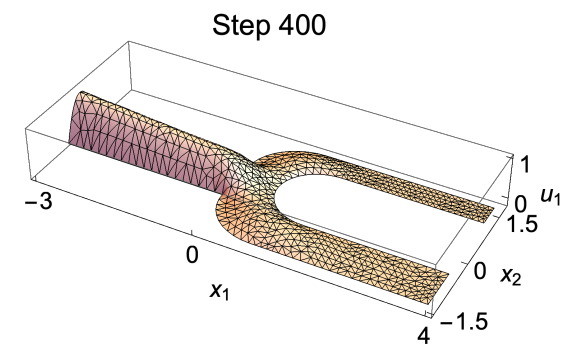
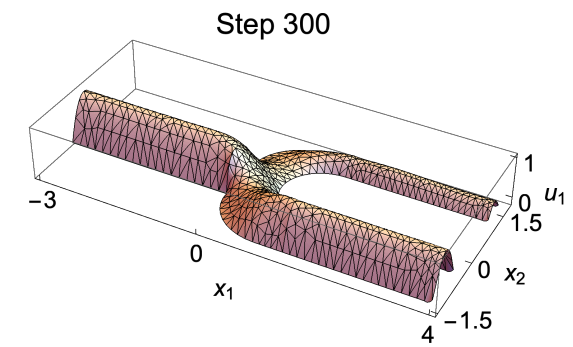
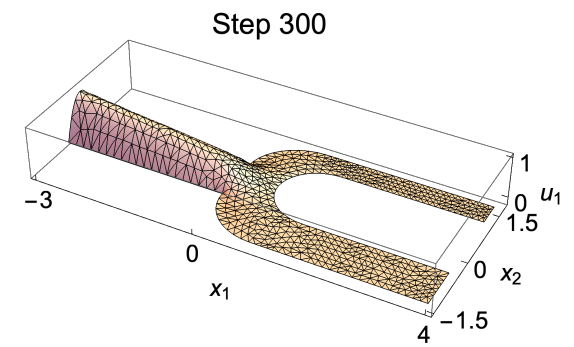
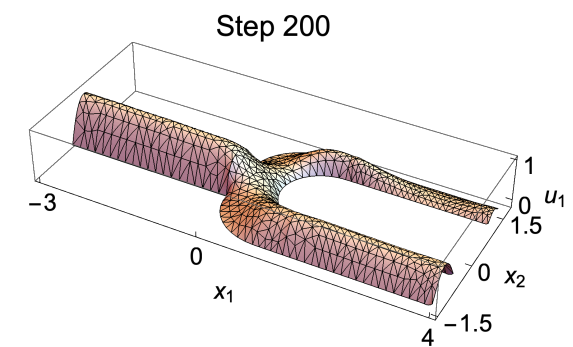
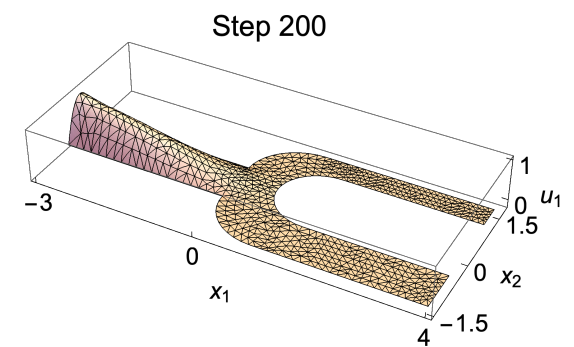
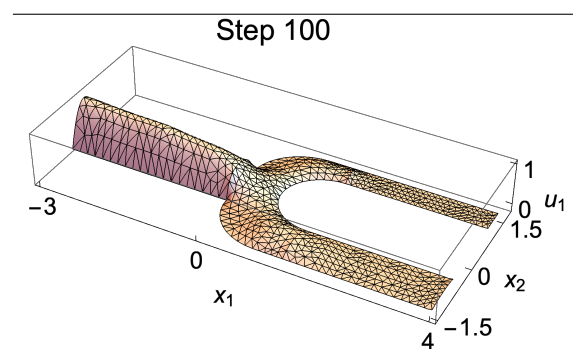
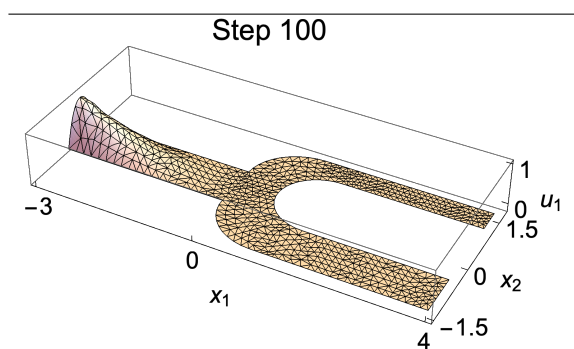
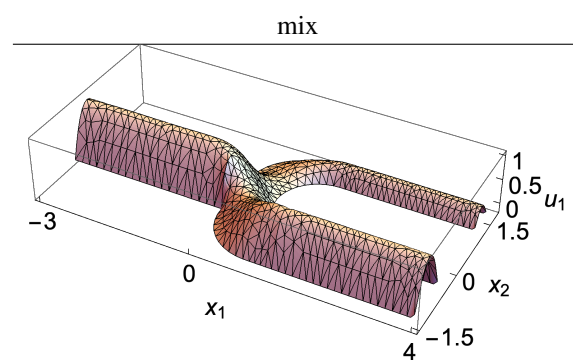
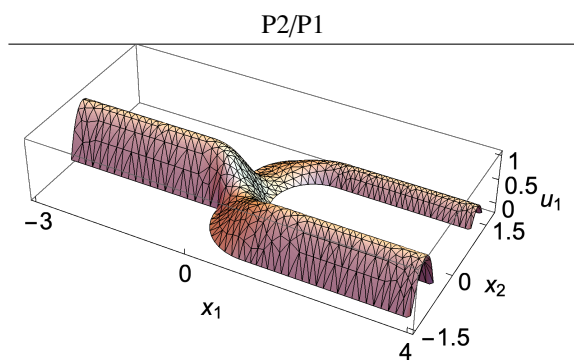


