計算工学講演会論文集 Vol. 30 (2025 年 6 月) 日本計算工学会

スカラー積・ベクトル積・ギブス積

Scalar Product, Vector Product and Gibbs Product

登坂宣好 [1)]

[1)]工博 （株） Material speaks T-Lab. 代表 （〒 192-0373 東京都八王子市上柚木 3-9-1-211, E-mail: nob42tsk19@gmail.com)

In convential vector space, especially 3-D Euclidean vector space, not only addition and scalar multiplication but also scalar product and vector product are introduced between two vectors. J. W. Gibbs was introduced and defined the concept on dyad and dyads. This concept is applied extensively to rational continuum mechanics as tensor product. The Gibbs product instead of dyad is played a very important part in various expressions and operations of linear transformation (second order tensor) defined on 3-D Euclidean vector space is shown in this paper.

Key Words : *Vector, Tensor, Scalar Product, Vector Product, Dyad, Gibbs Product, Linear Transformation, Double Multiplication*

1. はじめに

力学、特に連続体力学の数理モデルの構築には 3 次元ユークリッドベクトル空間におけるベクトル・テンソルに関する代数及び微積分が用いられている。

ベクトルの演算は加法とスカラー倍法のほかにスカラー積とベクトル積である。このベクトルを力学に用いたのは統計力学分野の著名な研究者として知られている J. W. Gibbs による 1881-84 における講義が初めてといわれている [1]。その後、その講義の内容が成書 [2] として刊行された。なお、ベクトルのスカラー積とベクトル積を表すに用いられている記号 · (dot), × (cross) は Gibbs に由来する。

講義録 [2] には、ベクトル間のスカラー積とベクトル積のほかに、ダイアド (dyad) が定義され、不定積 (inderminate product) とも呼んでいる。この Gibss によるダイアドの概念が有理連続体力学分野 [3,4] ではテンソル積 (tensor product) として多用されている。しかし、テンソル積の概念と記号は、双線形関数を対象とした外積代数 [1] で多用されているので混乱を避ける意味で著者は、Gibbs に敬意を示すものとして、ギブス積 (Gibbs product) と呼ぶことを提案した [5]。

本論では、ダイアドを 3 次元ユークリッドベクトル空間 E^3（以後　E と略記する）上で定義された線形変換の一つの表現ととらえる立場から Gibbs によるベクトル解析で展開されているダイアドによる種々の演算や作用を再考する。その結果として、ベクトル間の演算であるスカラー積とベクトル積はベクトルとテンソルさらにテンソル間の演算として拡張できることを示す。

2. ダイアドとギブス積

(1) ダイアド

まず初めに Gibbs がダイアドと呼んで 2 つのベクトルに対して定義した概念と演算を明らかにする。

定義：ダイアド (Gibbs [2])

E の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とあるベクトル $\boldsymbol{u}$ に対し、E 上のスカラー積を用いたベクトル $\boldsymbol{a}$ のスカラー倍を次のように表し、

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}) := (\boldsymbol{ab}) \cdot \boldsymbol{u} \tag{1}$$

をベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のダイアド (dyad) または不定積 (inderminate product) と呼ぶ。

なお、左辺のスカラー積の性質より上式は次のようにも表される。

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{ba}) \tag{2}$$

さらに、

$$(\boldsymbol{ba}) = (\boldsymbol{ab})_c \tag{3}$$

と表し、ダイアド $(\boldsymbol{ba})$ をダイアド $(\boldsymbol{ab})$ の conjugate dyad と呼び、上記のように表す。

この Gibbs によるダイアドの定義と概念は、2 つのベクトルのダイアドとベクトルとのドット積が E 上のベクトルとなることを示している。すると、ダイアドとはスカラーでもなくベクトルでもなくほかのベクトルのドット積としての結果、右辺のベクトルを定める演算となっている。この意味においてまさに不定積である。

したがって、不定積としてのダイアドの代数的な意味を明確にする必要が生じ、第 5 章で議論する。

(2) ギブス積

ダイアドの概念を明確化するために 2 つのベクトルから線形変換を定めるような定義と概念を与える。

定義：ギブス積（登坂 [5]）

E 上の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と、任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して、1 つのベクトルを定めるような演算を次のように表し、

$$(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})[\boldsymbol{u}] := \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}) \tag{4}$$

をベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のギブス積 (Gibbs product) と呼ぶ。すなわち、ギブス積は E 上の線形変換である。

上記の定義に対して、有理連続体力学では $(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})$ をテンソル積の表記を用いて $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})$ と表している。

3. 線形変換

(1) 線形変換の表現

Gibbs によるダイアドの代りに 2 つのベクトルに対して線形変換を定めるギブス積を定義した。すると、E 上の任意の線形変換はギブス積の線形結合として表現することができる。それを以下の定理に示す。

定理：線形変換のギブス積表現

E 上の任意の線形変換を $\boldsymbol{T}$ とする。基底 $F = \{\boldsymbol{f}_i\}$ とその逆基底 $F^{-1} = \{\boldsymbol{f}^i\}$ に対して、次のような $\boldsymbol{T}$ の表現を得る。

$$\boldsymbol{T} = T^i_j(\boldsymbol{f}_i \odot \boldsymbol{f}^j) \quad (\boldsymbol{T}[\boldsymbol{f}_j] := T^i_j \boldsymbol{f}_i) \tag{5}$$

この定理より、基底ベクトル同士の線形結合の組 $\{(\boldsymbol{f}_i \odot \boldsymbol{f}^j)\}$ は線形変換の集合としての線形空間、すなわち、線形変換空間 $L(E, E) \equiv L(E)$ の基底であることがわかる。

(2) 線形変換に対する線形写像

ここで、ギブス積とスカラー積およびベクトル積との関係をつけるために線形変換に対する以下に示す 2 つの線形写像を定義する。

定義：線形変換に対する線形写像

任意の線形変換を $\boldsymbol{T}$ とし、E の基底を F, F^{-1} とする。

- トレース写像（スカラー化写像）

$$T_r : L(E) \to \boldsymbol{R};\ T_r[\boldsymbol{T}] := (\boldsymbol{T}[\boldsymbol{f}_i] \cdot \boldsymbol{f}^i) \tag{6}$$

- ベクトル化写像

$$T_v : L(E) \to E;\ T_v[\boldsymbol{T}] := (\boldsymbol{T}[\boldsymbol{f}_i] \times \boldsymbol{f}^i) \tag{7}$$

この線形写像を線形変換であるギブス積 $(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})$ に適用すると、次ような結果を得る。

$$\begin{aligned} T_r[(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})] &= ((\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})[\boldsymbol{f}_i] \cdot \boldsymbol{f}^i) \\ &= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{f}^i)(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{f}_i) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} T_v[(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})] &= ((\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})[\boldsymbol{f}_i] \times \boldsymbol{f}^i) \\ &= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{f}^i)(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{f}_i) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \end{aligned} \tag{9}$$

この結果は、ギブス積に対して 2 つの線形写像からベクトル同士のスカラー積およびベクトル積がギブス積と関係づけられたことになる。

4. 線形変換空間上の演算

(1) 線形変換の演算

$L(E)$ 上の元、すなわち線形変換およびそれらの演算として以下を導入する。

- 恒等変換（2 階テンソル）

$$\boldsymbol{I};\ \boldsymbol{I}[\boldsymbol{u}] := \boldsymbol{u}\ (\forall \boldsymbol{u} \in E) \tag{10}$$

- 随伴変換（2 階テンソル）

$$\boldsymbol{T}^a;\ (\boldsymbol{T}[\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{T}^a[\boldsymbol{v}])\ (\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E) \tag{11}$$

- 合成変換（積）（2 階テンソル）

$$(\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{S});\ (\boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{S})[\boldsymbol{u}] := \boldsymbol{T}[\boldsymbol{S}[\boldsymbol{u}]]\ (\forall \boldsymbol{u} \in E) \tag{12}$$

- スカラー積（０階テンソル）

$$(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S});\ (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S}) := T_r[(\boldsymbol{T}^a \circ \boldsymbol{S})] \tag{13}$$

