

距離関数・動的重み・符号制約を導入した PINN による非定常非圧縮流の逆解析

Inverse analysis of unsteady incompressible flow using PINN
with distance field, adaptive weight, and sign constraint

出口 翔大^{1) 2)} 浅井 光輝³⁾

Shota Deguchi and Mitsuteru Asai

¹⁾筑波大学 システム情報系

²⁾日本学術振興会 特別研究員 PD

(〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail: deguchi.shota.gm@u.tsukuba.ac.jp)

³⁾九州大学 工学研究院附属アジア防災研究センター 教授

(〒 819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744, E-mail: asai@doc.kyushu-u.ac.jp)

We present an improved approach for inverse analysis in Physics-Informed Neural Network (PINN) by addressing boundary condition imposition and weight tuning. While standard PINN formulations incorporate boundary conditions through the loss function, we enforce them exactly using distance functions. In addition, we enhance accuracy through dynamic weight tuning and an explicit sign constraint on estimated parameters. These improvements address reliability concerns in PINN, particularly for inverse problems. The effectiveness of the presented method is demonstrated through numerical experiments on incompressible flow in a square cavity and flow around an obstacle.

Key Words : *scientific machine learning, physics-informed neural network, distance field, adaptive weight, sign constraint*

1. 緒言

Neural Network などの機械学習手法を用いて常・偏微分方程式を数値的に解く取り組みは、1990 年代から行われている [1-3]。近年では機械学習ライブラリの整備が進み、同手法が広い分野に浸透している。一方、このようなデータ駆動型のアプローチにはモデルの説明性が低いという問題があり、結果の信頼性が懸念される場合がある。こうした背景から、大量のデータに基づいて学習を行う方法 (purely data-driven) に代わり、事前知識を導入したモデル (prior knowledge-informed) を導入することで信頼性を向上させる手法が展開されている [4]。特に、PINN (Physics-Informed Neural Network) [5] は順解析・逆解析の両者に柔軟に適用可能という特徴を持ち、希少データを活用する問題で利用されている [6]。また、同手法は、メッシュフリーなアプローチとしての利点を持ち、高次元の問題や複雑な形状の問題に適用しやすいという特徴がある。

著者らの先行研究 [7] では、非圧縮性の流れ場において、距離関数を用いた境界条件の取り扱い [8-10] と動的重み [11, 12] の併用による逆解析の高精度化を実現した。しかしながら、その適用例が矩形領域での問題に限定されており、[3, 13, 14] などの既存手法との差別化が不明瞭であった。本研究では、同手法が、既存手法では取り扱いが難しい問題に対しても有効であることを示し、その有効性を明確化する。

2. 機械学習手法

(1) Physics-Informed Neural Network

非圧縮性の Navier-Stokes 方程式を考える。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma \quad \text{on } \Gamma \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{u} = (u, v)^\top$ は速度、 p は圧力、 ρ は密度、 ν は動粘性係数である。PINN [5] は、解 $u(\mathbf{x})$ を MLP (Multi-Layer Perceptron) $\hat{u}(\mathbf{x}; \theta)$ により近似し、以下の損失関数を最小化することで学習を行う。

$$\mathcal{L}(\theta) = \mathcal{L}_{\text{mmt}} + \lambda_{\text{div}} \mathcal{L}_{\text{div}} + \lambda_{\text{bc}} \mathcal{L}_{\text{bc}} + \lambda_{\text{data}} \mathcal{L}_{\text{data}} \quad (4)$$

$$\mathcal{L}_{\text{mmt}} = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} - \nu \nabla^2 \hat{\mathbf{u}} \right|^2 d\mathbf{x} \quad (5)$$

$$\mathcal{L}_{\text{div}} = \int_{\Omega} |\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}|^2 d\mathbf{x} \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_{\text{bc}} = \int_{\Gamma} |\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_\Gamma|^2 d\mathbf{x} \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_{\text{data}} = \int_{\Omega} |\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_{\text{data}}|^2 d\mathbf{x} \quad (8)$$

