

# ペナルティ法と陽的自由度消去法を併用した 多点拘束によるアセンブリ構造解析

Assembly Structural Analysis with Multi Points Constraint  
Using Penalty Method and Explicit Elimination Method

中田知寿<sup>1)</sup> 三目直登<sup>2)</sup> 森田直樹<sup>3)</sup>

Tomohisa Nakata, Naoto Mitsume, Naoki Morita

<sup>1)</sup>学(工) 筑波大学 システム情報工学研究群 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail: s2110935@u.tsukuba.ac.jp)

<sup>2)</sup>博(工) 筑波大学 システム情報系 助教 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail: mitsume@kz.tsukuba.ac.jp)

<sup>3)</sup>博(環境) 筑波大学 システム情報系 助教 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail: nmorita@kz.tsukuba.ac.jp)

In structural finite element analysis with multi points constraint, explicit elimination method offers superior convergence of linear solvers and higher accuracy of simulation than penalty method. However, explicit elimination method is limited when the redundant equality constraints are included. In this study, we propose a hybrid approach combining penalty method and explicit elimination method to use in the situation with redundant constraints. We compare the proposed method to penalty method in terms of number of iterations and L2 norm error using 2D models. The result shows that the proposed method is better convergence and higher accuracy than penalty method.

**Key Words** : Finite Element Method, Multi Points Constraint, Penalty Method, Explicit Elimination Method

## 1. 序論

近年、製品を構成する部品数が増え構造が複雑化している。それに伴って、有限要素法 [1] によるアセンブリ構造の解析への需要も高まっている。アセンブリ構造とは複数の部品を組み合わせた構造のことである。有限要素法でアセンブリ構造をモデル化するとき、単一のメッシュで複雑な構造を表現するのは困難な上に、仕様変更される度にメッシュを作り直すのは時間的・経済的なコストがかかる。そこで、個別に生成した各部品のメッシュを拘束することでアセンブリ構造をモデル化し、MPC (Multi Point Constraint) 問題 (多点拘束問題) [2][3] として解くという方法が広く使われている。MPC 問題では、等式制約条件を付与した有限要素方程式を解くことになる。等式制約条件は、拘束面でメイン面の変位分布をレプリカ面で再現すると考え、節点の変位を等式で関係づけた条件である。

MPC 問題の主な解法として陽的自由度消去法 [4] とペナルティ法 [5] がある。陽的自由度消去法はレプリカ自由度以外の自由度を使ってレプリカ自由度を表現することでレプリカ自由度を消去し、解くべき連立一次方程式を変換し等式制約条件を厳密に満たす解を得る解法である。連立一次方程式を変換する過程で係数行列が悪条件化しないため反復法 [6] に適している。有限要素法で詳細な形状を表現しようとする場合、大規模問題になる。大規模問題では線形ソルバに反復法を使うことが前提となる。また、互いに冗長性がある等式制約条件が含まれると計算の過程で必要な行列が不定となり、陽的自由度消去法を使うことができない。ペナルティ法は有限要素方程式にペナルティ項を加えることで拘束する節点間に仮想のばねによる拘束力を加

え、等式制約条件を近似的に満たす解を得るという解法である。ペナルティ法は実装が容易である一方、ペナルティ項によって連立一次方程式の係数行列が反復法に適さない悪条件になってしまう。

等式制約条件を厳密に満たす解を得ることができるので精度が高く、また、係数行列が悪条件化せず反復法に適しているという二点から、MPC 問題の解法として陽的自由度消去法は有用である。しかし、互いに冗長性がある等式制約条件が含まれると、陽的自由度消去法を適用することができない。そこで、本研究では互いに冗長性がある等式制約条件を含んだ MPC 問題において、ペナルティ法と陽的自由度消去法を併用した解法を提案する。2次元アセンブリ構造静解析を対象として提案手法を従来手法のペナルティ法と比較し、性能評価する。

## 2. 有限要素法によるアセンブリ構造静解析

### (1) 等式制約条件

有限要素法におけるアセンブリ構造静解析では式 (1) の有限要素方程式に式 (2) の等式制約条件を付与することで拘束を表現し、アセンブリ構造をモデル化する。

$$Ku = f \quad (1)$$

$$\text{s.t. } Cu = \mathbf{0} \quad (2)$$

ここで  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は全体剛性行列、 $u \in \mathbb{R}^n$  は変位ベクトル、 $f \in \mathbb{R}^n$  は外力ベクトル、 $C \in \mathbb{R}^{n_c \times n}$  は制約条件行列、 $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_c}$  はゼロベクトルである。 $n$  は全自由度数、 $n_c$  は制約条件数である。本研究の等式制約条件はメイン・レプリカ法 (マスター・スレーブ法) の node to node お

