

# 流体-構造連成問題における 完全オイラー型トポロジー最適化手法

A fully Eulerian topology optimization method for fluid-structure interaction problems

勝又稜平<sup>1)</sup>西口浩司<sup>2)3)</sup>千場大也<sup>4)</sup>加藤準治<sup>5)</sup>

Ryohei Katsumata, Koji Nishiguchi, Hiroya Hoshiba, and Junji Kato

<sup>1)</sup>名古屋大学 大学院工学研究科

(〒 464-8603 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: katsumata.ryohei.a3@s.mail.nagoya-u.ac.jp)

<sup>2)</sup>博(工) 名古屋大学 大学院工学研究科 准教授

(〒 464-8603 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: kojinishiguchi.r9@f.mail.nagoya-u.ac.jp)

<sup>3)</sup>博(工) 理化学研究所 計算科学研究中心 AI for Science プラットフォーム部門 上級研究員

(〒 103-0027 東京都中央区日本橋 1-4-1 日本橋一丁目三井ビルディング 15 階)

<sup>4)</sup>博(工) 名古屋大学 大学院工学研究科 助教

(〒 464-8603 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: hoshiba.hiroya.y6@f.mail.nagoya-u.ac.jp)

<sup>5)</sup>Dr.-Ing. 名古屋大学 大学院工学研究科 教授

(〒 464-8603 愛知県名古屋市千種区不老町, E-mail: kato.junji.i5@f.mail.nagoya-u.ac.jp)

There are several topology optimization methods for fluid-structure interaction (FSI) problems. However, most of these methods assume a steady state or linear elastic materials, which makes it challenging to apply them to transient problems involving large deformations. This study proposes a topology optimization method for the FSI problem using a fully Eulerian method. The proposed method overcomes the problems of mesh distortion and poor parallel efficiency that occur with the conventional Lagrangian method, achieving robust and efficient topology optimization.

**Key Words :** Topology optimization, Fluid-structure interaction, Eulerian method

## 1. 緒言

流体の流れと固体の移動・変形が相互に影響を及ぼす連成現象は、工学分野において重要な研究対象である。例えば、生体工学では心臓や血管の収縮による血流の制御、航空工学では空気抵抗を受ける翼の変形、土木工学では風の影響を受ける建築物の応答などが挙げられる。

流体-構造連成 (fluid-structure interaction; FSI) 問題の中には、強い非定常性や固体の大変形を伴うもののが存在する。例えば、人工心臓の設計では拍動に伴う非定常流れと柔軟素材の大変形が発生し、魚型水中ロボットでは遊泳による流れの非定常性と人工筋肉の大変形が相互作用する。これらの設計においては、流体と固体の相互作用を正確に評価し、最適な形状を決定することが求められる。その手法の一つとして、数理的理論に基づくトポロジー最適化があり、近年 FSI 問題への適用が進められている。

Yoon[1] は、密度法を用いた FSI トポロジー最適化を提案し、流体を定常非圧縮性 Navier-Stokes 方程式、固体を線形弾性体としてモデル化した。さらに、最大応力制約を考慮した手法[2] や、非定常 Navier-Stokes 方程式を用いた FSI トポロジー最適化[3] を提案している。しかし、既存の研究では固体を線形弾性体とし、微小変形を仮定しているため、大変形の影響が考慮されていない。

FSI トポロジー最適化では、一般にラグランジュ型有限要素法が用いられるが、大変形問題においてはメッシュ破綻が生じやすく、再生成が必要となる。また、形状適合メッシュのデータ構造が複雑であり、高い並列化効率の確保が困難である。一方、完全オイラー型解法は直交メッシュを用いるため、メッシュ破綻の問題が発生せず、大変形問題への適用が容易である。加えて、データ構造が簡素であり、高い並列化効率を実現しやすく、非定常・三次元問題にも対応可能である。

