計算工学講演会論文集 Vol. 30 (2025 年 6 月) 日本計算工学会

拡張型有限要素法に基づく 並列構造解析の静的負荷分散

Static Load Balancing of Parallel Structural Analysis with Extended Finite Element Method

吉井観太 1) 三目直登 2) 森田直樹 3)
Kanta Yoshii, Naoto Mitsume, Naoki Morita

1)学 (工) 筑波大学 システム情報工学研究群 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, Email: s2110458@u.tsukuba.ac.jp)
2)博 (工) 筑波大学 システム情報工学研究群 助教 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, Email: mitsume@kz.tsukuba.ac.jp)
3)博 (環境) 筑波大学 システム情報工学研究群 助教 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, Email: nmorita@kz.tsukuba.ac.jp)

Extended finite element method (XFEM) is a technique that can express discontinuous physical quantity distributions with high precision by assigning enrichment functions to specific nodes, and is used in crack propagation analysis. In the XFEM, the computational load differs for each element and node due to the use of enrichment functions, so when the conventional domain decomposition method is applied to parallel computing, the computational load becomes uneven, and the performance of the parallel computing decreases. In this study, we apply a domain decomposition method that takes into account the differences in computational load for each element in the XFFEM. We apply the proposed method to several circular-hole models in infinite plate with different degrees of freedom and measure the parallel computing performance with the conventional method.

Key Words : *Extended Finite Element Method, Parallel Computation, Domain Decomposition, Load Balancing, Graph Structure*

1. 序論

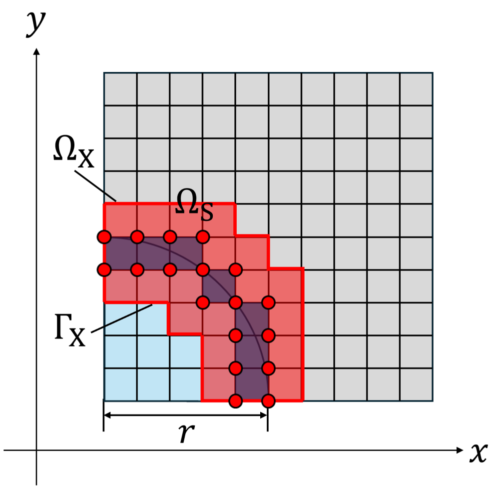
現在、鉱物資源などの需要増大に伴い世界的に海上輸送量が増加している。それにより、環境規制や経済性の観点から船舶の大型化が進んでいる。特にコンテナ船は大型化の傾向が顕著である。コンテナ船には高強度の厚手鋼板が使用される。厚手鋼板の使用に際しては耐脆性破壊特性の低下による安全性の問題に十分な配慮の必要性 [1] や、脆性亀裂の発生防止や脆性亀裂が生じた際の伝播防止について十分な安全性を確保する必要性 [2] が指摘されている。しかし、船体の構造部材に生じる亀裂現象には、船体内部の応力や外部荷重など様々な要素が関与するため、亀裂現象をモデル化して実験することは難しい。そのため有限要素法 (Finite Element Method:FEM)[3] によるシミュレーションで亀裂を再現・評価する試みがなされてきた。亀裂を精度よく表現できる有限要素法の一つに拡張型有限要素法 (Extended Finite Element Method:XFEM)[4,5] がある。拡張型有限要素法は特定の節点にエンリッチメント関数を付与することで、不連続な物理量分布を高精度に表現できる手法であり、亀裂進展 [6] や断層破壊 [7]、地下水流 [8] の解析などに広く利用されている。

拡張型有限要素法による解析を 3 次元に拡張すると、湾曲した亀裂前縁形状の詳細な表現の必要性から要素数が増加し、計算量が大きい大規模問題となる。このような大規模問題を実用上効率よく解くためには、複数の計算機を用いた並列計算の実施が重要になる。

