

全体安定性解析を用いた低次元モデルによる 流体力学的不安定性の特定

Detecting hydrodynamic instabilities
from reduced-order model using global stability analysis

中村悠斗¹⁾ 佐藤慎太郎²⁾ 大西直文³⁾
Yuto Nakamura, Shintaro Sato, and Naofumi Ohnishi

¹⁾東北大大学 工学研究科 航空宇宙工学専攻 博士後期課程 2 年
(〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻青葉 6-6-01, E-mail: yuto.nakamura.t4@dc.tohoku.ac.jp)

²⁾東北大大学 工学研究科 航空宇宙工学専攻 助教
³⁾東北大大学 工学研究科 航空宇宙工学専攻 教授

Global stability analysis is a powerful tool to extract modes that can decay or grow from the base flow field. This paper presents a reduced-order model as a surrogate for the computation of global stability analysis. The reduced-order model (ROM) is constructed by projecting the governing equations onto the subspace spanned by the global stability analysis modes. However, when predicting conditions different from those under which the global stability analysis mode is obtained, the ROM fails to predict the growth rates and frequencies of growing or decaying mode. As a strategy to improve the prediction accuracy, we propose an ROM that varies the mode according to the conditions for prediction. Two approaches to varying the mode are considered: one based on subspace interpolation spanned by modes and the other based on operator interpolation. Both approaches demonstrated a significant improvement in the accuracy of ROM predictions.

Key Words : Galerkin Projection, Modal Analysis, Manifold Interpolation, Operator Interpolation

1. 諸言

地球の大気の流れや、海や川の流れなどの自然な流れや、自動車や航空機、風車などの周りの、工学的に重要な流れを知る方法として、数値流体力学 (Computational Fluid Dynamics: CFD) は重要な役割を担っている。多くの場合、これらの流れは、複雑な構造をもつ乱流であったり、さまざまな外乱の影響で時事刻々と変化する過渡的な流れであったりするが、近年の数値計算技術の発達は、このような複雑な流れの高精度な計算を実現しつつある。研究開発の場では、膨大な計算資源を費やして高忠実な結果を求める必要がある場合もあるが、大まかな流れ場を瞬時に求める需要もある。後者の場合、支配方程式を数値的に離散化して解く従来の数値計算モデルに代わり、大幅に次数の少ないモデルを解く低次元モデル (Reduced-Order Model : ROM) [1] が有効である。

ROM はこれまでにさまざまなモデルが提案されている。固有直交分解 (Proper Orthogonal Decomposition : POD) [2] によって得られる POD モードを用いた ROM は、古くから研究されているモデルの 1 つである。POD は流れ場のデータが与えられた際にデータの特徴を最もよく表現するモードを抽出する手法で、特異値分解 (Singular Value Decomposition: SVD) などの名称でも有名である。POD モードを利用することで、データセットを表現するために最適な部分空間を張ることができる。この部分空間上に支配方程式を射影するなどのアプローチにより、高速な予測が可能である [3]。

その他の ROM 構築のアプローチとして、動的モード

分解 (Dynamic Mode Decomposition: DMD) [4] に基づく方法がある。DMD は、データセットの中に含まれる主要な流体構造を、その周波数と成長率に基づいて分解する方法である。DMD は、流れ場がある作用素 (離散的な場合には、行列) によって時間発展するという仮定にもとづいており、力学系のダイナミクスを捉えるのに有効である。DMD で得られるモードは必ず周波数と成長率をもつため、これらの情報で、流れ場の時間変化を記述することができる点で、流れ場の時間変化の予測に有効である。

ROM に求められる性能の 1 つに、データセットと異なる条件の流れ場をいかに正確に予測できるか (ロバスト性) がある。例えば、二次元の円柱周りにおける周期流れに対する、POD を利用した支配方程式の射影に基づく ROM では、POD モードを得たデータセットのレイノルズ数と異なるレイノルズ数の流れ場は、物理的な流れ場とまったく異なる結果を与えることが報告されている [5,6,7]。ロバスト性を高めるアプローチとして、流れを安定化させるモードを基底として追加する方法 [6] や、異なるレイノルズ数同士のモードを補間する方法 [7] などが提案されている。これらのアプローチによって二次元の円柱周り流れのような周期流れは、予測が可能であり、より実用的な流れへの発展が期待される。