Nishiguchi ら[4] は、完全オイラー型の FSI 解法を提案し、超並列環境における計算効率を検証している。Shimada ら[5] は、ラグランジュマーカー粒子を用いた完全オイラー型 FSI 解法を提案し、固体の移動・変形の精度向上を図っている。

本研究では、完全オイラー型を用いた FSI トポロジー最適化手法を提案する。Nishiguchi ら[4] の用いている支配方程式をベースに FSI トポロジー最適化の定式化を行い、連続随伴法による感度解析を適用する。支配方程式および随伴方程式は、ビルディング・キューブ法に基づくセル中心有限体積法により離散化する。

## 2. 支配方程式

本研究では、Nishiguchi ら[4] の用いた支配方程式をベースとする。Nishiguchi ら[4] は、以下の支配方程式を用いて、流体-固体の連成問題をオイラー記述で統一

的に定式化している。

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \phi = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{b} + \mathbf{b} (\nabla \mathbf{v})^\top \quad (4)$$

ここで、 $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  は流体および固体の質量密度、速度、および Cauchy 応力テンソルをそれぞれ固体体積率  $\phi$  によって空間平均化・混合化したものである。 $\mathbf{f}$  は外力、 $\mathbf{b}$  は左 Cauchy-Green 変形テンソルである。式(1)は運動方程式、式(2)は連続の式、式(3)は固体体積率の移流方程式、式(4)は左 Cauchy-Green 変形テンソルの時間発展方程式を表している。Cauchy 応力テンソルの空間平均化・混合化に用いる流体応力  $\boldsymbol{\sigma}_f$  および固体応力  $\boldsymbol{\sigma}_s$  は、それぞれ式(5)(6)で与えられる。

$$\boldsymbol{\sigma}_f = \mu \left[ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\top \right] - p \mathbf{I} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = G \left[ \mathbf{b} - \frac{1}{3} (\text{tr} \mathbf{b}) \mathbf{I} \right] + \mu \left[ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\top \right] - p \mathbf{I} \quad (6)$$

ここで、 $\mu$  は粘性係数、 $p$  は圧力、 $G$  はせん断弾性係数、 $\mathbf{I}$  は単位テンソルである。本研究では、これらの支配方程式をベースに FSI トポロジー最適化を定式化し、解析的感度を導出する。

### 3. 最適化問題設定

本研究では、流体流れ中にある固体の剛性最大化問題 [1][3] を想定し、トポロジー最適化問題を以下のように設定する。

$$\min_{\gamma(\mathbf{x})} \quad J = \int_0^T \int_{\Omega} A(\gamma, \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}, p, \phi, \mathbf{b}) d\Omega dt, \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{f}, \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \phi = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{b} = (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{b} + \mathbf{b} (\nabla \mathbf{v})^\top, \quad (11)$$

$$G(\gamma) = \frac{1}{V_0} \int_{\Omega_D} \gamma d\Omega \leq \theta, \quad (12)$$

$$0 \leq \gamma \leq 1, \quad (13)$$

$$\text{where, } A = \frac{E}{6} (\text{tr} \mathbf{b} - 3) \phi \quad (14)$$

$$\rho = \rho(\phi) \quad (15)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\phi) \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}'(\nabla \mathbf{v}, \phi, \mathbf{b}) \quad (17)$$

ここで、 $J$  は目的関数、 $G$  は体積制約関数、 $V_0 = \int_{\Omega_D} d\Omega$  は設計領域の体積、 $\theta$  は固体の許容体積分率である。この最適化問題において、設計変数は固体体積率の初期

