

B-spline 重合メッシュ法を用いた 非圧縮性粘性流体解析手法の開発と評価

Development and Validation of B-spline S-version of Finite Element Method
for Incompressible Flow Analysis

馬込望¹⁾ 森田直樹²⁾ 金子栄樹³⁾ 三目直登⁴⁾

Nozomi Magome, Naoki Morita, Shigeki Kaneko and Naoto Mitsume

¹⁾筑波大学 システム情報工学研究群 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail:
magome.nozomi.sw@alumni.tsukuba.ac.jp)

²⁾博(環境) 筑波大学 システム情報系 助教 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail: nmorita@kz.tsukuba.ac.jp)

³⁾博(工) 名古屋工業大学大学院工学研究科 助教 (〒 466-0061 愛知県名古屋市昭和区御器所町, E-mail:
kaneko.shigeki@nitech.ac.jp)

⁴⁾博(工) 筑波大学 システム情報系 助教 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail: mitsume@kz.tsukuba.ac.jp)

The s-version of the finite element method is a discretization technique that superimposes multiple meshes with different resolutions. The authors have previously proposed a B-spline-based s-version method that improves the accuracy of numerical integration and the convergence for solving linear equations. In this study, the method is extended to incompressible viscous flow analysis, demonstrating that localized high-accuracy computation can also be achieved in fluid simulations. The performance of the method was validated through several test cases using a three-dimensional fluid solver.

Key Words : S-version of finite element method, Mesh superposition method, B-spline basis functions, Localized mesh refinement, Fluid analysis

1. 序論

流れ場に対する数値解析は、広範な科学・工学分野において基盤的手法である。中でも、複雑境界が流体挙動に及ぼす影響を高精度かつ効率的、かつ数値的に安定な手法で解析することは極めて重要である。このような要請に対し、非常に柔軟に基底関数および計算メッシュを構築できる有限要素法(FEM: finite element method)は、特に有効な手法の一つとして広く用いられている。有限要素法において境界を扱うスキームは、界面追跡型と界面捕捉型に大別される。界面追跡型スキームでは、Arbitrary Lagrangian-Eulerian(ALE)法[1]やdeforming-spatial-domain/stabilized space-time (DSD/SST)[2]のように、流体領域のメッシュを境界形状に適合させて変形させることで、界面を明示的に追跡する手法が用いられる。界面を追跡するように流体メッシュを変形させ、領域全体にわたってメッシュの解像度を制御することで、工学的に重要な境界層付近において高精度な解を得ることが可能となる[3,4]。一方で、生成・維持するメッシュが非常に複雑になりうるため、高度かつ計算コストの高いメッシュ生成・制御技術を要する場合や、数値的な不安定性を示す場合がある。こうした課題を克服するために、界面捕捉型スキームが用いられることが多い。この手法では、界面と独立に定義された Euler 型の固定メッシュ上において、外部から与えられた境界条件を通じて流れ場を表現する。代表的な手法として、Peskin による immersed boundary 法[5]や拡張有限要素法(XFEM: extended FEM)[6]、有限被覆法

(FCM: finite cover method)[7]などが挙げられる。これらは、メッシュ生成・制御の簡便さや複雑境界に対する数値的安定性の観点から、複雑な形状や大きな境界変動を伴う多様な応用に適している。一方で、界面捕捉型スキームでは、メッシュの解像度を局所的に柔軟に制御することが依然として困難であるという課題が残る。このような局所高解像の困難さを克服するため、本研究では、重合メッシュ法(SFEM: s-version of finite element method)[8]に着目する。

重合メッシュ法は、有限要素法の枠組みにおいて解像度の異なる複数のメッシュを任意に重ねることで対象を離散化し、局所高解像と低計算コストを両立する手法である。解析領域全体はグローバルメッシュと呼ばれる粗いメッシュで表現され、局所的な特徴を持つ領域にはローカルメッシュと呼ばれる詳細なメッシュが重ねられ、解は重ね合わされたメッシュの和で表現される。また、ローカルメッシュはグローバルメッシュとは独立して任意の局所領域に挿入することができるため、複雑なメッシュ生成・分割手順を回避することができ、メッシングの簡便さも実現できる。これらの利点故に、重合メッシュ法はこれまで積層複合材料の応力解析[9]~[12]や亀裂解析[13]~[16]など多様な構造力学問題に応用してきた。一方で、従来の重合メッシュ法は、数値積分精度[8,13,14]と行列計算における収束性[8,10,15,17]に課題があった。これら課題の根本的な解決のため、これまで著者らは B-spline 基底関数と Lagrange 基底関数の両方を導入した B-spline 重合メ

