

# 反復型領域分割法に基づくPINNによる 媒質間境界条件の考慮

Consideration of Interface Boundary Conditions in PINN  
based on the Iterative Domain Decomposition Method

荻野正雄<sup>1)</sup>, 杉本振一郎<sup>2)</sup>

Masao Ogino and Shin-ichiro Sugimoto

1) 博(工) 大同大学 情報学部 (〒457-8530 愛知県名古屋市中区滝春町10-3, E-mail: m-ogino@daido-it.ac.jp)

2) 博(工) 八戸工業大学 工学部 (〒031-8501 青森県八戸市大字妙字大開88-1, E-mail: sugimoto@hi-tech.ac.jp)

In electromagnetic field problems, it is difficult for PINN to consider interface conditions for electromagnetic fields naturally. To solve this issue, this study proposes a PINN algorithm based on iterative domain decomposition methods that divides the analysis domain into conductor and non-conductor and satisfies the continuity of the magnetic flux density and magnetic field strength at the boundaries between subdomains by an iterative method.

**Key Words :** PINN, DDM, Interface boundary conditions, Magnetostatic analysis

## 1. はじめに

PINN[1,2]とは、偏微分方程式で記述された物理モデルに対する残差を損失関数に組み込むことで物理現象の振る舞いを予測する深層学習技術である。著者らはこれまで2次元静磁場問題を対象に電磁場解析へのPINNの適用研究を進め、さらに領域分割法に基づくPINN (DDM-PINN)による並列計算法を提案してきた[3]。ここで、導体と不導体のような異なる媒質間の境界ではMaxwell方程式から導出される条件を満たす必要があり、特にベクトル量を未知数とする3次元解析ではその取扱いが重要となる。これに対し、有限要素法では辺要素、時間領域差分法ではYee格子と呼ばれる離散化手法を用いることで自然と解決できることが知られている。しかし、単純な点集合を学習に用いるPINNでは媒質間の境界条件を自然と満たすことは難しいことが予測され、実際に3次元静磁場問題に適用した場合の予測解は誤差の大きいものとなった。

そこで本研究では、解析領域を媒質ごとに分割することで媒質間境界条件をDDM-PINNにおける部分領域間境界条件として課す手法を示し、数値実験結果を報告する。

## 2. 導体-不導体分割によるDDM-PINN法

### (1) 支配方程式

Fig. 1(a)に示す、鉄心周りの円形コイルに電流を流した場合の軸対称問題を考える[4]。解析領域を $\Omega$ 、その境界を $\partial\Omega$ とした場合、支配方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial \bar{A}_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{A}_\theta}{\partial z} \right) + \bar{J}_\theta = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1a)$$

$$\bar{A}_\theta = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (1b)$$

ただし、円筒座標系 $(r, \theta, z)$ を用いており、 $\mu$ は透磁率、 $A_\theta$ と $J_\theta$ はそれぞれ磁気ベクトルポテンシャルと電流密度の

$\theta$  成分である。また、 $\bar{x}$ は $x$ の無次元化した量を考えていることをあらわす。

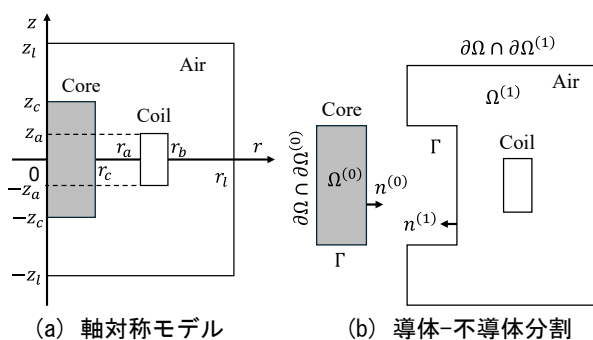


図-1 静磁場の軸対称問題

### (2) DDM-PINN

PINNでは、式(1)に加えて媒質間境界条件を表す式を陽に与える必要がある。ここでは、磁束密度 $\mathbf{B}$ の法線成分が連続である式

$$\mathbf{B}^{(0)} \cdot \mathbf{n}^{(0)} = \mathbf{B}^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{(1)} \quad (2)$$

と、磁場 $\mathbf{H}$ の接線成分が連続である式

$$\mathbf{H}^{(0)} \times \mathbf{n}^{(0)} = \mathbf{H}^{(1)} \times \mathbf{n}^{(1)} \quad (3)$$

を考慮する。ただし、 $\mathbf{n}$ は境界面での外向き単位法線ベクトルであり、右上の添え字は媒質番号を表す。これらの式より、ある物理量に対して境界面上での値を課すのではなく、境界面をはさんだ2つの領域での物理量に対する条件であることが分かる。そこで本研究では、式(2)と(3)をPINNの損失関数に組み込むのではなく、DDM-PINNの部分領域間境界条件として反復法で満足させることにする。

まず、解析領域 $\Omega$ を媒質ごとに異なる部分領域となるようNon-overlapping型領域分割を行う。ここではFig.1(b)に示すように、鉄心のみを含む部分領域 $\Omega^{(0)}$ と空気・コイル