よび node to surface のモデル化によって決定される。そして、この問題を MPC 問題という。

## (2) 陽的自由度消去法

陽的自由度消去法はレプリカ自由度以外の自由度を使ってレプリカ自由度を表現することでレプリカ自由度を消去し、解く連立一次方程式を変換し、等式制約条件を厳密に満たす解を得る解法である。

レプリカ自由度数が  $n_c$  であるとき、式 (2) において、変位ベクトル  $u$  をレプリカ自由度成分のベクトル  $u_r \in \mathbb{R}^{n_c}$  とその他の独立な自由度成分のベクトル  $u_p \in \mathbb{R}^{(n-n_c)}$  に分割する。それに合わせて制約条件行列  $C$  も  $C_r \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$  と  $C_p \in \mathbb{R}^{n_c \times (n-n_c)}$  に分割する。

$$\begin{bmatrix} C_r & C_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_p \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3)$$

式 (3) を  $u_r$  について解き、 $u$  に代入すると式 (4) のように表せる。

$$u = \begin{bmatrix} -C_r^{-1}C_p \\ I \end{bmatrix} u_p \quad (4)$$

ここで  $I \in \mathbb{R}^{(n-n_c) \times (n-n_c)}$  は単位行列である。

$T = \begin{bmatrix} -C_r^{-1}C_p \\ I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n-n_c)}$  として、式 (4) を式 (1) に代入し、両辺の左から  $T^T$  をかけることで式 (5) を得る。

$$T^T K T u_p = T^T f \quad (5)$$

さらに  $\tilde{K} = T^T K T$ ,  $\tilde{f} = T^T f$  と定義すると、式 (6) を得る。

$$\tilde{K} u_p = \tilde{f} \quad (6)$$

式 (6) が陽的自由度消去法で解くべき連立一次方程式である。 $\tilde{K}$  および  $\tilde{f}$  は陽的に計算される。

行列の三重積を陽的に計算するときに係数行列の非ゼロ構造が変化するので疎行列格納での実装が煩雑になる。本研究では密行列格納で実装した。互いに冗長性がある等式制約条件が含まれるとき  $C_r^{-1}$  が不定となり、陽的自由度消去法を使うことができない。

## (3) ペナルティ法

ペナルティ法は有限要素方程式にペナルティ項  $\alpha C^T C u$  を加えることで、拘束する節点間に仮想のばねによる拘束力を与え、等式制約条件を近似的に満たす解を得るという解法であり、式 (7) を解くこととなる。

$$(K + \alpha C^T C) u = f \quad (7)$$

ここで  $\alpha$  はペナルティ数である。ペナルティ法は有限要素方程式にペナルティ項を足すだけなので実装が容易である。ペナルティ数を足す部分で係数行列が悪条件化するため、反復法には向かない。また、ペナルティ法は互いに冗長性がある等式制約条件を含んだ場合でも適用することができる。

## 3. ペナルティ法と陽的自由度消去を併用した提案手法

精度と反復法の収束性の観点から、大規模な MPC 問題の解法としてペナルティ法よりも陽的自由度消去法のほうが有用であると言える。しかし、陽的自由度消去法は互いに冗長性がある等式制約条件が含まれる場合、適用することができない。そこで、本研究では互いに冗長性がある等式制約条件にはペナルティ法、互いに冗長性がない等式制約条件には陽的自由度消去法を用いることで、互いに冗長性がある等式制約条件を含んだ MPC 問題に陽的自由度消去法を適用できる解法を提案する。

等式制約条件のうち互いに冗長性がない等式制約条件を式 (8) のように表す。また、互いに冗長性がない等式制約条件数を  $n_{c[E]}$  とする。

$$C_{[E]} u = \begin{bmatrix} C_{[E]r} & C_{[E]p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_p \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (8)$$

ここで  $C_{[E]} \in \mathbb{R}^{n_{c[E]} \times n}$  である。式 (8) を陽的自由度消去法によって付与し、式 (9) のような  $u_p$  の連立一次方程式を得る。

$$\tilde{K} u_p = \tilde{f} \quad (9)$$

等式制約条件のうち互いに冗長性がある等式制約条件を  $u_p$  を使って式 (10) のように表す。

$$C_{[P]} u_p = \mathbf{0} \quad (10)$$

ここで  $C_{[P]} \in \mathbb{R}^{(n_c - n_{c[E]}) \times (n-n_c)}$  である。式 (10) をペナルティ法によって式 (9) に付与し、式 (11) を得る。

$$(\tilde{K} + \alpha C_{[P]}^T C_{[P]}) u_p = \tilde{f} \quad (11)$$

$\tilde{K} + \alpha C_{[P]}^T C_{[P]}$  と  $\tilde{f}$  を陽的に計算し、式 (11) を解くのが提案手法となる。