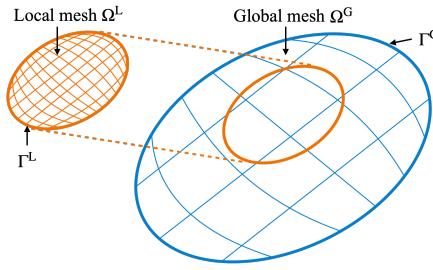


図-1 Global and local meshes defined in SFEM.

シュ法を提案し、高精度化および収束性の大幅な向上を達成してきた。詳細については文献[18,19]を参照されたい。

前述のとおり、本研究は、流体解析における Euler 型の界面捕捉メッシュに対し、重合メッシュ法を基盤に、任意の局所領域にローカルメッシュを重ねることで、局所高精度化の実現を試みる。本発表はその第一歩として、これまでに著者らが構築してきた B-spline 重合メッシュ法を流体解析へと理論的に拡張するものである。これは著者らの知る限り重合メッシュ法フレームワークを流体解析へと応用した初の試みである。本研究では、3 次元非圧縮性粘性流体問題を対象とし、典型的な解析例を用いてその精度を検証し、重合メッシュ法の流体問題への適用性について検討する。

2. B-spline 重合メッシュ法

本章では、重合メッシュ法について概説した後、筆者らが過去研究において提案してきた B-spline 重合メッシュ法について述べる。B-spline 重合メッシュ法の詳細については、文献[18,19]を参照されたい。

重合メッシュ法は、図-1 のように解像度の異なる複数のメッシュを重ねて対象を離散化する手法である。本論文では 2 枚のメッシュを用いて離散化する。解析対象領域 Ω に対し、領域全体（グローバル領域 Ω^G ）を粗く離散化するメッシュをグローバルメッシュ、局所領域（ローカル領域 Ω^L ）を精緻に離散化するメッシュをローカルメッシュと呼ぶ。重合メッシュ法において、物理空間上の関数解 $\phi(x)$ は式(1)で表される。

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \begin{cases} \phi^G(x) & \text{in } \Omega^G \setminus \Omega^L \\ \phi^G(x) + \phi^L(x) & \text{in } \Omega^L \end{cases} \\ \phi^G(x) &\simeq \sum_i N_i^G(x) \phi_i^G, \quad \phi^L(x) \simeq \sum_j N_j^L(x) \phi_j^L \end{aligned} \quad (1)$$

$\phi^G(x)$ および $\phi^L(x)$ はそれぞれグローバルメッシュ、ローカルメッシュにおける関数解であり、グローバルメッシュとローカルメッシュが重なるローカル領域 Ω^L での解は、グローバルメッシュにおける関数解と、ローカルメッシュにおける関数解の和で表現される。また、各メッシュの関数解はそれぞれ有限要素基底関数により離散化され、各メッシュの基底関数はそれぞれ独立に定義される。グローバル領域 Ω^G の境界 Γ^G には、解析領域 Ω に課される境界条件と同一の境界条件を課す。また、ローカル領域 Ω^L の境界 Γ^L に対しては Γ^L 上での関数解 $\phi(x)$ の連続性を保証するため、式(2)で表さ

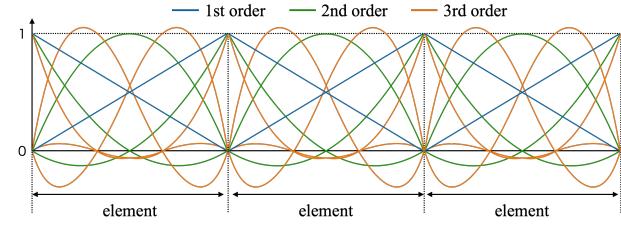


図-2 Linear, quadratic, and cubic Lagrange basis functions.