値として取り扱う。すなわち、以下の初期条件を課す。

$$\phi(0) = \gamma \quad (18)$$

### 4. 感度解析

目的関数の勾配（感度）を計算するため、本研究では連続随伴法によって感度解析を行う。一般に、目的関数  $J$  は設計変数や状態変数の汎関数であるが、設計変数と状態変数の関係が偏微分方程式によって陰関数表記で表されるため、解析的に感度を求めることが困難である。また、多数の設計変数を有するトポロジー最適化では計算量が膨大となるため、有限差分によって数値的に感度を計算することも困難である。そこで、随伴変数法に基づく以下の手続きによって、感度を求める式を解析的に導出する。まず、随伴変数  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\tilde{p}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t)$  を導入し、上述の目的関数  $J$  および支配方程式の残差を用いてラグランジュ関数  $L$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} L(\gamma, \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}, p, \phi, \mathbf{b}) &= \int_0^T \int_{\Omega} A(\gamma, \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}, p, \phi, \mathbf{b}) d\Omega dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{f} \right] \cdot \tilde{\mathbf{v}} d\Omega dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \tilde{p} d\Omega dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \phi \right] \tilde{\phi} d\Omega dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{b} - (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{b} - \mathbf{b} (\nabla \mathbf{v})^\top \right] : \tilde{\mathbf{b}} d\Omega dt \end{aligned} \quad (19)$$

状態変数が支配方程式を満足している場合、任意の随伴変数に対して式(19)の右辺第2-5項はゼロとなり、ラグランジュ関数  $L$  は目的関数  $J$  と一致する。そこで、以降は目的関数  $J$  をラグランジュ関数  $L$  に置き換えた上で感度を求める。

設計変数の微小変動  $\delta \gamma$  に対するラグランジュ関数  $L$  の変動（Gâteaux 微分）は、各状態変数の設計変数に対する依存性を考慮すると、次のように表される。

$$\begin{aligned} \delta L &[ \delta \gamma, \delta \mathbf{v}_\gamma[\delta \gamma], \delta p_\gamma[\delta \gamma], \delta \phi_\gamma[\delta \gamma], \delta \mathbf{b}_\gamma[\delta \gamma] ] \\ &= \delta L_\gamma[\delta \gamma] + \delta L_\mathbf{v}[\delta \mathbf{v}_\gamma[\delta \gamma]] + \delta L_p[\delta p_\gamma[\delta \gamma]] \\ &\quad + \delta L_\phi[\delta \phi_\gamma[\delta \gamma]] + \delta L_\mathbf{b}[\delta \mathbf{b}_\gamma[\delta \gamma]] \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)の右辺第2-5項は解析的・数値的に求めることが困難であるため、初期条件・境界条件を満足する状態変数の任意変動に対して、これらの項がゼロとなるような随伴変数  $\tilde{\mathbf{v}}$ ,  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{\phi}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}$  を求める。この随伴問題を解くことで得られる随伴変数を用いて、式(20)の右辺第1項を計算することで感度が求まる。

### 5. 数値計算手法

本論文におけるトポロジー最適化のアルゴリズムを、図-1 および以下に示す。

1. 設計領域内の設計変数を初期化する。

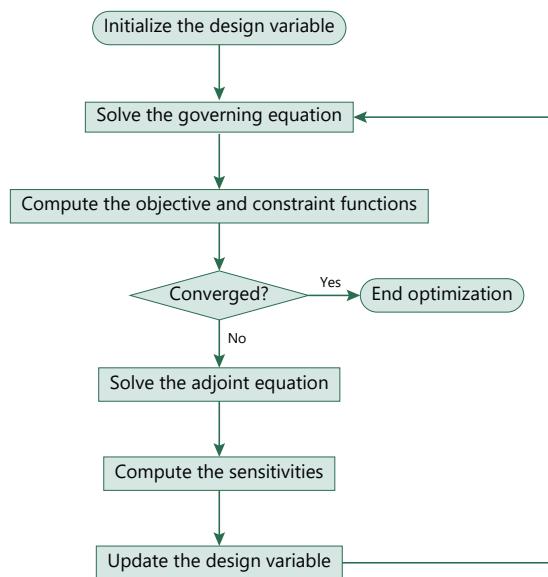


図-1 トポロジー最適化フローチャート。

2. 完全オイラー型解法を用いて、支配方程式を解く。
3. 目的関数値および制約関数値を計算する。
4. 最適化が収束した場合、終了する。そうでない場合は継続する。
5. 完全オイラー型解法を用いて、随伴方程式を解く。
6. 目的関数および制約関数の感度を計算する。
7. 勾配法に基づいて設計変数を更新し、次の最適化ステップへ進む。