並列計算では解析対象の領域を分割し、各計算機が分割領域ごとに解析を行い、その結果を統合処理することで解析を進める。そのため、分割された領域の計算負荷に偏りがあると、特定の計算機の処理が終了するまで待機時間が発生し、解析全体の所用時間が増加する。したがって、各領域の計算負荷が均等になるよう制御する負荷分散が重要となる。

従来の領域分割手法では要素ごとの計算量が均一であるという仮定のもと、各分割領域における節点数が均一になるように領域を分割する。有限要素法では要素ごとの計算量が均一であるため、従来の領域分割手法を用いることで適切な負荷分散が可能である。しかし、拡張型有限要素法ではエンリッチメント関数を付与した節点を含む要素において、剛性行列生成のための積分の計算負荷が増加する。また、エンリッチメント関数を付与した節点で計算量が増加する。これらの理由から要素ごとの計算負荷が不均一となる。そのため、従来の領域分割手法を拡張型有限要素法に適用すると、各領域の計算負荷に偏りが生じ、並列計算性能が著しく低下する問題が生じる。この問題を解決するためには拡張型有限要素法の特性に適した領域分割手法が必要である。

本研究の最終的な目的は、亀裂進展解析を想定した拡張型有限要素法シミュレータの動的負荷分散機能の開発である。そのためには、拡張型有限要素法において各分割領域の計算負荷が均一となるような領域分割手法の開発や、実用的な高い並列計算性能を持つ動的負荷分散機能の構築が必要である。本論文ではこれら



図–1　拡張型有限要素法を用いた無限円孔平板解析概要

を実現する上での基礎的検討として、線形弾性体を対象とした拡張型有限要素法の静的負荷分散手法の提案とその並列計算性能の評価を研究目的とする。提案手法では、解析対象のメッシュデータをグラフ構造に変換し、各節点に計算時間に相当する重みを付与しておく。そのうえで各領域内の節点が持つ重みの和が均一となるよう領域を分割する。この提案手法と従来手法の並列性能を評価し提案手法の有用性を確認する。

2.　拡張型有限要素法

拡張型有限要素法は、Belytschko ら [4] および Moes ら [5] によって提案された手法である。本手法は不連続な物理量分布を含む要素の節点に、エンリッチメント関数とよばれる不連続関数を用いた追加の物理量を付与することで、その物理量分布を高精度に表現できる。そのため、本手法は構造物内の亀裂先端に生じる応力特異場の解析や、亀裂先端の進展経路の解析などに広く応用されている。本論文では、拡張型有限要素法における全体領域を Ω^{S} と表す。また、エンリッチメント関数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ が付与された節点をエンリッチ節点、エンリッチ節点を含む要素をエンリッチ要素、エンリッチ要素により構成される領域をエンリッチ領域と呼ぶ。エンリッチ領域は Ω^{X} と表す。さらに Ω^{X} の境界を Γ_{X} と定義する。

物理量の上付き文字 S はその物理量が Ω^{S} で定義されることを示し、上付き文字 X はその物理量が Ω^{X} で定義される追加の物理量であることを示す。

拡張型有限要素法を用いた無限円孔平板解析の概要を図–1 に示す。赤枠で囲われた領域はエンリッチ領域、赤丸はエンリッチ節点を表す。

本研究では、エンリッチメント関数として、式 (1) に示すヘヴィサイド関数を用いる。ここで、r は円孔半径である。

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (|\boldsymbol{x}| \geq r) \\ -1 & (|\boldsymbol{x}| < r) \end{cases} \tag{1}$$

エンリッチ節点は追加の物理量を持つ。例えばエンリッチ節点以外の節点は変位 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{S}} = \{d_x^{\mathrm{S}}, d_y^{\mathrm{S}}\}^{\mathrm{T}}$ のみを持つが、エンリッチ節点はそれに加えて、変位 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{X}} = \{d_x^{\mathrm{X}}, d_y^{\mathrm{X}}\}^{\mathrm{T}}$ を持つ。