自然に存在する、または、工学的に重要な流れの 1 つとして過渡的な成長や減衰を伴うケースがある。例えば、全体安定性解析 (Global Stability Analysis: GSA) [8,9,10] は、特定のベースフローから成長や減衰しうるモードを

抽出する方法として、広く使われている。GSA を利用することで、特定の流れからのモードの成長を捉え、それによって流れ場が別の流れへの過渡的な移行を予測することができる。

過渡的な過程を扱う場合、近年、モードの過渡的な成長過程の再現 [11,12]、或いは、モード間の干渉関係 [10] を調べるために、ROM の有効性が示されている。しかし、これらの過渡的な過程を ROM で扱う研究は、モードと条件の異なる流れを再現するという観点ではなく、モードからその流れの特性を解析する方法を確立することに焦点があり、データと異なる条件を予測するというものではない。本研究では、GSAにおいて、ベースフローからモードが成長または減衰する場合を想定し、ROM を構築する。構築した ROM において、データセットと異なる条件を予測するロバスト性を向上させる ROM アプローチを提案する。これにより、過渡流れにおける ROM のロバスト性を向上させ、ROM を用いた過渡流れの解析を、より実用的なものとすることを目指す。

2. Time-stepping GSA

Time-stepping 法に基づく GSA では、Navier-Stokes 方程式に由来する作用素による時間発展を数値計算によって代替し、GSA モードと固有値を計算する方法である。ここでは、数値計算法の詳細と Time-stepping 法の計算手順を示す。

(1) 支配方程式の数値計算法

支配方程式は非圧縮を仮定し、ベースフロー $\mathbf{u}_\Delta(\mathbf{x})$ 周りに線形化された

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = -(\mathbf{u}_\Delta \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\Delta - \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}, \quad (2)$$

である。ここで、 $\tilde{\mathbf{u}}$ 、 \tilde{p} は、速度、圧力の変動場である。これらの方程式を Le と Moin によって提案された Fractional Step 法 [13] によって数値的に解く。空間の微分は QUICK 法 [14] によって評価する。ただし、実際の計算では、移流速度の符号を適切に評価するため、非線形項を、

$$\begin{aligned} & -(\mathbf{u}_\Delta \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\Delta \\ & = -(\mathbf{u}_\Delta \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} - \{(\mathbf{u}_\Delta + \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla\} \mathbf{u}_\Delta + (\mathbf{u}_\Delta \cdot \nabla) \mathbf{u}_\Delta, \end{aligned} \quad (3)$$

と評価する。数値計算法の詳細や、計算格子は、文献 [10, 15] を参照されたい。

(2) 計算手順

GSA の目的は、ベースフローから線形発達または減衰する空間モード φ_k を抽出することである。すなわち、線形化した Navier-Stokes 方程式による時間発展を表す行列を A とした時、 A の固有値と固有ベクトルを求めることがある。本研究では、この時間発展行列 A を CFD による計算スキームで代替する、Time-stepping 法による GSA [8] を用いる。すなわち、数値計算で得られた時系列データから、固有値と固有ベクトルを数値的に求める。

図-1 に Time-stepping 法による GSA の計算手順を示す。Time-stepping 法では、発達または減衰する固有ベ

クトルを特定するため、ベースフロー $\mathbf{u}_\Delta(\mathbf{x})$ に初期擾乱 $\tilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})$ を付与した流れ場を用意する。初期擾乱は、

$$\tilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) = \{\epsilon_0 |\mathbf{u}_\Delta(\mathbf{x})|\} \frac{\mathbf{r}_0(\mathbf{x})}{|\mathbf{r}_0(\mathbf{x})|}, \quad (4)$$

と計算する。ここで、 $|\cdot|$ はベクトルのノルム、 \mathbf{r}_0 はランダム擾乱、 ϵ_0 は任意の値を設定可能なパラメータであり、ベースフローと擾乱のノルムの比を表す。 ϵ_0 の値やノルムの定義は、対象とする現象に応じて設定する必要がある。

次に $\tilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})$ を初期条件とし、CFD を用いて時間発展を計算する。CFD によって時間進行された ΔT 後の流れ場 $\tilde{\mathbf{u}}'_0(\mathbf{x})$ から、次に CFD に入力する流れ場の変動成分 $\tilde{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x})$ を

$$\tilde{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}) = \{\epsilon_0 |\mathbf{u}_\Delta(\mathbf{x})|\} \frac{\tilde{\mathbf{u}}'_0(\mathbf{x})}{|\tilde{\mathbf{u}}'_0(\mathbf{x})|}, \quad (5)$$