- ベクトル積（3 階テンソル）

$$(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{S});\ (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{S})[\boldsymbol{u}] := (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{S}[\boldsymbol{u}])\ (\forall \boldsymbol{u} \in E) \tag{14}$$

- ギブス積（4 階テンソル）

$$(\boldsymbol{T} \odot \boldsymbol{S});\ (\boldsymbol{T} \odot \boldsymbol{S})[\boldsymbol{u}] := (\boldsymbol{T} \odot \boldsymbol{S}[\boldsymbol{u}])\ (\forall \boldsymbol{u} \in E) \tag{15}$$

なお、上記のギブス積の定義のほかにスカラー積 (13) を用いた次のような $L(E) \to L(E)$ としての定義も考えられる。

$$(\boldsymbol{T} \odot \boldsymbol{S})[\boldsymbol{U}] := \boldsymbol{T}(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{U})\ (\forall\, \boldsymbol{U} \in L(E)) \tag{16}$$

(2) ギブス積の演算

以上の線形変換とその演算を 2 つのギブス積 $(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{d})$ に対して表現すると次のような結果となる。

- 恒等ギブス積

$$\boldsymbol{I} = (\boldsymbol{f}_i \odot \boldsymbol{f}^i) = (\boldsymbol{f}^i \odot \boldsymbol{f}_i) \tag{17}$$

- 随伴ギブス積

$$(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})^a = (\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{a}) \tag{18}$$

- ギブス積の合成

$$(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}) \circ (\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \tag{19}$$

- スカラー積

$$(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) \tag{20}$$

- ベクトル積

$$(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \odot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \odot \boldsymbol{d}) \tag{21}$$

- ギブス積

$$(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}) \odot (\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \odot (\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{c}) \odot \boldsymbol{d}) \tag{22}$$

Gibbs[2] では式 (19) をダイアドの direct product, 式 (20) を double multiplication, 式 (21) を formal skew production と呼びダイアドの拡張として triad とも呼んでいる。さらに、式 (22) に対する Gibbs による言及はないが、triad の拡張として tetrad となる。なお、2 重乗法 (double multiplication) に関しては次節で議論する。

(3)　2 重乗法 (double multiplication)

前節で線形変換同士のスカラー積に対して、Gibbs はダイアド同士の 2 重乗法と呼んでいることを述べた。Gibbs の講義録 [2] では、2 重乗法に関する演算をベクトル間のスカラー積とベクトル積の組み合わせとして定義し導入している。これらの 2 重乗法は通常のベクトル解析であまり見受けられない。

なお、文献 [6] には Gibbs とは異なる 2 重乗法も示されいるので、2 種類の 2 重乗法（縦 2 重積と横 2 重積）について線形変換の立場から再考することを試みる。

- Gibbs の 2 重乗法（縦 2 重積）

$$(\boldsymbol{ab}) \mathbin{\overset{\cdot}{\cdot}} (\boldsymbol{cd}) := (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) \in \boldsymbol{R} \tag{23}$$

$$(\boldsymbol{ab}) \mathbin{\overset{\cdot}{\times}} (\boldsymbol{cd}) := (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}) \in E \tag{24}$$

$$(\boldsymbol{ab}) \mathbin{\overset{\times}{\cdot}} (\boldsymbol{cd}) := (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) \in E \tag{25}$$

$$(\boldsymbol{ab}) \mathbin{\overset{\times}{\times}} (\boldsymbol{cd}) := (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}) \in L(E) \tag{26}$$

- 横 2 重積

$$(\boldsymbol{ab}) \cdot\cdot\, (\boldsymbol{cd}) := (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{R} \tag{27}$$

$$(\boldsymbol{ab}) \cdot\times (\boldsymbol{cd}) := (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \in E \tag{28}$$

$$(\boldsymbol{ab}) \times\cdot\, (\boldsymbol{cd}) := (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \in E \tag{29}$$

$$(\boldsymbol{ab}) \times\times (\boldsymbol{cd}) := (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \in L(E) \tag{30}$$