要素内の変位 u^{S}、u^{X} は、アインシュタインの総和記号を用いてそれぞれ式 (2)、式 (3) と表せる。ただし、$\boldsymbol{N}$ は形状関数、下付き文字の i は要素内の節点番号を表す。

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{S}} = \boldsymbol{N}_i^{\mathrm{S}} \boldsymbol{d}_i^{\mathrm{S}} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{X}} = \boldsymbol{H}(x) \boldsymbol{N}_i^{\mathrm{X}} \boldsymbol{d}_i^{\mathrm{X}} \tag{3}$$

以下では拡張型有限要素法で解く方程式を説明する。エンリッチ領域では式 (4) に示すように変位 $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}^{\mathrm{S}}$ と $\boldsymbol{u}^{\mathrm{X}}$ の和で表される。

$$\boldsymbol{u} = \begin{cases} \boldsymbol{u}^{\mathrm{S}} & \text{in } \Omega^{\mathrm{S}} \setminus \Omega^{\mathrm{X}}, \\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{S}} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{X}} & \text{in } \Omega^{\mathrm{X}} \end{cases} \tag{4}$$

また、Γ_{X} 上で連続性を保証するために式 (5) に示すディリクレ境界条件を与える。

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{X}} = \delta \boldsymbol{u}^{\mathrm{X}} = \boldsymbol{0} \text{ on } \Gamma^{\mathrm{X}} \tag{5}$$

式 (4) と式 (5) に示す条件のもと、通常の有限要素法と同様に離散化すると、構造解析において解くべき連立一次方程式 (6) を得る。ここで $\boldsymbol{K}$ は全体剛性マトリックス、$\boldsymbol{f}$ は外力ベクトルであり、上付き文字 SX,XS はエンリッチ要素とそれ以外の要素の連成項に関する変数であることを示す。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}^{\mathrm{S}} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{SX}} \\ \boldsymbol{K}^{\mathrm{XS}} & \boldsymbol{K}^{\mathrm{X}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}^{\mathrm{S}} \\ \boldsymbol{d}^{\mathrm{X}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}^{\mathrm{S}} \\ \boldsymbol{f}^{\mathrm{X}} \end{Bmatrix} \tag{6}$$

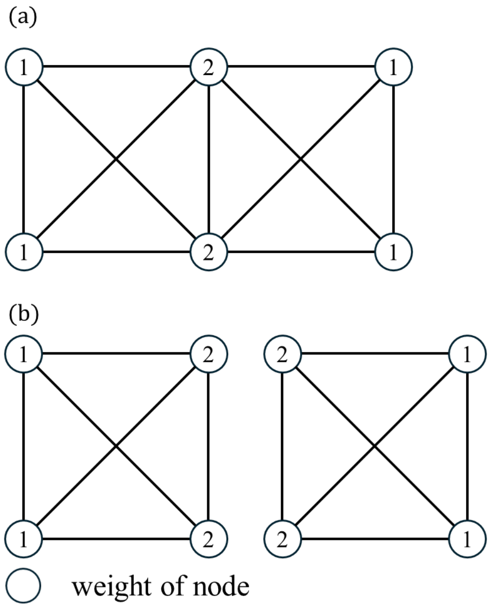
また、式 (6) における $\boldsymbol{K}^{\mathrm{SX}}$ は式 (7) のように表される。

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{SX}} = \int_{\Omega^{\mathrm{S}}} \boldsymbol{B}^{\mathrm{S}^{\mathrm{T}}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}^{\mathrm{X}} \mathrm{d}\Omega \tag{7}$$