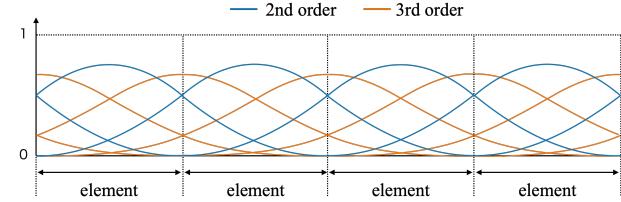


図-3 Quadratic and cubic B-spline basis functions for uniform knot vectors.

れる Dirichlet 境界条件を課す。

$$\phi^L(x) = 0 \quad \text{on } \Gamma^L \quad (2)$$

対象とする支配方程式が線形である場合、式(1), (2)を、支配方程式の重み付き残差方程式に代入することで、解くべき連立一次方程式(3)が導出される。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{GG} & \mathbf{K}^{GL} \\ \mathbf{K}^{LG} & \mathbf{K}^{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^G \\ \phi^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^G \\ f^L \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(3)において、上付き文字 G, L はそれぞれグローバルメッシュ、ローカルメッシュに関連することを示す。行列 $\mathbf{K}^{GG}, \mathbf{K}^{LL}$ はそれぞれグローバルメッシュおよびローカルメッシュで定義される従来の有限要素法の係数行列と同一である。一方、行列 $\mathbf{K}^{GL}, \mathbf{K}^{LG}$ は 2 つのメッシュの相互作用を表し、被積分関数には $N^G(x)$ と $N^L(x)$ の両方が含まれる。

筆者らが過去研究[18,19]において提案してきた B-spline 重合メッシュ法では、グローバルメッシュに B-spline 基底関数を適用し、ローカルメッシュに Lagrange 基底関数を適用する。以下では、Lagrange 基底関数および B-spline 基底関数について概説する。

まず、Lagrange 基底関数を概説する。図-2 に 1 次、2 次、3 次の Lagrange 基底関数の一例を示している。1 次元の正規要素 $\tilde{\Omega}^e$ における Lagrange 補間関数は式(4)で与えられる。

$$l_i^p(\xi) = \prod_{j=1, j \neq i}^{p+1} \frac{\hat{\xi} - \hat{\xi}_j}{\hat{\xi}_i - \hat{\xi}_j} \quad (4)$$

ここで、 $i = 1, 2, \dots, p+1$ は要素内基底番号、 p は関数の次数、 $\hat{\xi}$ は正規要素座標、 $\hat{\xi}_i$ は節点 i の正規要素座標である。また、要素内の節点数は $p+1$ 個であり、正規要素 $\tilde{\Omega}^e$ の区間が $[-1, 1]$ で定義されることから $-1 = \hat{\xi}_1 \leq \hat{\xi}_2 \dots \leq \hat{\xi}_{p+1} = 1$ となる。 p 次の Lagrange 基底関数は、 p 次の Lagrange 補間関数 l_i^p から構成される。

次に、B-spline 基底関数について説明する。図-3 に、ノット幅が一様なノットベクトルで定義される 2 次お

より3次のB-spline基底関数を示している。B-spline基底関数はノットベクトルによって定義される。1次元のノットベクトル Ξ は式(5)で表されるように、パラメータ空間における座標の非減少な集合である。

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_k}\}^T \quad (5)$$

このとき、 $\xi_i \in \mathbb{R}$ は*i*番目のノット、 n_k はノットベクトル中のノットの数であり $n_k = n_c + p + 1$ と表される。 p はB-spline基底関数の次数、 n_c はB-spline基底関数の数である。与えられたノットベクトルに対して、B-spline基底関数は0次の区分定数で始まる漸化式として定義される。区分定数の関数の定義を式(6)に示す。

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (6)$$

次数 $p = 1, 2, 3, \dots$ において、パラメトリック区間 $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ で定義される p 次B-spline基底関数 $N_{i,p}(\xi)$ は、Cox-de Boorの漸化式(7)で表される。

$$\begin{aligned} N_{i,p}(\xi) &= \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) \\ &+ \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \end{aligned} \quad (7)$$

B-spline基底関数の一階微分値は式(8)で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) &= \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) \\ &- \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \end{aligned} \quad (8)$$