を含む部分領域 $\Omega^{(1)}$ に分割する. この領域分割で生じる部分領域間境界を $\Gamma$ とする. このとき, 式(1)に式(2)と(3)の部分領域間境界条件を加えた支配方程式は次式で表される.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{\mu} \bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r} \bar{A}_\theta^{(0)}) \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{A}_\theta^{(0)}}{\partial \bar{z}} \right) + \bar{J}_\theta^{(0)} = 0 \quad \text{in } \Omega^{(0)} \\ \bar{A}_\theta^{(0)} = 0 \quad \text{on } \partial \Omega \cap \partial \Omega^{(0)} \\ \bar{\mathbf{B}}^{(0)} \cdot \mathbf{n}^{(0)} - \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{(1)} = 0 \quad \text{on } \Gamma \\ \bar{\mathbf{H}}^{(0)} \times \mathbf{n}^{(0)} - \bar{\mathbf{H}}^{(1)} \times \mathbf{n}^{(1)} = 0 \quad \text{on } \Gamma \\ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \frac{1}{\bar{\mu} \bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{r} \bar{A}_\theta^{(1)}) \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{1}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{A}_\theta^{(1)}}{\partial \bar{z}} \right) + \bar{J}_\theta^{(1)} = 0 \quad \text{in } \Omega^{(1)} \\ \bar{A}_\theta^{(1)} = 0 \quad \text{on } \partial \Omega \cap \partial \Omega^{(1)} \end{array} \right. \quad (4)$$

DDM-PINNとは, 式(4)を $\Omega^{(0)}$ ,  $\Omega^{(1)}$ ,  $\Gamma$ の3つに関するものに分割して,  $\Omega^{(0)}$ と $\Omega^{(1)}$ に関する式の近似解はPINNで予測し,  $\Gamma$ に関する式は反復法で満足させる方法である. 今回は反復法としてDirichlet-Dirichletアルゴリズムを適用する[3,5]. また, 部分領域ごとに異なるニューラルネットワークを学習させることになるが, 反復ごとに境界条件値が変化するため再学習が必要になる.

### 3. 数値実験

#### (1) 実験条件

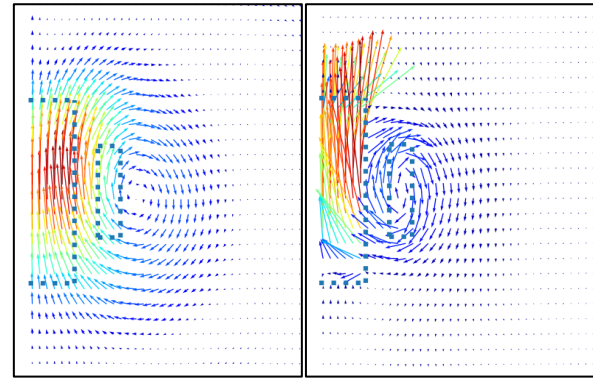
PINNの設定について述べる. 部分領域 $\Omega^{(i)}$  ( $i = 0, 1$ )の解 $\bar{A}_\theta^{(i)}$ の近似関数 $\hat{A}_\theta^{(i)}$ を活性化関数が $\tanh$ の多層パーセプトロンニューラルネットワークで構築する. さらに, このネットワークの出力 $\hat{A}_\theta^{(i)}$ は距離関数 $D(\bar{r}, \bar{z})$ により境界条件を満足する $\hat{A}_\theta^{(i)} = D^{(i)}(\bar{r}, \bar{z}) \cdot \bar{A}_\theta^{(i)}$ へと写像する. そして, 損失関数を $\hat{A}_\theta^{(i)}$ の偏微分方程式に対する残差で構築し, 残差を最小化するように学習させる. 最小化の方法にはL-BFGS法を用いた. PINNはエポック数100まで学習させ, DDM-PINNは部分領域の学習エポック数20, DDM反復回数10回とした.

学習用点は $\Omega$ 内に超一様分布のHalton列で $10^4$ 個生成したものを $\Omega^{(0)}$ と $\Omega^{(1)}$ に分割した. また, 全ての実験において同じ点列を用いた.

実験用プログラムはPyTorchで開発し, ニューラルネットワークの微分にはPyTorchの自動微分を用いた.

#### (2) 実験結果

Fig.2に通常のPINNと提案するDDM-PINNそれぞれで予測した磁束密度ベクトルを示す. なお, ニューラルネットワークの出力は磁気ベクトルポテンシャルであり, ここから自動微分で磁束密度を求めている. 図より, 鉄心と空気領域の透磁率の違いは出ているものの, 異なる媒質間でも滑らかに変化する分布となっている. 一方, 提案するDDM-PINNは媒質間境界の影響が明瞭になっていることが分かる.



(a) PINN (b) DDM-PINN

図-2 軸対称問題の予測結果

### 4. おわりに

ベクトル場を未知数とする静磁場解析にPINNを適用するために, 異なる媒質間境界条件をDDM-PINNの部分領域間境界条件として取り扱う方法を提案し, 数値実験によってその有用性を示した. 今後は予測解の精度評価, 3次元静磁場問題への適用を進めていく予定である.

謝辞: 本研究はJSPS科研費No. 23K24861, 24K14980の助成を受けたものである.

#### 参考文献

- [1] Raissi, M., Perdikaris, P. and Karniadakis, G.E.: Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations, *J. Comput. Phys.*, Vol.378, pp.686-707, 2019.
- [2] Cuomo, S., Di Cola, V. S., Giampaolo, F., Rozza, G., Raissi, M., and Piccialli, F.: Scientific machine learning through physics-informed neural networks: where we are and what's next, *arXiv*, arXiv:2201.05624v4, 2022.
- [3] 荻野正雄: 2次元静磁場問題のNon-overlapping型領域分割法に基づくPINN, 日本計算工学会論文集, Vol.2024, p. 20240009, 2024.
- [4] Brendel, P., Medvedev, V., and Roskopf, A.: Physics-informed neural networks for magnetostatics problems on axisymmetric transformer geometries, *IEEE J. Emerging Selected Topics Ind. Electro.*, Vol.5, No.2, pp.700-709, 2024.
- [5] Toselli, A. and Widlund, O.B.: Domain Decomposition Methods – Algorithms and Theory, *Springer*, 2005.