ここで、$\boldsymbol{D}$ は平面応力状態の弾性剛性マトリックス、$\boldsymbol{B}$ は節点変位とひずみを関係づけるマトリックス、Ω は解析領域である。式 (7) は通常解析的に求められないため、数値積分を用いて値を算出する。エンリッチ要素内では、式 (7) の被積分関数のうち、$\boldsymbol{B}^{\mathrm{X}}$ が不連続となり、数値積分の精度が低下する。そのため、本研究では、エンリッチ要素の積分領域を細分化して数値積分を行う。要素の積分領域細分化数を制御するパラメータを n_{div} とおく。n_{div} は要素一辺あたりの積分領域分割数である。ここで、エンリッチ要素とそれ以外の要素では一要素当たりの積分点数が異なるため、要素ごとに計算負荷の偏りが生じる。

3.　領域分割法

本研究が対象とする亀裂進展解析は、亀裂形状を詳細に表現するために多数の要素が必要となる。その結果、計算負荷が増加し、計算時間やメモリ容量の観点から実用上 1 台の計算機で解くことが困難となる。そこで、分散メモリ型並列計算機を適用して解析を行う



図–2　グラフデータとグラフ分割

ことが重要となる。分散メモリ型並列計算機とは、各プロセッサがネットワークで接続されており、通信を行う場合を除き、それぞれのプロセッサが自身のメモリ領域にのみアクセスできる計算機である。並列計算を実施するためには解析データを分割して各プロセッサに割り当てる必要がある。

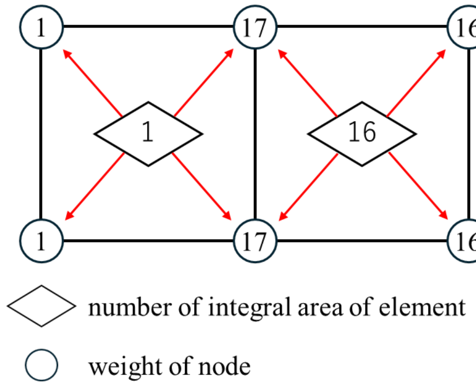
データを分割して割り当てる有効な手法の 1 つに領域分割法がある。領域分割法とは、解析領域や境界条件などのメッシュデータを複数に分割し、領域ごとに解析を行った後、統合処理によって領域全体の解を求める手法である [9]。領域分割法は大きくノンオーバラッピング型領域分割とオーバラッピング型領域分割法に分けられる。本研究で扱う有限要素法の範囲ではどちらの領域分割法も適用できるが、異なる数値解析手法への展開を考慮し、本研究ではオーバラッピング型領域分割を用いた並列計算を拡張型有限要素法に適用する。

また、本研究では、グラフ構造に基づく領域分割を行う。グラフは図–2(a) に示すように、ノードの集合と、ノード同士をつなぐエッジを用いて表される。ノードとエッジはそれぞれ解析領域における節点と節点間の結びつきを表しており、各ノードには重みを付与することができる。また、本研究では全体剛性マトリックスの非零構造からグラフを取得する。グラフ構造に基づく領域分割では、図–2(b) に示すように、分割領域に含まれるノードの重みが均一になるようグラフを分割し、その結果に基づいて領域分割を行う。本研究では領域分割のための並列データ分割ライブラリとして、METIS[10] を用いる。

4.　提案手法:拡張型有限要素法の静的負荷分散

要素あたりの計算負荷の偏りを考慮するため、要素の積分領域数を利用してグラフのノードに重みを付与する手法を提案する。提案手法の手順を以下に示す。

1. 全体剛性マトリックスの非零構造に相当するグラフを作成
2. 各要素の積分領域数を、要素を構成する節点に対応するノードへ加算 (図–3)
3. 各領域に含まれるノードの重みの総和が均一になること、グラフのカットが最小になることを制約条件としてグラフ分割
4. 分割グラフをもとにメッシュデータを分割
5. 分割されたメッシュデータをもとに並列有限要素解析を実施