本論文では、データ構造が簡素なセル中心有限体積法を用いて空間方向に離散化を行う。すなわち、速度  $\mathbf{v}$ 、圧力  $p$ 、固体体積率  $\phi$ 、左 Cauchy-Green 変形テンソル  $\mathbf{b}$ 、および設計変数  $\gamma$  はすべてセル中心において定義するコロケート配置法を用いる。式(1)–(4)の各項は、2次精度アダムズバッシュフォース法を用いて時間離散化する。

随伴方程式についても、支配方程式と同様、セル中心有限体積法および2次精度アダムズバッシュフォース法を用いて離散化する。なお、随伴方程式における初期条件にあたる式は、最終時刻における条件式となる。そのため、随伴方程式は時間に関して逆方向に解いていく必要がある点に注意が必要である。

また、本研究では大規模並列計算に適したビルディング・キューブ法 (building cube method; BCM) に基づくセル中心有限体積法により支配方程式を離散化し、超並列計算機を使用して計算を行う。BCM は階層型直行メッシュ法の一種であり、計算領域は「キューブ」と呼ばれる立方体領域に分割され、各キューブは等間隔で同数のセルにさらに分割される。並列計算の際、各計算コアには同数のキューブが割り当てられ、各キューブ内で空間ループ処理が実行される。これにより、各コア

は同数のセルを分担することになるため、各コアの計算不可が均一となる。さらに、簡素なデータ構造により、メモリアクセスが局所的かつ連続的になりやすい。このような計算負荷の均一化やメモリアクセスの局所化・連続化により、BCM では高い並列化効率を得ることが可能である。また、BCM は各セルのコネクティビティ情報が不要なため、メッシュデータのファイルサイズやメモリ使用量が抑えられるという特長がある。

設計変数の更新には、逐次凸関数近似法の一種である移動漸近法 (The method of moving asymptotes; MMA) を用いている。MMA は、目的関数と制約関数を1次近似して凸最適化問題に置き換えてから、双対問題を利用して最適解を探索する数理計画法の一種である。多数の設計変数と少数の制約条件を有する非線形最適化問題であるトポロジー最適化と相性が良く、多くの先行研究において用いられている。

## 6. 結言

本研究では、完全オイラー型を用いた FSI トポロジー最適化手法を提案した。トポロジー最適化における数值計算手法の詳細や数値計算例については、講演会の当日に紹介予定である。

**謝辞:** 本研究は、HPCI システム利用研究課題（課題番号：hp240296、課題代表者：西口浩司）を通じて、理化学研究所が提供するスーパーコンピュータ「富岳」の計算資源の提供を受け、実施した。また、本研究は JSPS 科研費 24K14968 の助成を受けた。

## 参考文献

- [1] Yoon, G.H.: Topology optimization for stationary fluid-structure interaction problems using a new monolithic formulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.82, pp.591–616, 2010.
- [2] Yoon, G.H.: Stress-based topology optimization method for steady-state fluid-structure interaction problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.278, pp.499–523, 2014.
- [3] Yoon, G.H.: A new monolithic design approach for topology optimization for transient fluid-structure interaction system, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.403, p.115729, 2023.
- [4] Nishiguchi, K., Bale, R., Okazawa, S., Tsubokura, M.: Full Eulerian deformable solid-fluid interaction scheme based on building-cube method for large-scale parallel computing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.117, pp.221–248, 2019.
- [5] Shimada, T., Nishiguchi, K., Bale, R., Okazawa, S., Tsubokura, M.: Eulerian finite volume formulation using Lagrangian marker particles for incompressible fluid-structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.123, pp.1294–1328, 2022.