ここで、 $\lambda_{\text{div}}, \lambda_{\text{bc}}, \lambda_{\text{data}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ は連続の式、境界条件、観測データの寄与を制御する重みである。このようなペナルティ法に基づく方針 [5] は、実装の容易さから実用上広く用いられているものの、境界条件を厳密に課す

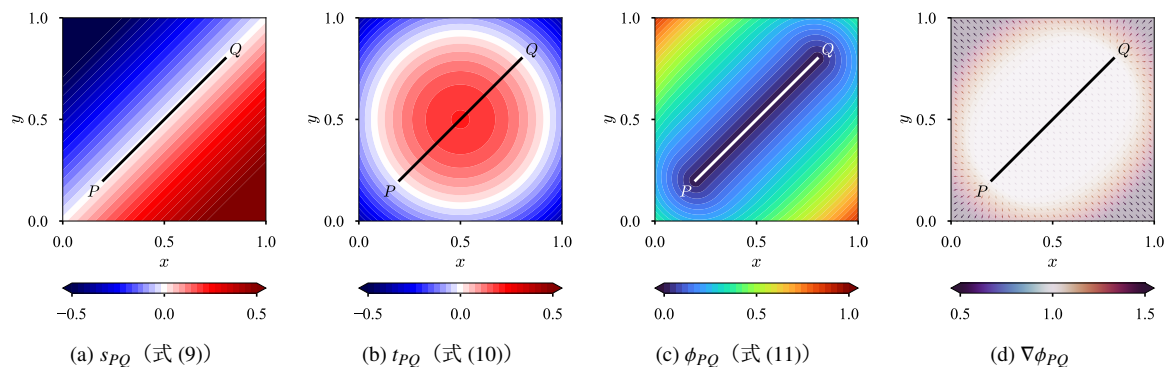


図-1: 線分に対する距離関数

ことは困難であり学習が不安定化する場合が多い。本研究では、このようなペナルティ的アプローチを‘soft imposition’と呼び、次に述べる方針と区別する。なお、式(5)–(8)の各項は、(quasi-)Monte Carlo 法により近似する(例えば、[15])。

(2) 距離関数を用いた境界条件の付与

領域 Ω 上の任意の点 \mathbf{x} において、境界 Γ までの距離を距離関数で表現する。 \mathbf{x} から Γ までの厳密な距離を $\Phi(\mathbf{x})$ で表すこととすると、 Φ は次の特性を持つ [16]。

(A) $\Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \Gamma)$

(B) $\partial_{\mathbf{v}} \Phi(\mathbf{x}) = 1 \quad (\mathbf{x} \in \Gamma)$

(C) $\partial_{\mathbf{v}}^m \Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \Gamma, m \in \mathbb{Z}_{\geq 2})$

ここで、 \mathbf{v} は Γ 上の内向き単位法線ベクトルである。ただし、厳密な距離 Φ を求めることは一般に困難な場合が多いため、これを近似的に表す関数 $\phi(\mathbf{x})$ を用意する。 ϕ に要求する特性は、上記の特性 (C) を緩和した以下の3つである。

(a) $\phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \Gamma)$

(b) $\partial_{\mathbf{v}} \phi(\mathbf{x}) = 1 \quad (\mathbf{x} \in \Gamma)$

(c) $\partial_{\mathbf{v}}^k \phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \Gamma, k = 2, \dots, m \in \mathbb{Z}_{\geq 2})$

このとき、 ϕ は m 次まで正規化されている、と言う [17]。

まず、単一の線分に対する距離関数の構築について述べる。点 P と点 Q を結ぶ線分を S_{PQ} に対し、以下の符号付き距離関数 $s_{PQ}(\mathbf{x})$ を定義する。

$$s_{PQ}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}_{PQ}\|} s'_{PQ} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_{PQ}\|} \mathbf{n}_{PQ} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \quad (9)$$

ここで、 $\|\cdot\|$ は L^2 ノルム、 s'_{PQ} は点 P と点 Q を結ぶ直線 S'_{PQ} に対する符号付き距離関数、 \mathbf{n}_{PQ} は S'_{PQ} に対する単位法線ベクトルである。次に、以下のトリミング関数 $t_{PQ}(\mathbf{x})$ を定義する。

$$t_{PQ}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}_{PQ}\|} \left(\left(\frac{\|\mathbf{x}_{PQ}\|^2}{2} \right)^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_C\|^2 \right) \quad (10)$$