図–3　要素の積分領域数を対応するノードに振り分ける概略図

5.　数値例:無限円孔平板の引張問題による検討

本章では拡張型有限要素法を用いた無限円孔平板引張問題に対し、従来手法および提案手法を適用した際の並列計算性能を測定する。その後、従来の領域分割法と提案手法である静的負荷分散の並列計算性能を比較し、提案手法の有効性を検討する。

(1)　解析モデルと解析条件

図–4 に示す円孔平板の 1/4 モデルの拡張型有限要素法を用いた弾性解析を対象とし、並列計算性能の評価を行う。赤四角で囲まれた部分が実際に解析を行う領域であり、赤い要素はエンリッチ要素である。本解析では $n_{\mathrm{div}} = 200$ とした。これは計算時間に占める剛性行列生成時間の影響が大きいことを意味する。境界条件として対象面の法線方向変位を固定し、橙四角部の節点に変位の理論解を付与する。また、解析モデルは四角形一次要素を用いてメッシュを分割した。ここで、解析モデルは 3 種類用意した。表–1 に各モデルの概要を示す。各モデル名の数値は、モデル全体の自由度の千の位の値を四捨五入したものである。モデルの材料定数は表–2 に示す。解析では、線形ソルバとして共役勾配法 (CG 法) を用いる。前処理や収束判定閾値は表–3 に示す通りである。また、性能測定には表–4 に示す計算機を利用した。

(2)　評価方法

本研究では、従来手法と提案手法の並列計算性能を評価・比較するため、スケーリングテストを実施した。並列性能を評価する指標として加速率 (Speed-up factor)S_n を用いる。加速率とは、並列数 n および n 並列時の実

表–1　各モデルの概要

モデル	節点数	要素数	自由度数
4 万自由度モデル	20,164	19,881	41,228
7 万自由度モデル	33,124	32,761	67,408
8 万自由度モデル	40,804	40,401	82,884

表–2　無限円孔平板モデルの材料定数

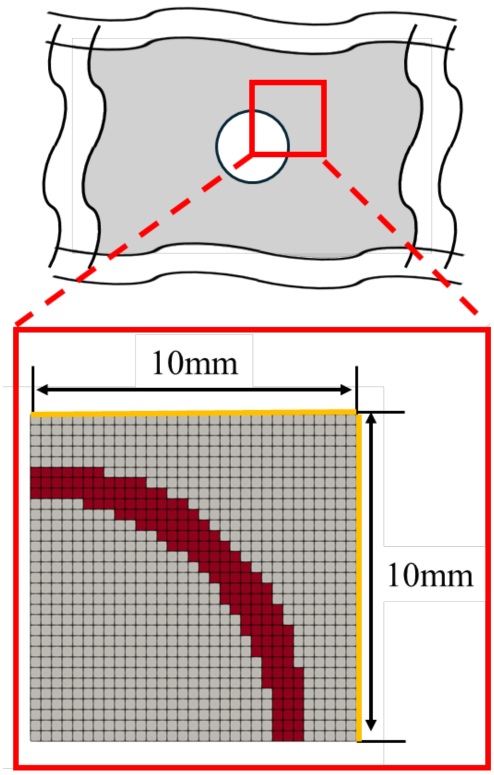
ヤング率 E[GPa]	2.0
ポアソン比 ν	0.30

表–3　線形ソルバの条件

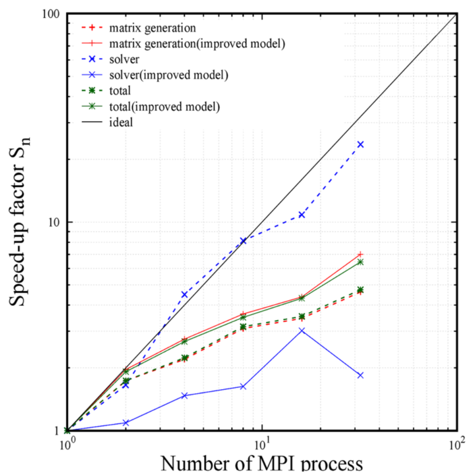
線形ソルバ	CG 法
前処理	対角スケーリング
収束判定閾値	1.0×10^{-8}
最大反復回数	10,000