これらのダイアド同士の 2 重積をギブス積と 2 つの線形写像を用いて表現することによって、線形変換としての位置づけを与える。

- 縦 2 重積

$$(\boldsymbol{ab}) \mathbin{\overset{\cdot}{\cdot}} (\boldsymbol{cd}) = (\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{d}) \in \boldsymbol{R} \tag{31}$$

$$(\boldsymbol{ab}) \mathbin{\overset{\cdot}{\times}} (\boldsymbol{cd}) = T_v[(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})^a \circ (\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{d})] \in E \tag{32}$$

$$(\boldsymbol{ab}) \mathbin{\overset{\times}{\cdot}} (\boldsymbol{cd}) = T_v[(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}) \circ (\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{d})^a] \in E \tag{33}$$

$$(\boldsymbol{ab}) \mathbin{\overset{\times}{\times}} (\boldsymbol{cd}) = T_v[(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{c})] \odot T_v[(\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{d})] \in L(E) \tag{34}$$

- 横 2 重積

$$(\boldsymbol{ab}) \cdot\cdot\, (\boldsymbol{cd}) = (\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})^a \cdot (\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{d}) \in \boldsymbol{R} \tag{35}$$

$$(\boldsymbol{ab}) \cdot\times (\boldsymbol{cd}) = T_v[(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})^a \circ (\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{d})^a] \in E \tag{36}$$

$$(\boldsymbol{ab}) \times\cdot\, (\boldsymbol{cd}) = T_v[(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}) \circ (\boldsymbol{c} \odot \boldsymbol{d})] \in E \tag{37}$$

$$(\boldsymbol{ab}) \times\times (\boldsymbol{cd}) = T_v[(\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{d})] \odot T_v[(\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{c})] \in L(E) \tag{38}$$

5.　線形変換とベクトルとの演算

(1)　スカラー積とベクトル積の拡張

すでに第 4 章の線形変換同士およびギブス同士において、本来ベクトル同士の演算であるスカラー積とベクトル積およびギブス積を定義した。その際に、ベクトル積とギブス積の定義には線形変換あるいはギブス積とベクトルとの演算が必要となる。

そこで、本章では異種なる元として線形変換とベクトルおよびギブス積とベクトルに対して、スカラー積とベクトル積に対応する演算を定義する。その演算を従来の演算記号を援用するが、各々ドット積、クロス積と呼ぶことにする。すなわち、ベクトル同士のスカラー積とベクトル積の拡張を考える。

(2)　線形変換とベクトル

線形変換とベクトルに対するスカラー積の拡張としてのドット積を次のように定義する。

定義：　線形変換とベクトルのドット積

線形変換 $\boldsymbol{T}$ とベクトル $\boldsymbol{c}$ に対して、ドット積を次のように定義する。

$$(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{c})[u] := \boldsymbol{T}[\boldsymbol{c}u] = (\boldsymbol{T}[\boldsymbol{c}])u \ \ (\forall u \in \boldsymbol{R}) \tag{39}$$

$$(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{T})[\boldsymbol{u}] := (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{T}[\boldsymbol{u}] = (\boldsymbol{T}^a[\boldsymbol{c}] \cdot \boldsymbol{u}) \ \ (\forall\, \boldsymbol{u} \in E) \tag{40}$$

この定義 (39) より、$(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{c}) \in L(\boldsymbol{R}, E)$ となり、

$$(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{c})[1] = (\boldsymbol{T}[\boldsymbol{c}])1 = \boldsymbol{T}[\boldsymbol{c}] \in E \tag{41}$$

となる。すなわち、$\boldsymbol{T}$ と $\boldsymbol{c}$ のドット積による実数 1 の像が $\boldsymbol{T}$ による $\boldsymbol{c}$ の像と等しくなる。

定義 (40) から、$(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{T}) \in L(E, \boldsymbol{R})$ となり、$(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{T})$ は E の双対空間 E^* の元、すなわち、E 上の線形関数となる。すると、線形関数のスカラー積表現定理 [7] より、

$$(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{T})_V = \boldsymbol{T}^a[\boldsymbol{c}] \in E \tag{42}$$