ここで、 \mathbf{x}_C は線分 S_{PQ} の中点である。以上より、 $s_{PQ}(\mathbf{x})$ と $t_{PQ}(\mathbf{x})$ を組み合わせて、線分 S_{PQ} に対する距離関数 $\phi_{PQ}(\mathbf{x})$ を定義することができる [9]。

$$\phi_{PQ}(\mathbf{x}) = \left(s_{PQ}^2 + \left(\frac{(s_{PQ}^4 + t_{PQ}^2)^{1/2} - t_{PQ}}{2} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (11)$$

具体例として、点 $P = (.2, .2)^T$ 、点 $Q = (.8, .8)^T$ を結ぶ線分 S_{PQ} に対する各関数を図-1 に示す。同図より、線分 S_{PQ} が、 $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid s_{PQ}(\mathbf{x}) = 0\}$ と $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid t_{PQ}(\mathbf{x}) \geq 0\}$ の積集合 $\mathbb{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \phi_{PQ}(\mathbf{x}) = 0\}$ として表現されていることが確認できる。

続いて、領域に対する距離関数について述べる。境界 Γ が区分的な線分から構成される場合を考え ($\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$)、 Γ に対する距離を以下により定義する [16, 18]。

$$\phi := \frac{\prod_i \phi_i}{\left(\sum_i \phi_i^m \right)^{1/m}} \quad (12)$$

ここで、 $m (\in \mathbb{Z}_{>0})$ は ϕ の正規化の次数である(上記の特性 (c))。あるいは、より簡便に距離関数を構築する上では、次の方針も知られている。

$$\varphi := \prod_i \phi_i \quad (13)$$

式 (12)、(13) は、両者ともに特性 (a) を満たすが、式 (13) は特性 (b)、(c) を満たさず、Neumann 条件を伴う境界値問題へ適用する際の障壁となる。なお、[3, 13, 14] など

$$\psi := c \prod_i s_i \quad (14)$$

を距離関数に採用しているが (c は任意の定数、 s_i は式 (9) の符号付き距離)、式 (14) は式 (13) と同様に一般に特性 (b)、(c) を満たさないことに加え、領域 Ω が凸である場合にのみ有効であり、適用範囲が限られている。

式 (12) に定義した距離関数 ϕ を用いて、近似解を以下のように構築する。

$$\tilde{\mathbf{u}} := \mathcal{P}(\hat{\mathbf{u}}) := \bar{\mathbf{u}}_{\Gamma} + \phi \hat{\mathbf{u}} \quad (15)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{u}}_{\Gamma}$ は Dirichlet 条件を内挿した関数である [17]。 $\phi = 0$ on Γ より、 $\tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_{\Gamma} = \mathbf{u}_{\Gamma}$ on Γ であるから、 $\tilde{\mathbf{u}}$ は Dirichlet 条件を満たす。Neumann 条件についても同様に、距離関数を用いて取り扱うことが可能である [10, 19, 20]。本研究では、このように距離関数を用いて境界条件を厳密に課す方法を‘hard imposition’と呼ぶ。

(3) 動的重みの導入による学習の安定化

第(2)節で述べた方法に従えば、式(4)の損失関数は次のように改められる。

$$\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta}) = \tilde{\mathcal{L}}_{\text{mmt}} + \lambda_{\text{div}} \tilde{\mathcal{L}}_{\text{div}} + \lambda_{\text{data}} \tilde{\mathcal{L}}_{\text{data}} \quad (16)$$

ここで、 $\tilde{\mathcal{L}}_{\text{mmt}}$, $\tilde{\mathcal{L}}_{\text{div}}$, $\tilde{\mathcal{L}}_{\text{data}}$ はそれぞれ、式(5), (6), (8)において、 $\hat{\mathbf{u}}$ を $\tilde{\mathbf{u}}$ に置換したものである。ただし、 λ_{div} , λ_{data} は適切に設定しておく必要があり、これを brute-force 的に調整することは非現実的である。本研究では、勾配ノルムに基づく動的重み [11, 12] を導入することで、重みの調整を自動化する。まず、損失関数に対する 1 次の Taylor 展開と勾配降下法の関係から、