要素は相異なるノットの区間として定義される。B-spline基底関数を用いる有限要素法も、古典的な有限要素法と同様にアイソパラメトリック構造が適用可能であり、幾何形状も未知数同様にB-spline基底関数の線形結合で表現される。幾何形状を離散化した結果得られる計算点はコントロールポイントと呼ばれるが、多くの場合コントロールポイントは幾何形状の表面には存在しない。そこで本研究では、コントロールポイント座標を求めるために、Otoguro et al. [20]のメッシュ生成手法を採用した。なお、いずれの基底関数においても、多次元パラメトリック基底関数は、1次元パラメトリック基底関数のテンソル積として定義される。また、本研究ではオープンノットベクトルを採用しており、B-spline基底関数は区間の両端で補間特性を満たす。一方で、B-spline基底関数は内部のノットでは補間特性を満たさないため、本研究ではDirichlet境界に属するコントロールポイント値を定数として、Dirichlet境界条件を課す。一般に、 p 次B-spline基底関数は、内部ノット ξ_i で定義される要素境界で $p - m_i$ 次の連続性を持つ。 m_i はノット ξ_i におけるノットの多重度である。本研究では、すべての内部要素境界において C^{p-1} 連続となるよう、全ての内部ノットにおいて多重度を1とする。従来型重合メッシュ法の数値積分における課題は、グローバル基底関数の要素境界における連続性の低さが原因であった。したがって、3次以上のB-spline基底関数をグローバル基

底関数に適用することで、基底関数とその一階微分値が要素境界で連続かつ滑らかとなり、数値積分精度の向上が実現された[19]。また、従来型重合メッシュ法のもう一つの課題であった、各メッシュの基底関数の線形独立性の喪失は、グローバルメッシュとローカルメッシュの両方にLagrange基底関数を適用するために生じる問題である。そこでB-spline重合メッシュ法では、グローバル基底関数にB-spline基底関数を、ローカル基底関数にLagrange基底関数を適用することで、基底関数同士の線形独立性を保ち上記問題を回避した[19]。グローバルメッシュが構造格子であるという前提を明記。なお、本研究は、構造格子を用いた界面捕捉型の手法において局所高解像を実現するための基礎的検討の位置づけであり、グローバルメッシュは構造格子であることを前提とする。

3. B-spline重合メッシュ法の流体問題への適用

流体の空間領域を、時刻 $t \in (0, T)$ において Γ の境界を持つ $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ とする。非圧縮性粘性流体の支配方程式は以下に示すNavier-Stokes方程式と連続の式となる。

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Omega \quad \forall t \in (0, T) \quad (9a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{on } \Omega \quad \forall t \in (0, T) \quad (9b)$$

ここで、 ρ 、 \mathbf{u} 、 \mathbf{f} はそれぞれ密度、流速、外力であり、 $\boldsymbol{\sigma}$ は次式に示す応力テンソルである。

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = -p \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (11)$$

ここで p は圧力、 μ は粘性係数、 \mathbf{I} は単位テンソル、 $\boldsymbol{\epsilon}$ はひずみ速度テンソルである。DirichletおよびNeumann境界条件は次で表される。

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma_g \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{h} \quad \text{on } \Gamma_h \quad (13)$$

ここで、流速と圧力の無限次元の試行関数空間を \mathcal{S}_u と \mathcal{S}_p とし次のように定義する。

$$\mathcal{S}_u = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u}(\cdot, t) \in (H^1(\Omega))^3, \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ on } \Gamma_g\} \quad (14)$$

$$\mathcal{S}_p = \{p \mid p(\cdot) \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p \, d\Omega = 0 \text{ if } \Gamma = \Gamma_g\} \quad (15)$$

\mathcal{S}_u と \mathcal{S}_p に合わせて、Navier-Stokes方程式と連続の式を表す重み関数空間を \mathcal{V}_u と \mathcal{V}_p とし以下のように定義する。

$$\mathcal{V}_u = \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w}(\cdot) \in (H^1(\Omega))^3, \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_g\} \quad (16)$$

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{S}_p. \quad (17)$$

これらの方程式に対して重み付き残差法を適用し、流体における移流項による不安定性と非圧縮条件の過拘束による不安定性を回避するために、Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin(SUPG)安定化[21]とPressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin(PSPG)安定化[22]手法を導