と計算する。すなわち、ノルムが $\epsilon_0 |\mathbf{u}_\Delta(\mathbf{x})|$ と等しくなるように更新される。更新された変動成分を用いて、次に入力する流れ場を $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x})$ と計算し、CFD によって再び時間進行する。このステップを繰り返し行う。

CFD に入力された流れ場 $\tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{x})$ と、 $\tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{x})$ を ΔT だけ時間進行した後の流れ場 $\tilde{\mathbf{u}}'_j(\mathbf{x})$ は、時間発展行列 A によって、

$$\tilde{\mathbf{u}}'_j(\mathbf{x}) = A \tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{x}) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M-1), \quad (6)$$

と関係づけられる。ここで、 M は Time-stepping 法の反復回数である。本研究では、Time-stepping 法で得られた入力と出力の時系列データを N_s 枚目からサンプリングをはじめる。 N_s は、擾乱が流出境界に達するまでの時間より $N_s \Delta T$ が大きくなるように設定した。時系列データを並べた行列をそれぞれ、

$$\begin{aligned} X &= [\tilde{\mathbf{u}}_{N_s}, \tilde{\mathbf{u}}_{N_s+1}, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_{M-1}] \in \mathbb{R}^{N \times M-N_s}, \\ X' &= [\tilde{\mathbf{u}}'_{N_s}, \tilde{\mathbf{u}}'_{N_s}, \dots, \tilde{\mathbf{u}}'_{M-1}] \in \mathbb{R}^{N \times M-N_s}, \end{aligned} \quad (7)$$

とし、これらの行列に DMD を適用し、 A の固有ベクトルと固有値を求める。

(3) DMD による固有ベクトルと固有値の計算

DMD のアルゴリズムはいくつか存在するが、本研究では Exact DMD を用いる。Time-stepping 法で得られた X と X' の行数は、(空間の点数) \times (物理量の次元) ($= N$) であり、非常に膨大であるため、時間発展行列 $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ を直接計算することはできない。そこで、行列 A を低ランク近似した行列 \tilde{A} を扱うことを考える。 \tilde{A} を計算するため、 X を SVD によってランク数 r で、

$$X \xrightarrow{\text{SVD}} U_r \Sigma_r V_r^T, \quad (8)$$

と低ランク近似する。ここで、 $U_r \in \mathbb{R}^{r \times N}$ 、 $V_r \in \mathbb{R}^{M-1 \times r}$ は左、右特異ベクトルをランク数 r で打ち切った行列を表し、 $\Sigma_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ は値の大きい上位 r 個の特異値を対角要素を持つ行列である。また、 T は行列の転置を表す。 X の低ランク近似により、行列 \tilde{A} は

$$\tilde{A} = U_r^T X' V_r \Sigma_r^{-1} \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad (9)$$

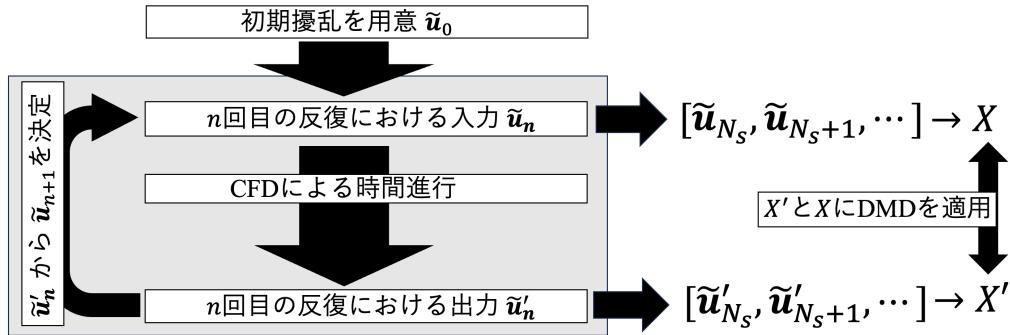


図-1 Computational process of GSA using Time-stepping approach.