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}^{(n+1)}) - \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}^{(n)}) = -\eta^{(n)} \|\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}^{(n)})\|_2^2 \quad (17)$$

を得る。次いで $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\mathcal{L}}_{\text{mmt}}$ と $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\mathcal{L}}_k$ の間に直交性を仮定し (k は div, あるいは data を指すインデックス),

$$\Delta \tilde{\mathcal{L}}_{\text{mmt}} = -\eta^{(n)} \|\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\mathcal{L}}_{\text{mmt}}(\boldsymbol{\theta}^{(n)})\|_2^2 \quad (18)$$

$$\Delta \tilde{\mathcal{L}}_k = -\eta^{(n)} \|\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\mathcal{L}}_k(\boldsymbol{\theta}^{(n)})\|_2^2 \quad (19)$$

と分離する。ここで、各項が、1 エポックの間に同等の割合で減少する [21–23] には、 $\lambda_k^{(n)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して、

$$\|\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\mathcal{L}}_{\text{mmt}}(\boldsymbol{\theta}^{(n)})\|_2^2 \approx \|\lambda_k^{(n)} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\mathcal{L}}_k(\boldsymbol{\theta}^{(n)})\|_2^2 \quad (20)$$

を要求する。したがって、

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{\|\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\mathcal{L}}_{\text{mmt}}(\boldsymbol{\theta}^{(n)})\|_2}{\|\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\mathcal{L}}_k(\boldsymbol{\theta}^{(n)})\|_2} \quad (21)$$

を動的重みとする。ただし、数値的な安定化のために指数減衰を作用させ、

$$\hat{\lambda}_k^{(n)} = \beta \hat{\lambda}_k^{(n-1)} + (1 - \beta) \lambda_k^{(n)} \quad (22)$$

とする。ここで、 $\beta \in [0, 1]$ は減衰率である。さらに、平行移動を除くため、 $\hat{\lambda}_k^{(0)} = 0$ と初期化した上で、

$$\tilde{\lambda}_k^{(n)} = \frac{\hat{\lambda}_k^{(n)}}{1 - \beta^n} \quad (23)$$

と改めることで、初期値向きのバイアスを取り除く [24]。

(4) 逆解析対象のパラメータに対する符号の制約

PINN を逆解析に適用する際には、推定対象である物理量を Neural Network に出力させる、あるいは、推定対象の物理パラメータを代表するような学習可能パラメータを新たに導入した上で、支配方程式の情報を用いてこれらを推定するアプローチが一般的である (例えば、[5, 25])。ここで、新たに導入したパラメータは、重みやバイアスと同様に更新されるため、任意の実数値を取ることが許容されている。すなわち、この方法論では、推定対象のパラメータの符号は明示的に制約されておらず、学習を通じて正しい符号・値に収束することが期待されているに過ぎない。しかしながら、物理的な視点からは、これらのパラメータは物理的な意味を伴う特定の符号を有する必要がある。例えば、流

体の動粘性係数 ν は正値である必要がある。この問題への対処として、以下の変換を以て物理量の符号を明示的に制約する。

$$\tilde{\nu} := h_+(\nu) \quad (24)$$

ここで、 $h_+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ は正値を返す関数である。 h_+ の候補には複数の選択肢が存在するが、 $\max(0, \cdot)^2$, $\text{softplus}(\cdot)$, $\exp(\cdot)$ を用いた事前検討を行った結果、 $\exp(\cdot)$ が最も安定した学習を示したため、本研究ではこれを用いる。