入すると、次式(18)が導かれる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_h} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ & + \sum_e \int_{\Omega_e} \tau_{\text{SUPG}} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}, p) d\Omega \\ & + \sum_e \int_{\Omega_e} \tau_{\text{PSPG}} \left(\frac{\nabla q}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}, p) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ここで \mathbf{r}_M は Navier-Stokes 方程式の残差であり式(19)のように表される。

$$\mathbf{r}_M(\mathbf{u}, p) = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \quad (19)$$

なお本論文では、 $\tau_{\text{SUPS}} = \tau_{\text{SUPG}} = \tau_{\text{PSPG}}$ とし、以下の安定化パラメータを用いる。ここで h_e は要素サイズであり、 Re を Reynolds 数とする。

$$\tau_{\text{SUPS}} = \left(\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|\mathbf{u}\|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4}{Re(h_e)^2} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (20)$$

式(18)と(19)を変形し次式を得る。

$$\begin{aligned} a_{\Omega}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + b_{\Omega}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, p) + c_{\Omega}(q, \mathbf{u}) + d_{\Omega}(\mathbf{w}, q, \mathbf{u}, p) \\ = L_{\Omega}(\mathbf{w}) + M_{\Omega}(\mathbf{w}, q) \end{aligned} \quad (21)$$

$$a_{\Omega}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) d\Omega \quad (22)$$

$$b_{\Omega}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, p) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) d\Omega \quad (23)$$

$$c_{\Omega}(q, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (24)$$

$$\begin{aligned} d_{\Omega}(\mathbf{w}, q, \mathbf{u}, p) = \sum_e \int_{\Omega_e} \tau_{\text{SUPS}} \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} + \frac{\nabla q}{\rho} \right) \\ \left\{ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (25)$$

$$L_{\Omega}(\mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \rho \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma_h} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma \quad (26)$$

$$M_{\Omega}(\mathbf{w}, q) = \sum_e \int_{\Omega_e} \tau_{\text{SUPS}} \left(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} + \frac{\nabla q}{\rho} \right) (-\rho \mathbf{f}) d\Omega \quad (27)$$

重合メッシュ法において、各物理量は以下のように表せる。

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}^G & \text{in } \Omega^G \setminus \Omega^L, \\ \mathbf{u}^G + \mathbf{u}^L & \text{in } \Omega^L. \end{cases} \quad (28)$$

$$p = \begin{cases} p^G & \text{in } \Omega^G \setminus \Omega^L, \\ p^G + p^L & \text{in } \Omega^L. \end{cases} \quad (29)$$

局所領域境界 Γ^L において、局所領域境界における解の連続性を保証する以下の境界条件を課す。

$$\mathbf{u}^L = \mathbf{0}, \quad p^L = 0 \quad \text{on } \Gamma^L, \quad (30)$$

重み関数も物理量と同様に、グローバルメッシュ上の値とローカルメッシュ上の値の和として定義される。

$$\mathbf{w} = \begin{cases} \mathbf{w}^G & \text{in } \Omega^G \setminus \Omega^L, \\ \mathbf{w}^G + \mathbf{w}^L & \text{in } \Omega^L. \end{cases} \quad (31)$$

$$q = \begin{cases} q^G & \text{in } \Omega^G \setminus \Omega^L, \\ q^G + q^L & \text{in } \Omega^L. \end{cases} \quad (32)$$