と計算できる。ここで、 $A \approx U_r \tilde{A} U_r^T$ である。求める A の固有値 λ_k と固有ベクトル $\varphi_k \in \mathbb{R}^N$ は、 \tilde{A} の固有値 $\tilde{\lambda}_k$ と固有ベクトル $\tilde{\varphi}_k \in \mathbb{R}^r$ を用いて、

$$\varphi_k = U_r \tilde{\varphi}_k, \quad (10)$$

$$\lambda_k = \tilde{\lambda}_k, \quad (11)$$

と計算される。固有ベクトル φ_k は発達または減衰するモードの空間分布を表し、成長率 σ_k と周波数 f_k は、以下のように固有値から計算できる。

$$\sigma_k = \frac{\text{Real}\{\log(\tilde{\lambda}_k)\}}{\Delta t}, \quad (12)$$

$$f_k = \frac{\text{Imag}\{\log(\tilde{\lambda}_k)\}}{\Delta t}. \quad (13)$$

ただし、 $\text{Real}(\cdot)$ と $\text{Imag}(\cdot)$ はそれぞれ複素数の実部と虚部を表す。

3. 支配方程式の Galerkin 射影に基づく POD-ROM

(1) POD

POD の主な目的は流れ場の速度の時系列データ $\tilde{u}(\mathbf{x}, t_j)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) $\in \mathbb{R}^N$ が与えられた場合に、速度の変動成分を最もよく表現するモード $\varphi_k(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^N$ ($k = 1, 2, \dots, r$, $r \ll m$) を見つけることである。すなわち、流れ場の時系列データは、 r 個の POD モード $\varphi_k(\mathbf{x})$ によって以下のように表せる。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}, t_j) \simeq \sum_{k=1}^r a_k(t_j) \varphi_k(\mathbf{x}) \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (14)$$

モードには対応する固有値 λ_k が存在し、固有値の大きさはそのモードが流れ場の特徴をどれだけ捉えているかを表している。POD モードで流れ場を再構築する場合、モードの数 r を設定し、固有値が大きい上位 r 個のモードを用いる。なお、モードを並べた行列 $[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r]$ は、Exact DMD における U_r と等しく、POD における固有値 λ_k は特異値の二乗に等しい。本研究では、GSA における X の SVD (9) の U_r の列要素を Time-stepping GSA から得られる POD モードとして扱う。

(2) Galerkin 射影

本研究では支配方程式をモードが張る部分空間に射影して解く Galerkin 射影 [3] を用いて、POD モードの成長率を同定する。式 (14) のように速度場が表されると、 \mathbf{u}_Δ 周りに線形化された非圧縮 Navier-Stokes 方程式は以下のように書き換えられる。

$$\sum_{k=1}^r \frac{da_k}{dt} \varphi_k = - \sum_{i=1}^r a_i \{ (\mathbf{u}_\Delta \cdot \nabla) \varphi_i - (\varphi_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_\Delta \} - \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \sum_{i=1}^r \frac{1}{Re} \nabla^2 \varphi_i. \quad (15)$$

モード φ_k との内積をとると、POD モードの正規直交性により、支配方程式は以下のように係数 a_k の常微分方程式で記述される。

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_{i=1}^r a_i G_{ik}, \quad (16)$$

$$G_{ik} = -\langle (\mathbf{u}_\Delta \cdot \nabla) \varphi_i, \varphi_k \rangle - \langle (\varphi_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_\Delta, \varphi_k \rangle + \frac{1}{Re} \langle \nabla^2 \varphi_i, \varphi_k \rangle. \quad (17)$$

行列表記すると、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a} = G \mathbf{a}, \quad (18)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{21} & \cdots & G_{r1} \\ G_{12} & G_{22} & \cdots & G_{r2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ G_{1r} & \cdots & \cdots & G_{rr} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

となる。

ここで、GSA で得られる最も成長率の大きいモードを表現する POD モードを φ_1, φ_2 とする。この時、これら 2 つのモードのみを用いた ROM は、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a} = G \mathbf{a}, \quad (20)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{21} \\ G_{12} & G_{22} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

となる. この ROMにおいて, G の固有値 λ_{ROM} は

$$\lambda_{\text{ROM}} = \frac{-\text{tr}(G) \pm \sqrt{\text{tr}(G)^2 - 4\det(G)}}{2}, \quad (22)$$

である. ただし, tr, \det はそれぞれ, 行列のトレース, 行列式を表す. 行列 G は, ベースフロー周りに線形化された作用素に匹敵することから, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 周りの成長率と周波数は, G の固有値から