3. 数値実験

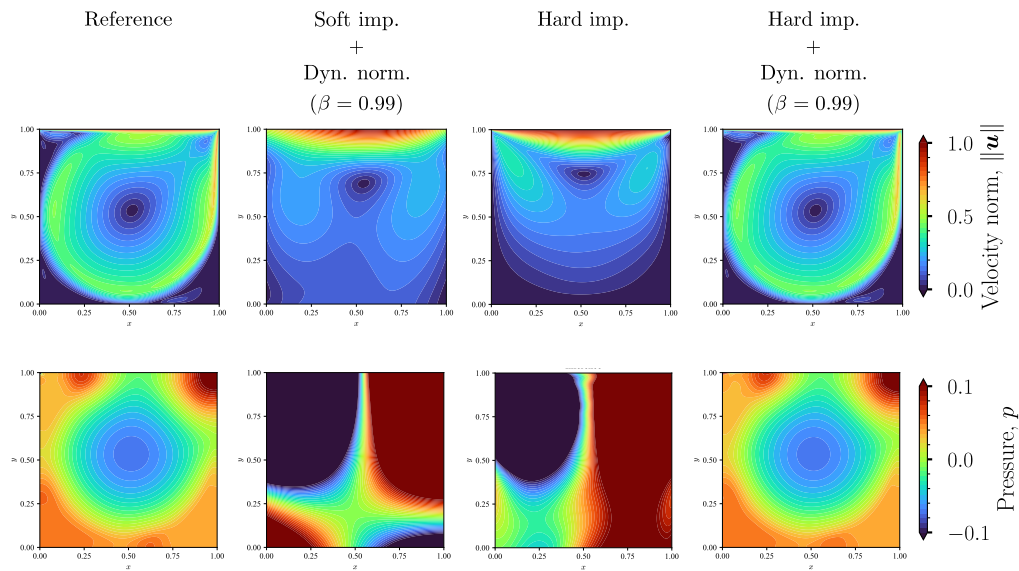
(1) キャビティ流れ

まず、著者らの先行研究 [7] で示した、矩形領域内のキャビティ流れに対する適用例を、より高 Reynolds 数の問題に拡張する。2次元のキャビティ流れを考え、有限差分法により参照解を作成した。問題設定は、空間中に無造作に配置した 256 点の速度の観測データを用いて、当該流れ場の Reynolds 数、およびデータを与えていない圧力場を逆解析するものとする。境界条件の取り扱いを soft imposition, hard imposition の何れかとした。

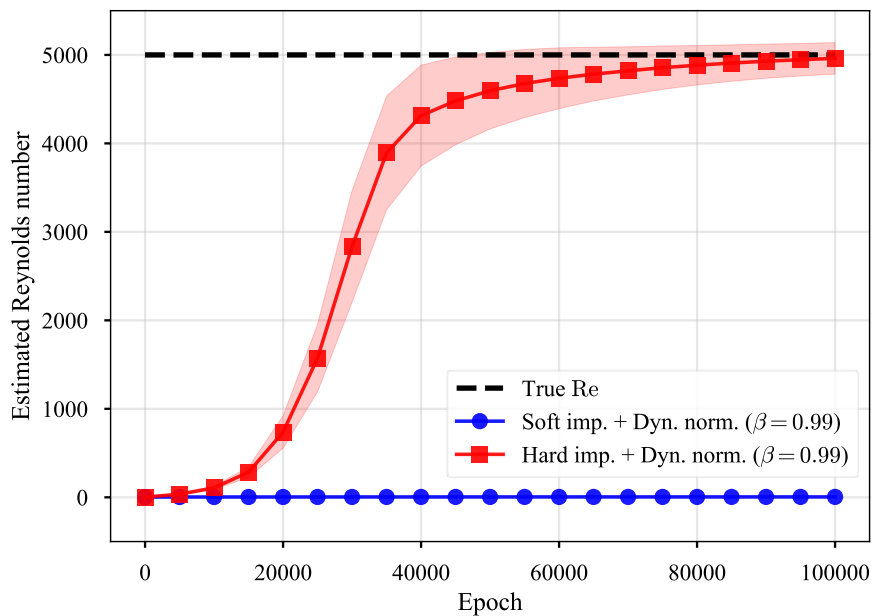
図-2 には、有限差分法による参照解、soft imposition と動的重み・符号制約を併用した場合、および、hard imposition と動的重み・符号制約を併用した場合の結果を示す。同図より、hard imposition と動的重み・符号制約を併用した場合にのみ、Reynolds 数の推定値が真値に収束し、速度場、圧力場ともに参照解と一致していることが確認できる。なお、hard imposition と符号制約のみを導入した場合の結果も示しているが、高粘度流体のような振る舞いに収束しており、動的重みの有効性が確認できる。