これらを式(22)から式(27)に代入し整理すると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} a_{\Omega}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) &= a_{\Omega^G}(\mathbf{w}^G, \mathbf{u}^G) + a_{\Omega^L}(\mathbf{w}^G, \mathbf{u}^L) \\ &+ a_{\Omega^L}(\mathbf{w}^L, \mathbf{u}^G) + a_{\Omega^L}(\mathbf{w}^L, \mathbf{u}^L) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} b_{\Omega}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, p) &= b_{\Omega^G}(\mathbf{w}^G, \mathbf{u}^G, p^G) + b_{\Omega^L}(\mathbf{w}^G, \mathbf{u}^L, p^L) \\ &+ b_{\Omega^L}(\mathbf{w}^L, \mathbf{u}^G, p^G) + b_{\Omega^L}(\mathbf{w}^L, \mathbf{u}^L, p^L) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} c_{\Omega}(q, \mathbf{u}) &= c_{\Omega^G}(q^G, \mathbf{u}^G) + c_{\Omega^L}(q^G, \mathbf{u}^L) \\ &+ c_{\Omega^L}(q^L, \mathbf{u}^G) + c_{\Omega^L}(q^L, \mathbf{u}^L) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} d_{\Omega}(\mathbf{w}, q, \mathbf{u}, p) &= d_{\Omega^G}(\mathbf{w}^G, q^G, \mathbf{u}^G, p^G) \\ &+ d_{\Omega^L}(\mathbf{w}^G, q^G, \mathbf{u}^L, p^L) \\ &+ d_{\Omega^L}(\mathbf{w}^L, q^L, \mathbf{u}^G, p^G) \\ &+ d_{\Omega^L}(\mathbf{w}^L, q^L, \mathbf{u}^L, p^L) \end{aligned} \quad (36)$$

$$L_{\Omega}(\mathbf{w}) = L_{\Omega^G}(\mathbf{w}^G) + L_{\Omega^L}(\mathbf{w}^L) \quad (37)$$

$$M_{\Omega}(\mathbf{w}, q) = M_{\Omega^G}(\mathbf{w}^G, q^G) + M_{\Omega^L}(\mathbf{w}^L, q^L) \quad (38)$$

式(1)のように、試行関数 \mathbf{u}, p および重み関数 \mathbf{w}, q をグローバルメッシュ基底関数 $N_A^G, A \in \eta^G - \eta_D^G$ とローカルメッシュ基底関数 $N_A^L, A \in \eta^L$ により有限要素離散化する。なお η^G, η^L, η_D^G はそれぞれグローバル基底関数のインデックス集合、ローカル基底関数のインデックス集合、グローバル基底関数の内 Dirichlet 境界条件に関する基底関数のインデックス集合であり、 \mathbf{g}^h は Dirichlet 境界条件式(12)を有限要素離散化したものである。

$$\mathbf{u}^G \simeq \sum_{A \in \eta^G - \eta_D^G} N_A^G \mathbf{u}_A^G + \mathbf{g}^h, \quad \mathbf{u}^L \simeq \sum_{A \in \eta^L} N_A^L \mathbf{u}_A^L \quad (39)$$

$$p^G \simeq \sum_{A \in \eta^G - \eta_D^G} N_A^G p_A^G, \quad p^L \simeq \sum_{A \in \eta^L} N_A^L p_A^L \quad (40)$$

$$\mathbf{w}^G \simeq \sum_{A \in \eta^G - \eta_D^G} N_A^G \mathbf{w}_A^G, \quad \mathbf{w}^L \simeq \sum_{A \in \eta^L} N_A^L \mathbf{w}_A^L \quad (41)$$

$$q^G \simeq \sum_{A \in \eta^G - \eta_D^G} N_A^G q_A^G, \quad q^L \simeq \sum_{A \in \eta^L} N_A^L q_A^L \quad (42)$$

これらを式(21)および式(33)から式(38)に代入し整理すると、以下のように式(3)に示される連立一次方程式が得られる。なお、ここでは 1 節点あたりの自由度が 4 (速度 3 成分、圧力 1 成分) のブロック行列を考え、速度成分に対応する単位ベクトル $\mathbf{e}_i, i \in \{0, 1, 2\}$ を

導入する。

$$\mathbf{K}^{GG} = [K_{A,B}^{GG}], \quad (43)$$

$$\begin{aligned} K_{A,B}^{GG} = & a_{\Omega^G} (N_A^G \mathbf{e}_i, N_B^G \mathbf{e}_j) + b_{\Omega^G} (N_A^G \mathbf{e}_i, N_B^G \mathbf{e}_j, N_B^G) \\ & + c_{\Omega^G} (N_A^G, N_B^G \mathbf{e}_j) + d_{\Omega^G} (N_A^G \mathbf{e}_i, N_A^G, N_B^G \mathbf{e}_j, N_B^G) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\mathbf{K}^{GL} = [K_{AB}^{GL}], \quad (45)$$