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{Real}(\lambda_{\text{ROM}}), \\ f &= \frac{\text{Imag}(\lambda_{\text{ROM}})}{2\pi}, \end{aligned} \quad (23)$$

と求まり, 力学系が非零周波数の固有モードを持つ場合,

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{-\text{tr}(G)}{2}, \\ f &= \frac{\pm \sqrt{\text{tr}(G)^2 - 4\det(G)}}{4\pi}, \end{aligned} \quad (24)$$

で表される. また, より一般に 3 つ以上の POD モードを用いる場合, 行列 G の固有ベクトルと固有値を数値的に求めることで, 成長率, 周波数, 対応する固有モードを計算できる.

4. GSA および ROM の結果

(1) 円柱周り流れの GSA の結果

円柱周り流れで, GSA を行い, ベースフローから成長しうるモードを抽出する. ベースフローは, 支配方程式における時間微分が 0 の時の解である定常場を用いる. 円柱周り流れにおけるレイノルズ数 60 の定常場の主流方向速度分布と, 流線を図-2 に示す. 定常場は, $y = 0$ に対称な分布を持っており, 円柱後流に双子渦を形成していることがわかる.

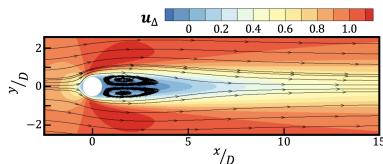


図-2 GSA におけるベースフロー. $Re = 60$.

定常場をベースフローに用いて, Time-stepping 法による GSA を行なった. レイノルズ数 60 の GSA によって得られた, 最も支配的で不安定なモードを図-3 に示す. ベースフローとは対照的に, GSA モードは $y = 0$ に非対称な分布を持つことがわかる. これは, 円柱後方で対象な双子渦が崩壊し, 非対称かつ非定常なカルマン渦放出のはじまりを表現している.

いくつかのレイノルズ数で同様に定常場を計算し, GSA を行なった. それぞれのレイノルズ数において最

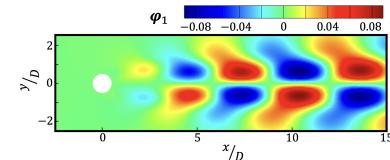


図-3 GSA によって得られた不安定モード. $Re = 60$.

も支配的であった GSA モードの固有値から, 成長率と周波数を計算した. 図-4 に成長率と周波数のレイノルズ数依存性を示す. 成長率と周波数は, レイノルズ数の増加とともに大きくなり, 先行研究の値と概ね一致している. 成長率は, $Re = 46.8$ を境に成長率が負から正へと変わる. 成長率が負のとき, 対応するモードが時間的に減衰することを意味し, 正のとき, 発達していくことを意味する. すなわち, $Re < 46.8$ では, 非定常なカルマン渦は減衰し, それ以上では, カルマン渦の放出が起こる. 周波数は, 概ね 0.1 であり, よく知られた渦放出周波数, 約 0.2 に比べ, 小さい. これは, GSA が成長初期の周波数を捉えているため, 十分に発達した状態の周波数と異なっていると考えられる.

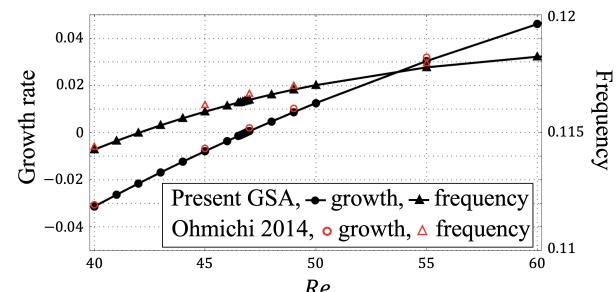


図-4 いくつかのレイノルズ数の GSA によって得られた最も支配的な固有モードの周波数と成長率.

(2) GSA の数値計算データを利用した ROM

$Re = 40, 60$ の Time-stepping 法において得られた時系列データに, POD を適用し, 発達初期の渦放出を捉える POD モードを計算した. 得られた POD モードは, GSA モードと似た分布をもつ. それぞれのレイノルズ数で得られた上位 2 つの POD モードとベースフローを用いて, Galerkin 射影によって, 行列 G を計算した. 行列 G は, レイノルズ数をパラメータに持ち, このレイノルズ数を変えることで, モードとは異なるレイノルズ数の結果を予測する.