(2) 障害物周りの流れ

次いで、ハート形の障害物周りの非圧縮性流れに対し、式(4)、式(16)を用いた逆解析の比較を行う。参照解は P2/P1 補間した有限要素解を参照解とし、キャビティ流れの場合と同様に速度のデータのみを与えた上で、圧力と動粘性係数を逆解析する。図-3 には、再構成した速度場、推定した圧力場、および動粘性係数を示す。ペナルティ法に基づく soft imposition では障害物周りの非すべり条件を満足することができておらず、速度のデータを与えているにも関わらず、流れ場全体の特徴を捉えることができていない。一方、距離関数を用いて境界条件を陽に満たす hard imposition では、障害物近傍においても有限要素解と同様の速度場を再現することができており、さらにデータを与えていない圧力場や動粘性係数についても参照解に合致する結果、真値に合致する推定結果を得た。なお、本稿には図示していないが、式(23)の動的重みが学習過程で動的に調整されていることも確認しており、動的重みの導入が PINN の学習安定性に寄与していると考えられる。さらに、図-3 に示すような凸でない形状を表現するには、式(14)のような距離関数の利用 [3, 13, 14] では困難であり、式(9)–(12)による距離関数の有用性 [8–10, 16, 18] が強調される。ただし、hard imposition においても、障害物背面では速度が過小評価される傾向が残っており、