この解法は冗長性の有無によって等式制約条件を分けることができれば、互いに冗長性がある等式制約条件を含んだ場合でも陽的自由度消去法を用いることが可能である。

## 4. 2次元アセンブリ構造静解析による性能評価

### (1) 解析条件

図-1 のような 3 つの 2 次元平板を拘束し、1 枚の 1.0mm×1.0mm の 2 次元正方形平板となるモデルを解析した。3 部品が接する節点で互いに冗長性がある等式制約条件が発生する。2 次元平板は下の 0.5mm×1.0mm を部品 1、左上の 0.5mm×0.5mm を部品 2、右上の 0.5mm×0.5mm を部品 3 とした。 $x=0$  で  $u_x=0$ 、 $y=0$  で  $u_y=0$  の Dirichlet 境界条件を与え、 $x=1$  で等分布荷重 2N/mm の Neumann 境界条件を与えた。すべての部品でヤング率は 200,000MPa、ポアソン比は 0.3 とした。メッシュは四角形一次要素の正方形になるように設定した。

このモデルにおいてペナルティ法と提案手法を用いて解析を行った。ペナルティ数は (係数行列の最大成分)  $\times 10^5$  とした。理論解と解析で得られた変位の L2 ノ

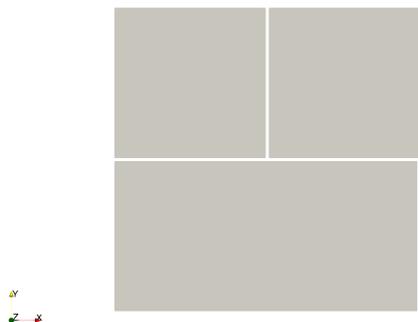


図-1 3 部品のモデル図

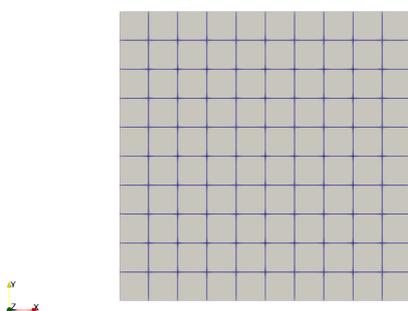


図-2 整合メッシュの例

ルム誤差で精度評価を行った。線形ソルバには前処理を行わない共役勾配法を使用し、反復回数で収束性の評価を行った。共役勾配法の収束判定閾値は初期残差と残差のL2 ノルムの相対残差で  $1.0 \times 10^{-8}$  とした。計算は逐次で行った。

この解析を整合メッシュと不整合メッシュで行った。

## (2) 整合メッシュモデル

図-2のようにメッシュが整合するモデルとして全体の一辺あたりの分割数が10、20、30、40、50、60の場合を用いた。

整合メッシュで解析したL2 ノルム誤差の結果が図-3、共役勾配法の反復回数の結果が図-4である。

図-3から分かるように、整合メッシュで同じメッシュの場合、ペナルティ法よりも提案手法のほうがL2 ノルム誤差が約  $10^{-2}$  小さくなった。陽的自由度消去法を併用していることで、提案手法のほうが等式制約条件を厳密に満たす割合が多いからだと考えられる。図-4から分かるように、整合メッシュの場合ペナルティ法よりも提案手法のほうが反復回数が少なく、要素数が増えるほど反復回数の差は大きくなった。全体の一辺の分割数が60のときが最大でペナルティ法と比べて提案手法は反復回数が34.4%減少した。提案手法のほうがペナルティ数による係数行列の悪条件化の影響が少な