図-7 流速第1成分に関するスキームの解(第1行)とそこへのMINRESの収束履歴(第2行以降). P2/P1要素.

図-8 流速第1成分に関するスキームの解(第1行)とそこへのMINRESの収束履歴(第2行以降). 混合近似.

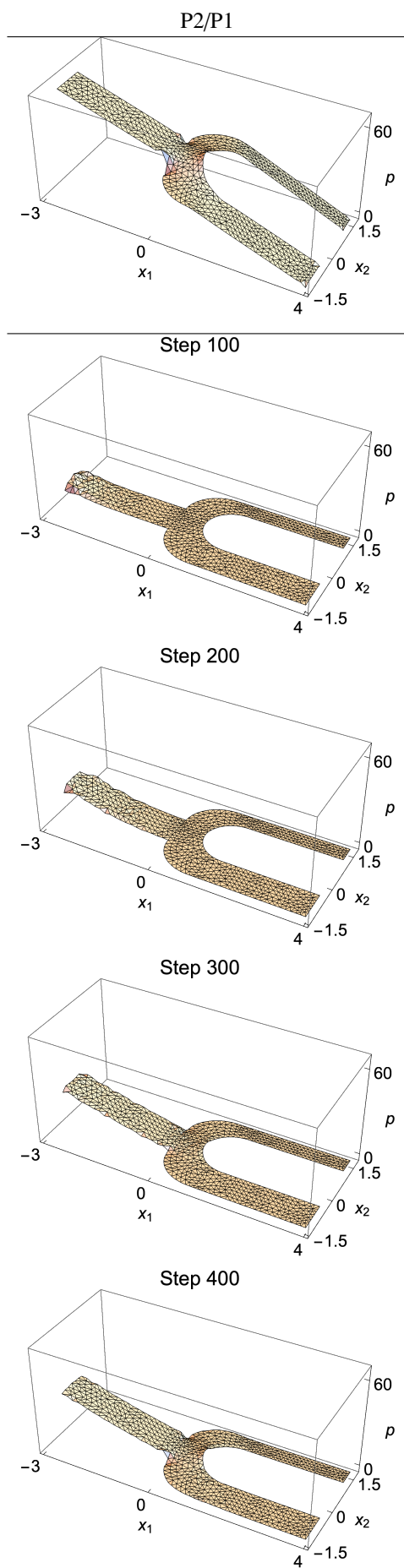


図-9 圧力に関するスキームの解（第1行）とそこへの MIN-RES の収束履歴（第2行以降）. P2/P1 要素.