(a) 参照解, および PINN による解



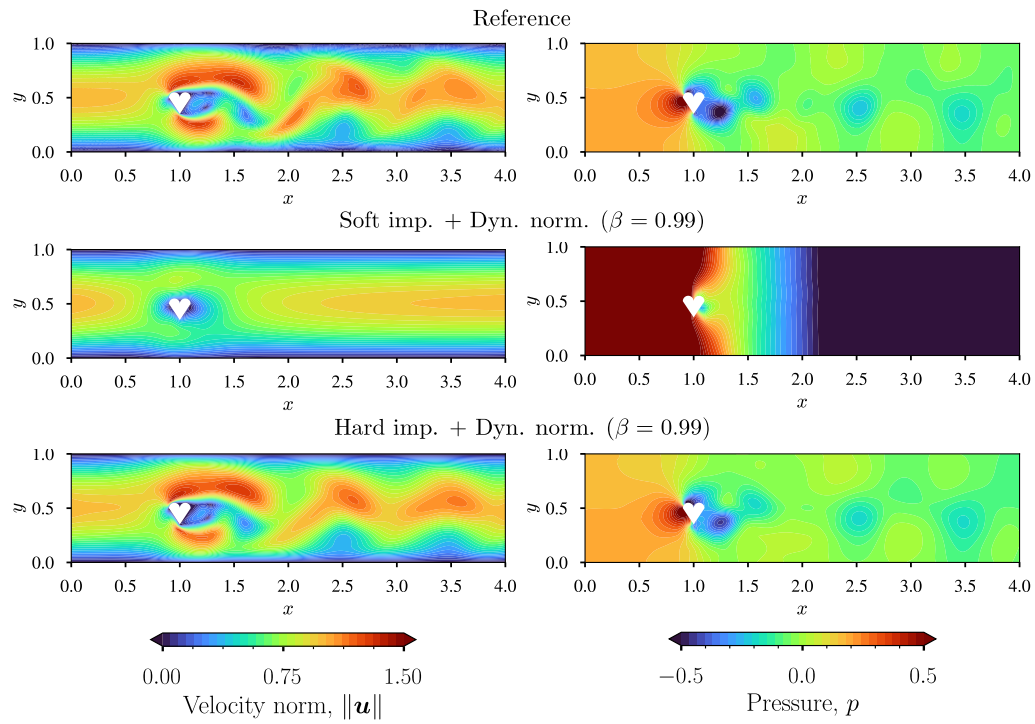
(b) 各手法による Reynolds 数の推定値

図-2: キャビティ流れ

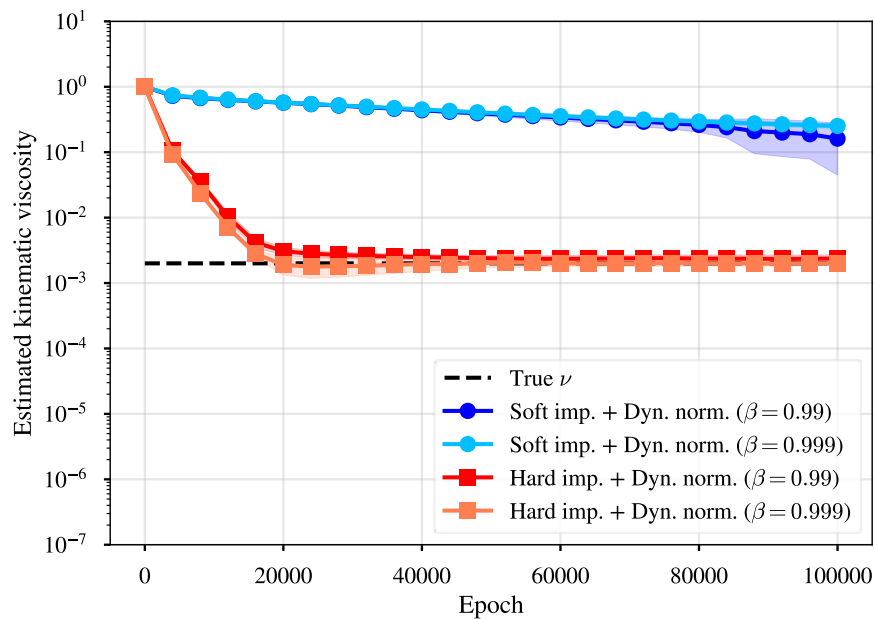
このような課題に対しては, Fourier 特徴量の利用など ての有用性を高めていく計画である.
が有効となり得る.

4. 結言

本研究では, 先行研究 [7] で矩形領域への適用に留まっていた PINN の逆解析手法を, より複雑な形状の問題へと拡張した. PINN の枠組みにおける境界条件の取り扱いを改めるとともに [8–10], 動的重み [11,12] の導入と, 推定対象パラメータの符号を明示的に制約することで, 非圧縮性流れの逆解析において高精度な結果を得ることができた. 今後は, Fourier 特徴量を利用することによる高度化や, データにノイズが混入した場合の堅牢性の検討を行い, 実用的な逆解析手法とし



(a) 参照解, および PINN による解



(b) 各手法による動粘性係数の推定値

図-3: 障害物周りの流れ

謝辞: 本研究は, JSPS 科研費 JP23KK0182・JP23K17807・JP23H01662・JP23KJ1685, JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2136, および九州大学数理・データサイエンス教育研究センターの支援を受けた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- [1] Hyuk Lee and In Seok Kang. Neural algorithm for solving differential equations. *Journal of Computa-*

tional Physics, Vol. 91, No. 1, pp. 110–131, 1990.

- [2] M. W. M. G. Dissanayake and N. Phan-Thien. Neural-network-based approximations for solving partial differential equations. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, No. 3, pp. 195–201, 1994.

- [3] I.E. Lagaris, A. Likas, and D.I. Fotiadis. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. *IEEE Transactions on Neural*