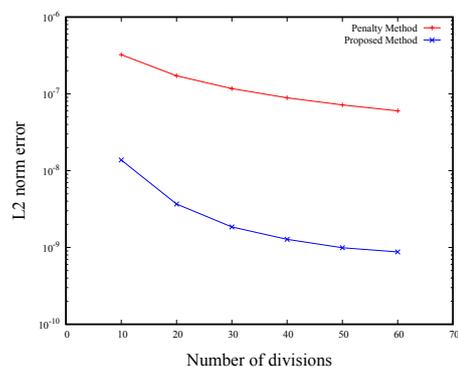


図-3 整合メッシュのL2 ノルム誤差

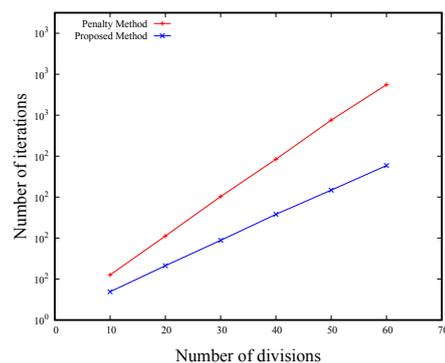


図-4 整合メッシュの共役勾配法の反復回数

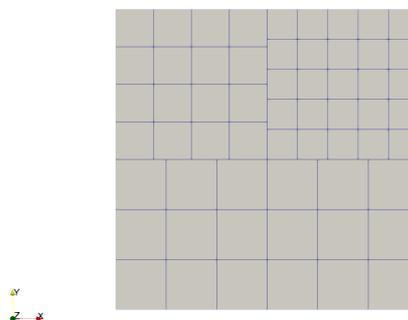


図-5 不整合メッシュの例

いからだと考えられる。

## (3) 不整合メッシュモデル

図-5のようにメッシュが不整合となるモデルとして部品1、部品2、部品3の全体の一辺あたりの分割数がそれぞれ6、8、10の場合とその2、3、4、5、6倍の場合を用いた。

不整合メッシュのL2 ノルム誤差の結果が図-6、共役勾配法の反復回数の結果が図-7である。

図-6から、不整合メッシュでは各手法とも要素数が増えるほどL2 ノルム誤差は減少した。また、各手法で

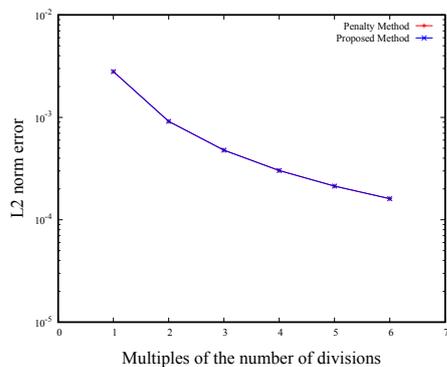


図-6 不整合メッシュの L2 ノルム誤差

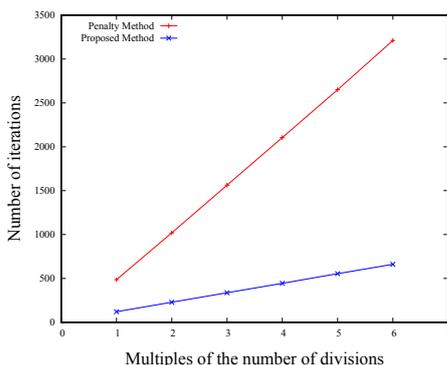


図-7 不整合メッシュの共役勾配法の反復回数

同じメッシュの場合 L2 ノルムは同等となった。MPC 問題の解法の精度よりも node to surface によるモデル化精度のほうが支配的であるからだと考えられる。図-7 から分かるように、不整合メッシュの場合、ペナルティ法よりも提案手法のほうが反復回数が少なく、要素数が増えるほど反復回数の差は大きくなった。6 倍にしたときが最大でペナルティ法と比較して提案手法は反復回数が 79.4 % 減少した。提案手法のほうがペナルティ数による係数行列の悪条件化の影響が少ないからだと考えられる。

## 5. 結論

本論文では、有限要素法による互いに冗長性がある等式制約条件を含んだ 2 次元アセンブリ構造静解析におけるペナルティ法と陽的自由度消去法を併用した手法の性能評価を行った。

整合メッシュではペナルティ法よりも提案手法のほうが精度・収束性ともに優れていることが確認できた。また、不整合メッシュではペナルティ法と提案手法の精度は同等で、収束性はペナルティ法よりも提案手法のほうが優れていることが確認できた。

提案手法を使った 3 次元モデルの解析や疎行列格納を用いた計算および並列計算の実装を今後の展望とする。

謝辞: 本研究は JST 創発的研究支援事業 JPMJFR215S および JSPS 科研費 23K16891 の支援を受けたものである。ここに記して謝意を表す。

## 参考文献

- [1] Thomas J.R.Hughes. : The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. DOVER PUBLICATIONS, INC. 1987.
- [2] Vladislav Yastrebov. : Computational contact mechanics: geometry, detection and numerical techniques. *HAL open science*, pastel-00657305, version1 (06-01-2012).
- [3] Nagi El-Abbasi, Klaus-Jürgen Bathe. : Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm. *Computers & Structures*, vol. 79, pp. 1473-1486, 2001.
- [4] 後藤和哉: 大規模有限要素法接触解析への反復法線形ソルバーの適用に関する研究, 博士論文, 2016.
- [5] P. Wriggers. : Computational Contact Mechanics. Springer, 2nd edition, 2006.
- [6] Yousef Saad. : Iterative Methods for Sparse Linear Systems, second Edition. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2004.