図-5 に $Re = 40, 60$ で得られた POD モードを用いて, 様々なレイノルズ数の成長率と周波数を予測した結果を示す. POD-ROM (40), POD-ROM (60) はそれぞれ, $Re = 40, 60$ のモードを用いて構築された ROM であることを意味する. 2 つの ROM の周波数と成長率は, それぞれのモードのレイノルズ数に近い値を示しており, 予測するレイノルズ数, すなわち, G のパラメータを変えて, 成長率と周波数を正確に予測できないことがわかる.

予測に失敗した原因をより詳細に調べるため, 式 (17)

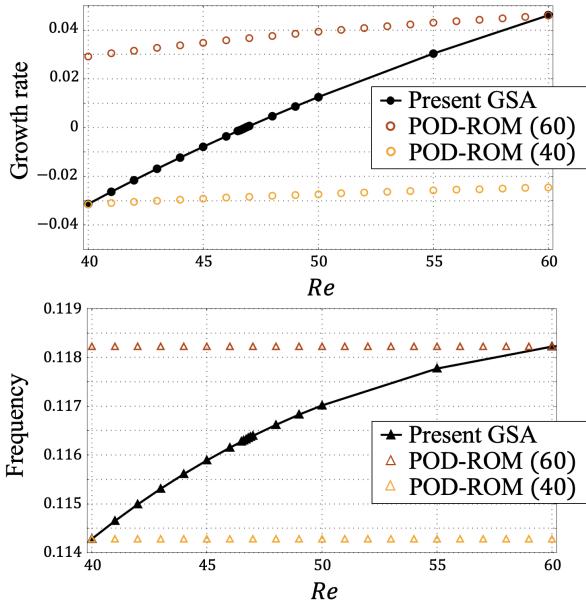


図-5 1つのレイノルズ数の GSA から構築された POD-ROM (40), (60) の成長率と周波数。

に基づき, G をレイノルズ数を係数にもつ項とそうでない項の, 2つの項に,

$$\begin{aligned} G_1 &\equiv -\langle (\mathbf{u}_\Delta \cdot \nabla) \varphi_i, \varphi_i \rangle - \langle (\varphi_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_\Delta, \varphi_i \rangle, \\ G_2 &\equiv \frac{1}{Re} \langle \nabla^2 \varphi_i, \varphi_i \rangle, \end{aligned} \quad (25)$$

と分解して考える. 図-6 に 2つの ROM と GSA における G_1 と G_2 のレイノルズ数依存性を示す. なお, ここでは, 実部の値をプロットしており, その和は成長率に等しい. ROM において, レイノルズ数によらず同じモードを用いているため, ROM の G_1 は, 常に一定の値である. しかし, それとは対照的に, GSA では, G_1 の値は大きく変化している. G_2 について, ROM では, $1/Re$ で変化するが, GSA における変化は, Re に対して単調減少である. ゆえに, モードを変えずに行列 G のレイノルズ数だけを変える方法は, 成長率や周波数のレイノルズ数依存性を捉えるためには不十分であることがわかる.

5. GSA 結果からの補間を利用した ROM

ROM で異なるレイノルズ数の結果を予測するためには, モードやベースフローのレイノルズ数に依存した変化を捉える必要がある. 本研究では, この変化を捉える 2つの方法を検討する.

(1) 部分空間補間に基づく予測手法

1つ目の方法は, 2つの異なる条件, $Re = Re_0, Re_1$ の Time-stepping GSA で得られた時系列データ X_0 と X_1 の POD モード U_0, U_1 を利用し, 他の条件の POD モード $U(Re)$ を計算する. 得られた POD モード $U(Re)$ を元に式 (24) で成長率と周波数を得る方法である.

