

機械学習に基づく複合梁の弾塑性マルチスケール解析

Surrogated Computational Homogenization of Elastoplastic Composite Beam
Based on Machine Learning

中山耀介¹⁾, 平山紀夫²⁾, 寺田賢二郎³⁾
Yosuke Yamanaka, Norio Hirayama and Kenjiro Terada

¹⁾博(工)日本大学 生産工学部 (〒 275-8575 千葉県習志野市泉町 1-2-1 12 号館, E-mail: yamanaka.yousuke@nihon-u.ac.jp)

²⁾博(工)日本大学 生産工学部 教授 (〒 275-8575 千葉県習志野市泉町 1-2-1 12 号館, E-mail: hirayama.norio@nihon-u.ac.jp)

³⁾Ph.D. 東北大学 工学研究科 教授 (〒 980-0845 宮城県仙台市青葉区荒巻青葉 6-6-06, E-mail: kenjiro.terada.b3@tohoku.ac.jp)

This study proposes a surrogate computational homogenization for elastoplastic composite beams by means of machine learning. For that purpose, we perform numerical experiments to a representative volume element of composite beam and create a dataset of the sectional forces under various loading histories. Using the obtained dataset, a continuous function of the sectional forces is constructed by RBF interpolation, which is used as a substitution of microscopic analyses, and thus it is referred to as surrogate computational homogenization in this study. The resulting surrogate computational homogenization is used to predict the sectional forces for an arbitrary deformation history, and utilized to perform multiscale analyses.

Key Words : Computational Homogenization, RBF interpolation, Elastoplasticity, Composite Material, Beam Structure

1. はじめに

複合材料の力学を明らかにするために均質化理論に基づくマルチスケール解析手法 [1] の研究が進められており、弾性体によって構成される複合梁のマルチスケール解析手法もこれまでに提案されている [2]。しかし、非弾性材料が構成材料に含まれる場合には、変形状態と断面力の構成関係が複雑化し、古典的な梁理論に基づく断面力の数理モデル化が困難となるため、非弾性複合梁のマルチスケール解析手法に関して研究を行った例は限られている。

そこで本研究では、機械学習を用いて複合梁の非線形マルチスケール解析におけるミクロ解析を代替可能な代理均質化モデル (Surrogate Computational Homogenization, SCH) [3] を構築する。具体的には、弾塑性体を含む複合梁の周期的なミクロ構造を代表するユニットセルの解析モデルに対して、様々なマクロ変形履歴を負荷する数値実験 (数値材料試験) を実施することでマクロな変形状態およびその履歴とマクロ断面力のデータセットを作成する。得られたデータセットを教師データとして RBF 補間 [4] を適用し、ハイパーパラメータを最適化することで、教師データに含まれないマクロ変形履歴に対してもマクロ断面力を予測可能な連続関数を構築し、マルチスケール解析のための SCH として用いる。

2. 複合梁のマルチスケール境界値問題

図-1 に示す、中立軸方向に周期的なミクロ構造を有する梁の準静的な釣合い問題を微小変形理論の枠組みで考える。均質化理論 [5] に基づいて、対象とする問題を、ミクросケールにおける周期的構造を代表するユニットセルの自己釣り合い問題 (ミクロ境界値問題)

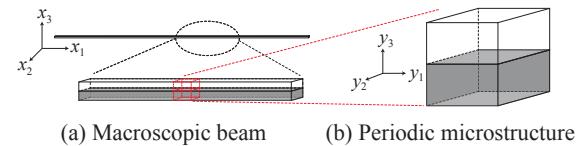


図-1 Multiscale setting of heterogeneous beam

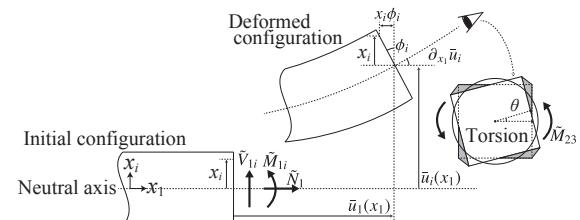


図-2 Macroscopic problem

と、マクロスケールにおける力学的な振る舞いが、ユニットセルと等価な均質体で構成される梁の釣り合い問題 (マクロ境界値問題) に分離する [6]。図-2 はマクロな梁の変形図を示しており、マクロ座標系を x で表すと、力の釣り合いに関する支配方程式は次式で表される。

$$\begin{cases} \partial_x \Sigma(x_1) + F(x_1) = \mathbf{0} & \forall x_1 \\ E(x_1) = \partial_x U(x_1) \\ U(x_1) = \bar{U} & \text{on } \partial_D \Omega \\ \Sigma(x_1) = \bar{T} & \text{on } \partial_N \Omega \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 Σ および E はそれぞれマクロ断面力ベクトルとマクロ一般化ひずみベクトルであり、以下のように