- Networks*, Vol. 9, No. 5, pp. 987–1000, 1998.
- [4] Laura von Rueden, Sebastian Mayer, Katharina Beckh, Bogdan Georgiev, Sven Giesselbach, Raoul Heese, Birgit Kirsch, Julius Pfrommer, Annika Pick, Rajkumar Ramamurthy, Michal Walczak, Jochen Garcke, Christian Bauckhage, and Jannis Schuecker. Informed machine learning - a taxonomy and survey of integrating prior knowledge into learning systems. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, Vol. 35, No. 1, pp. 614–633, 2023.
 - [5] M. Raissi, P. Perdikaris, and G.E. Karniadakis. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 378, pp. 686–707, 2019.
 - [6] Amirhossein Arzani, Jian-Xun Wang, and Roshan M. D’Souza. Uncovering near-wall blood flow from sparse data with physics-informed neural networks. *Physics of Fluids*, Vol. 33, No. 7, p. 071905, 07 2021.
 - [7] 出口翔大, 浅井光輝. 高信頼度な PINN に向けた境界条件の厳密な付与方法と動的重みの併用. 第 29 巻, pp. 181–186. 日本計算工学会, 06 2024.
 - [8] V. L. Rvachev. Method of r-functions in boundary-value problems. *Soviet Applied Mechanics*, Vol. 11, No. 4, pp. 345–354, 1975.
 - [9] T. I. Sheiko. Taking account of singularities at angular points and juncture points of the boundary conditions in the method of r-functions. *Soviet Applied Mechanics*, Vol. 18, No. 4, pp. 365–370, 1982.
 - [10] N. Sukumar and Ankit Srivastava. Exact imposition of boundary conditions with distance functions in physics-informed deep neural networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 389, p. 114333, 2022.
 - [11] Shota Deguchi and Mitsuteru Asai. Dynamic & norm-based weights to normalize imbalance in back-propagated gradients of physics-informed neural networks. *Journal of Physics Communications*, Vol. 7, No. 7, p. 075005, 2023.
 - [12] 出口翔大, 浅井光輝. 支配方程式による制約を加えた機械学習 PINN に対する動的重み付け法. 第 28 巻, pp. 176–181. 日本計算工学会, 05 2023.
 - [13] Lu Lu, Raphaël Pestourie, Wenjie Yao, Zhicheng Wang, Francesc Verdugo, and Steven G. Johnson. Physics-informed neural networks with hard constraints for inverse design. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 43, No. 6, pp. B1105–B1132, 2021.
 - [14] Xian Li, Jiaxin Deng, Jinran Wu, Shaotong Zhang, Weide Li, and You-Gan Wang. Physical informed neural networks with soft and hard boundary constraints for solving advection-diffusion equations using fourier expansions. *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 159, pp. 60–75, 2024.
 - [15] Takashi Matsubara and Takaharu Yaguchi. Good lattice training: Physics-informed neural networks accelerated by number theory, 2023.
 - [16] Arpan Biswas and Vadim Shapiro. Approximate distance fields with non-vanishing gradients. *Graphical Models*, Vol. 66, No. 3, pp. 133–159, 2004.
 - [17] V.L. Rvachev, T.I. Sheiko, V. Shapiro, and I. Tsukanov. Transfinite interpolation over implicitly defined sets. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 18, No. 3, pp. 195–220, 2001.
 - [18] Daniel Millán, N. Sukumar, and Marino Arroyo. Cell-based maximum-entropy approximants. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 284, pp. 712–731, 2015. Isogeometric Analysis Special Issue.
 - [19] Vadim Shapiro and Igor Tsukanov. The architecture of sage – a meshfree system based on rfm. *Engineering with Computers*, Vol. 18, No. 4, pp. 295–311, 2002.
 - [20] I. Tsukanov, V. Shapiro, and S. Zhang. A meshfree method for incompressible fluid dynamics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 58, No. 1, pp. 127–158, 2003.
 - [21] Franz M. Rohrhofer, Stefan Posch, and Bernhard C. Geiger. On the pareto front of physics-informed neural networks, 2021.
 - [22] Franz M. Rohrhofer, Stefan Posch, Clemens Gößnitzer, and Bernhard C. Geiger. Data vs. physics: The apparent pareto front of physics-informed neural networks. *IEEE Access*, Vol. 11, pp. 86252–86261, 2023.
 - [23] Sifan Wang, Yujun Teng, and Paris Perdikaris. Understanding and mitigating gradient flow pathologies in physics-informed neural networks. *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 43, No. 5, pp. A3055–A3081, 2021.
 - [24] Diederik P. Kingma and Jimmy Ba. Adam: A method for stochastic optimization. In Yoshua Bengio and Yann LeCun, editors, *3rd International Conference on Learning Representations, ICLR 2015, San Diego, CA, USA, May 7-9, 2015, Conference Track Proceedings*, 2015.
 - [25] Ehsan Kharazmi, Zhongqiang Zhang, and George E.M. Karniadakis. hp-vpinns: Variational physics-informed neural networks with domain decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 374, p. 113547, 2021.