本研究では, POD モードが張る部分空間に着目し, 2つの部分空間から他の部分空間を補間する. これは, 部

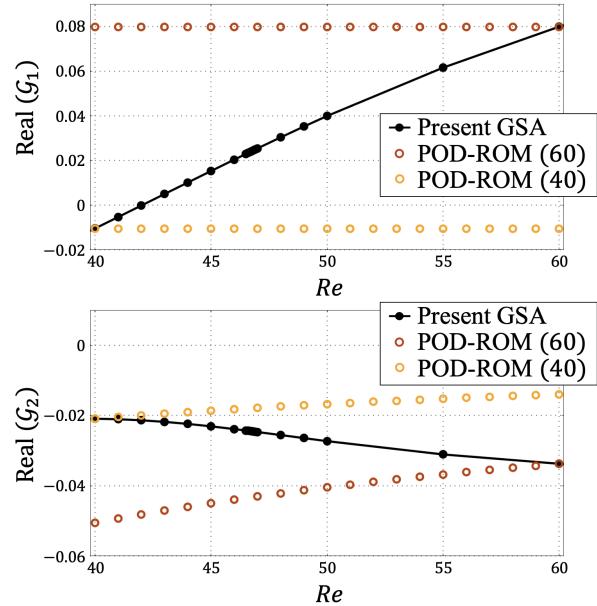


図-6 1つのレイノルズ数の GSA から構築された POD-ROM (40), (60) の成長率を, レイノルズ数を係数に持たない項 G_1 と, レイノルズ数を係数に持つ項 G_2 にわけたプロット.

分空間を元とする多様体である Grassmann 多様体の接空間での補間によって達成される. この補間では, 指数写像によって, U_0 によって張られる部分空間からみた接空間に写像する. 接空間では, 部分空間同士の演算が定義でき, 2つの部分空間からの線形補間が可能になる. 最後に対数写像によって, 補間された部分空間を得る. 実際の計算では, まず,

$$L = (I - U_0 U_0^T) U_1 (U_0^T U_1)^{-1} = U_1 (U_0^T U_1)^{-1} - U_0, \quad (26)$$

を計算し, L を SVD する.

$$L \stackrel{\text{SVD}}{=} P \Sigma Q^T. \quad (27)$$

最後に以下の式で, 補間された部分空間を得る.

$$\begin{aligned} U(Re) &= \{U_0 Q \cos\left(\frac{Re - Re_0}{Re_1 - Re_0} \tan^{-1}(\Sigma)\right) \\ &+ P \sin\left(\frac{Re - Re_0}{Re_1 - Re_0} \tan^{-1}(\Sigma)\right)\} Q^T. \end{aligned} \quad (28)$$

これらの詳細は, 文献 [7,16]などを参照されたい. 本研究では, この ROM を Grassmann-interpolation ROM (Gr-iROM) と呼ぶ.

(2) 作用素の補間に基づく予測手法

2つ目の方法は, Galerkin 射影で得られる G のような作用素から, レイノルズ数の異なる作用素を補間する. POD モードによって計算された G から, 異なるレイノルズ数の G を補間する方法もあるが, 本研究では, より直接的な補間として, time-stepping GSA のモード抽出に使われる DMD で, その計算途中で得られる低次元作用素 \tilde{A} を補間する.

\tilde{A} は、もとの作用素 A を U_r を利用して写像したものであり、この射影行列の選び方によって \tilde{A} は、異なる行列となる。実際に、射影行列は、レイノルズ数毎に計算されるため、異なるレイノルズ数の \tilde{A} 同士で補間を行うことは不適切である。そこで、射影行列の違いを補正するため、2つのレイノルズ数同士の射影行列の値の差が最小となるような回転行列 R を考える。

$$R = \underset{R^T R = I}{\operatorname{argmin}} \|U_0 - U_1 R\|^2. \quad (29)$$

このような回転行列は、 U_0 に対する U_1 のプロクラステス変換 [17,18] で計算できる。得られた回転行列を利用すると、 $U_1 R$ によって射影された作用素 \tilde{A}' は、

$$\tilde{A}'_1 = R^T \tilde{A}_1 R, \quad (30)$$

と計算できる。最後に \tilde{A}_0 と \tilde{A}'_1 からその間のレイノルズ数の作用素 $\tilde{A}(Re)$ を、以下のように行列指数関数を用いて補間する。

$$\tilde{A}(Re) = \operatorname{Exp} \left\{ \frac{Re - Re_0}{Re_1 - Re_0} \log(\tilde{A}_0) + \frac{Re_1 - Re}{Re_1 - Re_0} \log(\tilde{A}'_1) \right\}. \quad (31)$$

補間された \tilde{A} に対し、通常の DMD の手順と同様に、 \tilde{A} の固有値を計算する。ただし、この方法では、 \tilde{A} の固有値から成長率と周波数が計算できるが、モード分布を直接得ることはできない。本研究では、この ROM を Operator-interpolation ROM (Op-iROM) と呼ぶ。