表–4　並列計算機の構成

型式	SYS-6029U-E1CR4
CPU	Intel Xeon Gold 6248 (20C/40T 2.5GHz) x2
MEM	768GB (32 GB DDR4-3200 x 24)
HDD	14 TB x 12 (RAID 6)



図–4　解析モデル (円孔平板)



図–5　従来手法と提案手法の加速率 (4 万自由度モデル)

行時間 T_n を用いて式 (8) のように定義される。この指標は、n 並列時に逐次実行時間 (T_1) に対して何倍に高速化したのかを示す。

$$S_n = \frac{T_1}{T_n} \tag{8}$$

本研究では、スケーリングテストを 3 回実施し、各回の解析時間の平均をとった平均解析時間を用いて評価を行った。

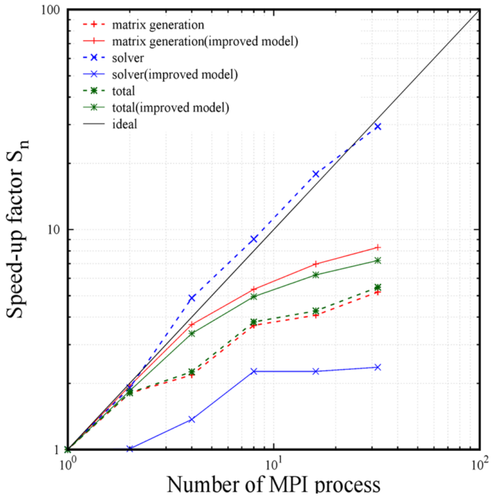
(3)　計測結果:提案手法の負荷分散性能評価

本項では円孔平板モデルに対して従来手法および提案手法が MPI 並列数と加速率の関係に与える影響を検討する。そのため、各モデルに対し従来手法および提案手法を適用し、並列数を 1、2、4、6、16、32 と変化させながら強スケーリングテストを実施した。各モデルに対する計測結果を整理したグラフを図–5∼ 図–7 に示す。グラフの縦軸は加速率、横軸は MPI プロセス数を示す。

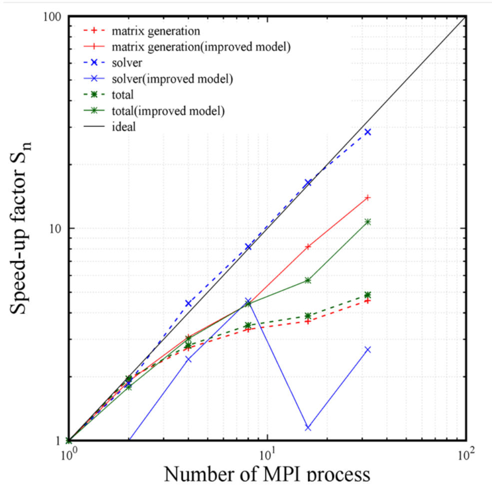
また、各凡例について、ideal は理想的な加速率、matrix generation は従来手法適用時の剛性行列生成における加速率、solver は従来手法適用時の行列求解における加速率、total は従来手法適用時の解析全体における加速率、(improved model) と記載のある場合は提案手法の加速率を示す。

図–5∼ 図–7 より、従来手法と提案手法を比較すると、剛性行列生成時間加速率は、8 万自由度モデルの 2 並列時を除き、提案手法の方が大きいことが読み取れる。この結果は、提案手法により剛性行列生成時間の偏りを考慮した領域分割が行われたためと考えられる。行列求解時間加速率は、すべての場合において従来手法の方が大きいことが読み取れる。この結果は、提案手法は行列求解時間を考慮しないため、分割領域ごとに行列求解の計算負荷に偏りが生じたためと考えられる。合計時間加速率は、8 万自由度モデルの 2 並列時を除き、提案手法の方が大きいことが確認できる。とくに 8 万自由度モデルの 32 並列時には、提案手法が従来手法と比較して約 55%の計算時間を削減した。以上の結果から、提案手法を適用することで、拡張型有限要素法の適切な負荷分散が実現されたと考えられる。