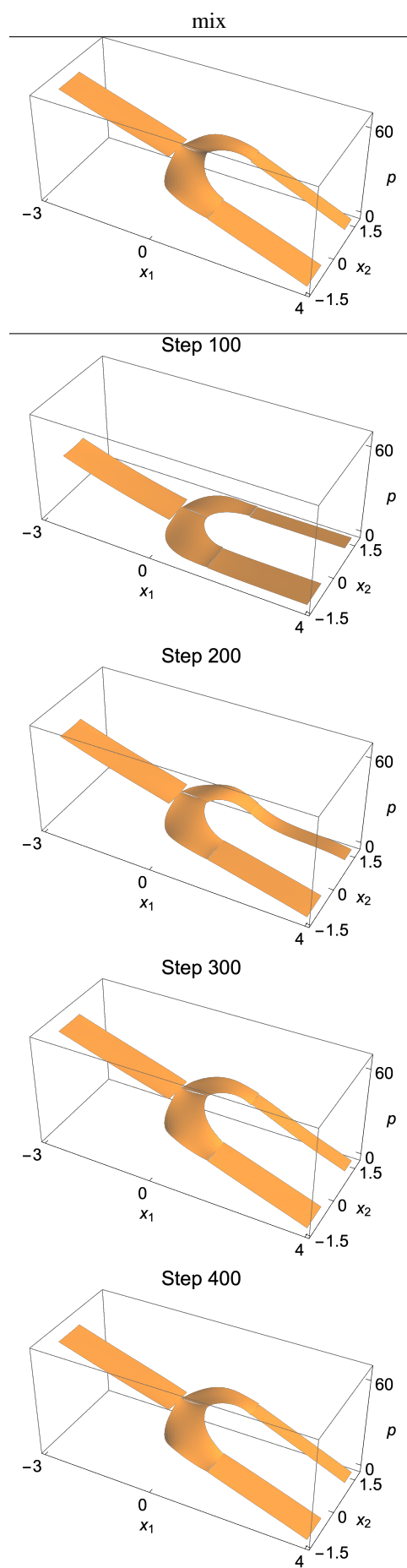


図-10 圧力に関するスキームの解（第1行）とそこへの MIN-RES の収束履歴（第2行以降）. 混合近似.

参考文献

- [1] C. Bernardi and F. Hecht. More pressure in the finite element discretization of the Stokes problem. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol. 34, No. 5, pp. 953–980, 2000.
- [2] G. Chen and M. Feng. Analysis of solving Galerkin finite element methods with symmetric pressure stabilization for the unsteady Navier-Stokes equations using conforming equal order interpolation. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 9, No. 2, pp. 362–377, 2017.
- [3] J. de Frutos, B. García-Archilla, V. John, and J. Novo. Error analysis of non inf-sup stable discretizations of the time-dependent Navier–Stokes equations with local projection stabilization. *IMA Journal of Numerical Analysis*, Vol. 39, No. 4, pp. 1747–1786, 2019.
- [4] H. Elman, D. Silvester, and A. Wathen. *Finite Elements and Fast Iterative Solvers*. Oxford, 2014.
- [5] B. García-Archilla, V. John, and J. Novo. On the convergence order of the finite element error in the kinetic energy for high Reynolds number incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 385, p. 114032, 2021.
- [6] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer, 1986.
- [7] V. John, A. Linke, C. Merdon, M. Neilan, and L.G. Rebholz. On the divergence constraint in mixed finite element methods for incompressible flows. *SIAM Review*, Vol. 59, No. 3, pp. 492–544, 2017.
- [8] J. Liu and H. Suito. A multicore parallel algorithm for multiscale modelling of an entire human blood circulation network. 2024. arXiv.2404.01680.
- [9] L. Mascotto. Ill-conditioning in the virtual element method: Stabilizations and bases. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 34, No. 4, pp. 1258–1281, 2018.
- [10] C. C. Paige and M. A. Saunders. Solution of sparse indefinite systems of linear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 12, No. 4, pp. 617–629, 1975.
- [11] S. Uchiumi. A viscosity-independent error estimate of a pressure-stabilized Lagrange–Galerkin scheme for the Oseen problem. *Journal of Scientific Computing*, Vol. 80, No. 2, pp. 834–858, 2019.
- [12] S. Uchiumi. A finite element/polynomial spectral mixed approximation for the Stokes problem. *Results in Applied Mathematics*, Vol. 25, p. 100550, 2025.