(3) 補間を利用した ROM の結果

$Re = 40$ および $Re = 60$ の Time-stepping GSA の結果を用いて、2つの補間法を用いた ROM で、さまざまなレイノルズ数の周波数と成長率を予測した。得られた結果を図-7 に示す。補間を用いた ROM は、2つの条件の間をほとんど線形に繋いでいることがわかる。これは、2つの条件の補間式 (31) や (28) が写像先での線形補間に基づいていることが要因と考えられる。ゆえに、次数の高い補間の利用や、非線形な補間式を用いて置き換えることで、よりよい精度での予測が達成できる可能性が高い。Gr-iROM と Op-iROM を比較すると、Gr-iROM に比べ、Op-iROM は、より線形な傾向を反映していることがわかる。また、線形補間であっても、1つの条件で構築された POD-ROM と比較して、レイノルズ数方向の変化をよく再現できており、補間を利用した ROM の有効性が確かめられた。

6. 結言

本研究では、過渡的な成長を含む流れへの適用を見据え、ベースフローから成長や減衰するモードを特定する GSA の結果を ROM によって予測することを目指した。POD モードが張る部分空間に支配方程式を射影する ROM から、モードの成長率と周波数を特定する方法を確立した。データセットと異なる条件の結果を予測するために、複数の条件間における部分空間や作用素の補間が、予測精度の向上に有効であることを示した。また、条件に依存したモードの変化が重要であることは、部分

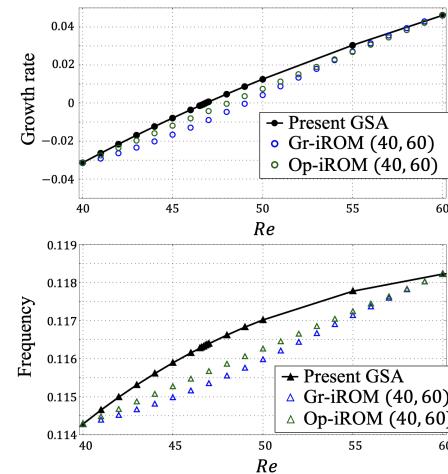


図-7 2つのレイノルズ数の GSA から構築された Gr-iROM (40, 60) と Op-iROM (40, 60) の成長率と周波数。

空間に射影した支配方程式の作用素を調べることで、確かめられた。今後、ベースフローからモードが成長し、非線形に成長する過程を ROM で予測できるよう、本手法を拡張していく予定である。

謝辞: 本研究の数値計算は、東北大学流体科学研究所未来流体情報創造センターの次世代融合研究システム (AFI-NITY) を用いて行った。本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2114 の支援を受けたものである。

参考文献

- [1] D. J. Lucia et al., *Prog. Aerosp. Sci.* 40 (2004) 51–117.
- [2] J. L. Lumley, *Nauka* (1967) 166–178.
- [3] K. Kunisch and S. Volkwein, *Numerische Mathematik* 90 (2001) 117–148.
- [4] P. J. Schmid, *J. Fluid Mech.* 656 (2010) 5–28.
- [5] A. E. Deane et al., *Phys. Fluids* 3 (1991) 2337.
- [6] B. R. Noack et al., *J. Fluid Mech.* 497 (2003) 335–363.
- [7] S. Sato and O. T. Schmidt, *arXiv:2502.03754* (2025).
- [8] Y. Ohmichi, *Ph. D. Thesis* (2014).
- [9] R. Ranjan et al., *J. Comp. Phys.* 403 (2020) 109076.
- [10] Y. Nakamura et al., *arXiv:2503.20204* (2025).
- [11] Y. Zhong et al., *arXiv:2501.02095* (2025).
- [12] A. Amiri-Margavi and H. Babaee, *J. Fluid Mech.* 1001 (2024).
- [13] H. Le and P. Moin, *J. Comp. Phys.* 92 (1991) 369–379.
- [14] B. P. Leonard, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 19 (1979) 59–98.
- [15] Y. Nakamura et al., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 432 (2024) 117340.
- [16] R. Zimmermann, *arXiv:1902.06502* (2019).
- [17] P. Baddoo, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 479 (2023).
- [18] G. H. Golub and C. F. van Loan, *Matrix Computations* 4th ed. Johns Hopkins University Press. (2013).