また、8 万自由度モデルの 2 並列時において、提案手法の剛性行列生成時間加速率や合計時間加速率が従来



図–6 従来手法と提案手法の加速率の関係 (7 万自由度モデル)



図–7 従来手法と提案手法の加速率の関係 (8 万自由度モデル)

手法に劣った理由は、各領域の節点数のばらつきが大きく、データ通信などの時間が増加したためと考えられる。

6. 結論

本研究では拡張型有限要素法に対して、各要素の積分領域細分化数をもとに節点重みを付与し、適切な負荷分散を実現する領域分割手法を提案した。提案手法と従来手法をそれぞれ円孔平板モデルに適用して解析を行い、各手法の並列計算性能を評価した。その上で、提案手法の有効性を考察した。得られた知見を以下に示す。

- 従来手法を用いて並列化した拡張型有限要素法では、要素ごとの積分領域数の違いに起因する、剛性行列生成における計算負荷の偏りが生じ、並列計算性能が低下することが分かった。
- 要素剛性行列生成における計算負荷の偏りを考慮して領域を分割する提案手法を用いて拡張型有限要素法を並列化すると、従来手法に比べて高い並列計算性能が実現したことから、提案手法の有効性が確認できた。

謝辞: 本研究は、JST 創発的研究支援事業 JPMJFR215S および JSPS 科研費 22H00242, 23K16891、学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点 (JHPCN) jh240017 の支援を受けたものである。ここに記して謝意を表する。

参考文献

[1] 白幡浩幸, 大川鉄平, 中島清孝, 柳田和寿, 井上健裕, 稲見彰則, 石田浩司, 皆川昌紀, 船津裕二. 脆性亀裂アレスト靭性に優れた大型コンテナ船用極厚 YP460N/mm2 級鋼. 新日鉄住友技報第 400 号, pp.26-30, 2014.

[2] 山口欣也, 北田博重, 矢島浩, 廣田一博, 白木原浩. 超大型コンテナ船の開発-新しい高強度極厚鋼板の実用-. 日本船舶海洋工学会誌 KANRIN(3),pp.70-76, 2005.

[3] Thomas J.R.H. The Finite Element Method. prentice-Hall inc, 1987.

[4] Belytschko.T.,Black.T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing . International Journal for Numerical Methods in Engineering , Vol.45,pp.602-620, 1999.

[5] Moes.N., Dolbow.J.,Belytschko.T. A finite element method for crack growth without remeshing. International Journal for Numerical Methods in Engineering , Vol.46,pp.131-150, 1999.

[6] 澤田 有弘. X-FEM(extended finite element method) の基礎と応用. 日本流体力学会誌ながれ第 32 巻, pp.221-225, 2013.

[7] 和田一範, 後藤浩之. 拡張型有限要素法 (X-FEM) を用いた自発的な断層破壊の数値解析手 法の開発. 応用力学論文集,Vol.13,pp.667-674, 2010.

[8] 櫻井 英行, 山田 俊子. 拡張有限要素法による 3 次元地下水浸透流解析システムの開発. 土木学会論文集 C,Vol.66,pp.684-694, 2010.

[9] 荻野 正雄, 塩谷隆二, 金山寛, 田上大助, 吉村忍. バランシング領域分割法による並列弾性 有限要素解析. 日本機械学会論文集 A 編 69 巻 685 号 ,pp.36-43,2003.

[10] Karypis.G.,Kumar.V. A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregula.r graphs. SIAM Journal on Scientific Computing,No.20(1),pp.359-392,1998.