$$\begin{aligned} K_{AB}^{GL} = & a_{\Omega^L} (N_A^L \mathbf{e}_i, N_B^L \mathbf{e}_j) + b_{\Omega^L} (N_A^L \mathbf{e}_i, N_B^L \mathbf{e}_j, N_B^L) \\ & + c_{\Omega^L} (N_A^L, N_B^L \mathbf{e}_j) + d_{\Omega^L} (N_A^L \mathbf{e}_i, N_A^L, N_B^L \mathbf{e}_j, N_B^L) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\mathbf{K}^{LG} = [K_{AB}^{LG}], \quad (47)$$

$$\begin{aligned} K_{AB}^{LG} = & a_{\Omega^L} (N_A^L \mathbf{e}_i, N_B^G \mathbf{e}_j) + b_{\Omega^L} (N_A^L \mathbf{e}_i, N_B^G \mathbf{e}_j, N_B^G) \\ & + c_{\Omega^L} (N_A^L, N_B^G \mathbf{e}_j) + d_{\Omega^L} (N_A^L \mathbf{e}_i, N_A^L, N_B^G \mathbf{e}_j, N_B^G) \end{aligned} \quad (48)$$

$$\mathbf{K}^{LL} = [K_{AB}^{LL}], \quad (49)$$

$$\begin{aligned} K_{AB}^{LL} = & a_{\Omega^L} (N_A^L \mathbf{e}_i, N_B^L \mathbf{e}_j) + b_{\Omega^L} (N_A^L \mathbf{e}_i, N_B^L \mathbf{e}_j, N_B^L) \\ & + c_{\Omega^L} (N_A^L, N_B^L \mathbf{e}_j) + d_{\Omega^L} (N_A^L \mathbf{e}_i, N_A^L, N_B^L \mathbf{e}_j, N_B^L) \end{aligned} \quad (50)$$

$$\mathbf{f}^G = \{f_A^G\}, \quad (51)$$

$$\begin{aligned} f_A^G = & L_{\Omega^G} (N_A^G \mathbf{e}_i) + M_{\Omega^G} (N_A^G \mathbf{e}_i, N_A^G) \\ & - a_{\Omega^G} (N_A^G \mathbf{e}_i, \mathbf{g}^h) - b_{\Omega^G} (N_A^G \mathbf{e}_i, \mathbf{g}^h, N_B^G) \\ & - c_{\Omega^G} (N_A^G, \mathbf{g}^h) - d_{\Omega^G} (N_A^G \mathbf{e}_i, N_A^G, \mathbf{g}^h, N_B^G) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\mathbf{f}^L = \{f_A^L\}, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} f_A^L = & L_{\Omega^L} (N_A^L \mathbf{e}_i) + M_{\Omega^L} (N_A^L \mathbf{e}_i, N_A^L) \\ & - a_{\Omega^L} (N_A^L \mathbf{e}_i, \mathbf{g}^h) - b_{\Omega^L} (N_A^L \mathbf{e}_i, \mathbf{g}^h, N_B^G) \\ & - c_{\Omega^L} (N_A^L, \mathbf{g}^h) - d_{\Omega^L} (N_A^L \mathbf{e}_i, N_A^L, \mathbf{g}^h, N_B^G) \end{aligned} \quad (54)$$

$$\phi^G = \{\phi_A^G\}, \quad (55)$$

$$\phi^L = \{\phi_A^L\}, \quad (56)$$

式変形の一例は [19] に譲る。なお本研究では、時間方向の離散化に Crank-Nicolson 法、移流速度の線形化に 2 次 Adams-Basforth 法を採用した。

4. 妥当性検証および数値計算例

提案手法を用いた各種計算例は、口頭発表にて紹介する。

5. 結語

本研究では、流体の境界値問題における界面捕捉型アプローチに対し、局所高精度化を実現する方法論を提示するものである。本発表はその最初のステップとして、本アプローチの基盤となる B-spline 重合メッシュ法の流体解析への拡張を行い、重合メッシュ法のフレームワークにより局所的に高精度化可能であることを示した。今後の取り組みとしては、界面での境界条件を扱うための Nitsche 法の導入や、移動境界層を追跡するためのローカルメッシュに対する arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE) スキームの導入を行う。