となる。すなわち、線形関数 $(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{T})$ のベクトル表現が $\boldsymbol{T}$ の adjoint による $\boldsymbol{c}$ の像と等しくなる。

次に、線形変換とベクトルのベクトル積の拡張としてのクロス積を次のように定義する。

定義：　線形変換とベクトルのドット積

線形変換 $\boldsymbol{T}$ とベクトル $\boldsymbol{c}$ に対して、クロス積を任意のベクトル $\boldsymbol{u} \in E$ を用いて次のように定義する。

$$(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{c})[\boldsymbol{u}] := \boldsymbol{T}[(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{u})] \tag{43}$$

$$(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{T})[\boldsymbol{u}] := (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{T}[\boldsymbol{u}]) \tag{44}$$

この定義から、線形変換とベクトルのクロス積はともに E 上の線形変換であることがわかる。すなわち、$(\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{c}), (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{T}) \in L(E)$。

(3)　ギブス積とベクトル

線形変換の代わりにギブス積を対象とした場合のドット積とクロス積の表現を以下に示す。

- ドット積

$$\begin{aligned}((\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c})[u] &= (\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})[\boldsymbol{c}u] = ((\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})[\boldsymbol{c}])u \\ &= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})u \in E \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}))[\boldsymbol{u}] &= (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}) \\ &= ((\boldsymbol{b} \odot \boldsymbol{a})[\boldsymbol{c}] \cdot \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{R} \end{aligned} \tag{46}$$

- クロス積

$$
\begin{aligned}
((\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c})[\boldsymbol{u}] &= (\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})[\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{u}] \\
&= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{u})) = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{b}] \\
&= \boldsymbol{a}((\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{u}) \\
&= (\boldsymbol{a} \odot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}))[\boldsymbol{u}] \in E \quad (47) \\
(\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}))[\boldsymbol{u}] &= (\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b})[\boldsymbol{u}]) \\
&= (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}) \\
&= ((\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \odot \boldsymbol{b})[\boldsymbol{u}] \quad (48)
\end{aligned}
$$

ただし、[ ] は、次のようなベクトル 3 重積を表す記号である。

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,] &:= ((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}) \\
&= [\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}]
\end{aligned}
$$

これらの結果から Gibbs が導入したダイアドとベクトルとの演算がここで定義したギブス積とベクトルとの演算に対して次のような対応がつけられることとなる。

$$((\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c})[1] = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \quad (49)$$

$$(\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}))_V = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) \quad (50)$$

$$((\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \odot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \quad (51)$$

$$(\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \odot \boldsymbol{b}) = ((\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \odot \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} \quad (52)$$

6. おわりに

Gibbs によって定義され導入されたダイアドとそれに関連した様々な演算が E 上の線形変換という立場から捉えなおすことができた。そのことによって、テンソルがギブス積を用いることでベクトル表現できることになった。さらに、従来のベクトル同士の演算として導入されたスカラー積とベクトル積を異種の線形空間の元の間の演算として、ドット積とクロス積に拡張することもできた。ダイアドの概念を線形変換であるギブス積と捉えることは、従来のベクトル代数を包含したテンソル代数に展開することにおける重要な役割を果たしていることを明らかにした。

参考文献

[1] 志賀浩二: ベクトル解析 30 講，朝倉書店，1989.
[2] Gibbs, J.W. and Wilson, E.B. : Vector Analysis: A Text-Book for the Use of Students of Mathematics and Physics: Yale University Press, 1901.
[3] Truesdell, C. and W. Noll : The Non-Linear Field Theories of Mechanics (in Encyclopedia of Physics, Vol. III/3), Springer-Verlag, 1965.
[4] 徳岡辰夫（杉山勝編）: 有理連続体力学の基礎, 共立出版, 1999.
[5] 登坂宣好: ベクトル・テンソル解析再考, 計算工学講演論文集, Vol. 28, 2023.
[6] 棚橋隆彦: 連続体の力学 (5) -ベクトル演算と物理成分-, 理工図書, 1988.
[7] 新井朝雄: 現代ベクトル解析の原理と応用, 共立出版, 2006.