謝辞: 本研究は、JST 創発的研究支援事業 JP-MJFR215S, JST ACT-X JPMJAX24LG, JSPS 科研費 23H00475, JSPS 科研費 24KJ0499, 学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点 (JHPCN) jh240017 の支援を受けたものである。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- [1] Hirt, C.W., Amsden, A.A. and Cook, J.L., An arbitrary Lagrangian–Eulerian computing method for all flow speeds. *Journal of computational physics*, 14-3 (1974), pp. 227–253.
- [2] Tezduyar, T.E., Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. *Advances in applied mechanics*, 28 (1991), pp. 1–44.
- [3] Takizawa, K., Tezduyar, T.E. and Avsar, R., A low-distortion mesh moving method based on fiber-reinforced hyperelasticity and optimized zero-stress state. *Computational Mechanics*, 65 (2020), pp. 1567–1591.
- [4] Tonon, P., Sanches, R.A.K., Takizawa, K. and Tezduyar, T.E., A linear-elasticity-based mesh moving method with no cycle-to-cycle accumulated distortion. *Computational Mechanics*, 67 (2021), pp. 413–434.
- [5] Peskin, C.S., Flow patterns around heart valves: a numerical method. *Journal of computational physics*, 10-2 (1972), pp. 252–271.
- [6] Wagner, G.J., Moës, N., Liu, W.K. and Belytschko, T., The extended finite element method for rigid particles in Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51-3 (2001), pp. 293–313.
- [7] Terada, K., Asai, M. and Yamagishi, M., Finite cover method for linear and non-linear analyses of heterogeneous solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58-9 (2003), pp. 1321–1346.
- [8] Fish, J., The s-version of the finite element method. *Computers & Structures*, 43-3 (1992), pp. 539–547.
- [9] Reddy, J.N., An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates. *Composite Structures*, 25-1 (1993), pp. 21–35.
- [10] Angioni, S.L., Visrolia, A. and Meo, M., Combining X-FEM and a multilevel mesh superposition method for the analysis of thick composite structures. *Composites Part B: Engineering*, 43-2 (2012), pp. 559–568.
- [11] Chen, X., Li, Z. and Wang, H., Progressive Failure Analysis of an Open-Hole Composite Laminate by Using the S-Version Finite-Element Method. *Mechanics of Composite Materials*, 50-3 (2014), pp. 279–294.
- [12] Jiao, Y. and Fish, J., On the equivalence between the s-method, the XFEM and the ply-by-ply discretization for delamination analyses of laminated composites. *International Journal of Fracture*, 191-1 (2015), pp. 107–129.
- [13] Fish, J. and Markolefas, S., Adaptive s-method for linear elastostatics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 104-3 (1993), pp. 363–396.
- [14] Okada, H., Endoh, S. and Kikuchi, M., On fracture

- analysis using an element overlay technique. *Engineering Fracture Mechanics*, 72-5 (2005), pp. 773–789.
- [15] Fan, R. and Fish, J., The rs-method for material failure simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73-11 (2008), pp. 1607–1623.
- [16] He, T., Mitsume, N., Yasui, F., Morita, N., Fukui, T. and Shibanuma, K., Strategy for accurately and efficiently modelling an internal traction-free boundary based on the s-version finite element method: Problem clarification and solutions verification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 404 (2023), p. 115843.
- [17] Ooya, T., Tanaka, S. and Okada, H., On the linear dependencies of interpolation functions in s-version finite element method. *Journal of Computational Science and Technology*, 3-1 (2009), pp. 124–135.
- [18] 馬込望, 三目直登, B-spline 関数を導入した高精度重合メッシュ法. 日本計算工学会論文集, 2022 (2022), p. 20220015.
- [19] Magome, N., Morita, N., Kaneko, S. and Mitsume, N., Higher-continuity s-version of finite element method with B-spline functions. *Journal of Computational Physics*, 497 (2024), p. 112593.
- [20] Otoguro, Y., Takizawa, K. and Tezduyar, T. E., Space–time VMS computational flow analysis with isogeometric discretization and a general-purpose NURBS mesh generation method. *Computers & Fluids*, 158 (2017), pp. 189–200.
- [21] Brooks, A.N. and Hughes, T.J., Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 32-1-3 (1982), pp. 199–259.
- [22] Hughes, T.J., Franca, L.P. and Balestra, M., A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 59-1 (1986), pp. 85–99.