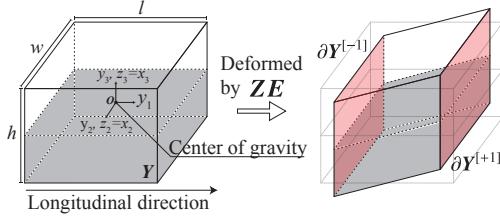


図-3 Microscopic problem

定義される。

$$\Sigma(x_1) = \begin{cases} \text{軸力} \\ x_1 - x_2 \text{面内曲げモーメント} \\ x_1 - x_3 \text{面内曲げモーメント} \\ \text{ねじりモーメント} \\ x_1 - x_2 \text{面内せん力} \\ x_1 - x_3 \text{面内せん力} \end{cases} \quad (2)$$

$$E(x_1) = \begin{cases} \partial_{x_1} \bar{u}_1(x_1) \\ -\partial_{x_1} \phi_2(x_1) \\ -\partial_{x_1} \phi_3(x_1) \\ -\partial_{x_1} \theta(x_1) \\ \partial_{x_1} \bar{u}_2(x_1) - \phi_2(x_1) \\ \partial_{x_1} \bar{u}_3(x_1) - \phi_3(x_1) \end{cases} \quad (3)$$

さらに、 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \theta, \phi_2, \phi_3)$ はそれぞれ断面 x_1 における中立軸の x_i , ($i = 1, \dots, 3$) 方向の変位、ねじり角、 $x_1 - x_i$, ($i = 2, 3$) 平面における断面の角度である（図-2 参照）であり、マクロ一般化変位ベクトル \mathbf{U} の成分である。

$$\mathbf{U}(x_1) = \{\bar{u}_1(x_1) \bar{u}_2(x_1) \bar{u}_3(x_1) \theta(x_1) \phi_2(x_1) \phi_3(x_1)\}^\top \quad (4)$$

一方、ミクロ座標系を \mathbf{y} として、 \mathbf{x}, \mathbf{y} のいずれとも独立な座標系 \mathbf{z} と共に図-3 に示すように定めると、ミクロ境界値問題は次式で表される。

$$\begin{cases} \partial_y^\top \sigma(x_1, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(x_1, \mathbf{y}) = \mathbf{Z}\mathbf{E}(x_1) + \partial_y \mathbf{u}^*(x_1, \mathbf{y}) \\ \mathbf{u}^*|_{\partial Y^{[\pm 1]}} - \mathbf{u}^*|_{\partial Y^{[-1]}} = \mathbf{0} \\ \frac{1}{lwh} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-w/2}^{w/2} \int_{-l/2}^{l/2} \phi(x_1, \mathbf{y}) dy_1 dz_2 dz_3 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5)$$

ここに、

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\partial_y = \begin{bmatrix} \partial_{y_1} & 0 & 0 & \partial_{y_2} & 0 & \partial_{y_3} \\ 0 & \partial_{y_2} & 0 & \partial_{y_1} & \partial_{y_3} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{y_3} & 0 & \partial_{y_2} & \partial_{y_1} \end{bmatrix}^\top \quad (7)$$

である。また、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ および \mathbf{u}^* はそれぞれミクロひずみおよびミクロ擾乱変位である。さらに、 $\mathbf{u}^*|_{\partial Y^{[\pm 1]}}$ はミクロ領域 \mathbf{Y} の y_1 方向に関する境界面 $\partial Y^{[\pm 1]}$ 上の擾乱変位で

ある。加えて、 l, w, h はそれぞれ図-3 に示すユニットセルの寸法であり、 ϕ は次の回転量ベクトル [7] である。

$$\phi(x_1, \mathbf{y}) = \{z_2 u_1 \ z_3 u_1 \ z_2 u_3 \ z_3 u_2\}^\top \quad (8)$$

最後に、 σ はミクロ応力ベクトルであり、任意の弾塑性構成則 [8] によって計算される。

式 (1)₁ のマクロ断面力 Σ はミクロ境界値問題を解いて得られるミクロ応力を用いて、次式によって計算できる。

$$\Sigma = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-w/2}^{w/2} \mathbf{Z}^\top \left(\int_{-l/2}^{l/2} \frac{\sigma}{l} dy_1 \right) dz_2 dz_3 \quad (9)$$

マルチスケール解析の古典的な数値計算手法である FE²[9] では、マクロ問題で計算されたマクロ一般化ひずみを条件としてミクロ境界値問題 (5) を解き、式 (9) を用いることでマクロ断面力を計算する。得られたマクロ断面力がマクロ支配方程式 (1) を満たさなければ、マクロ一般化変位の予測を修正し、マクロ一般化ひずみを計算して、再度ミクロ境界値問題を解く。この一連の計算を、式 (1) と (5) を同時に満たすマクロ断面力とマクロ一般化変位が得られるまで繰り返す。しかし、この手法はミクロ解析をマクロ解析の各計算点で実施するため計算コストが高く、実際の CAE (Computer Aided Engineering) に用いることは非現実的とされている。FE² 法に替わる手法として、マクロ断面力とマクロ一般化ひずみの構成関係を数理モデル化し、ミクロ解析の代わりに用いる分離型手法 [10] も提案されたが、ミクロ構造に非弾性体が含まれる梁においては、その数理モデル化が困難であり、マルチスケール解析における課題としてきた。そこで本研究では、機械学習によってその構成モデルを構築し、弾塑性複合梁のマルチスケール解析を実施する。具体的には、梁のユニットセルに対して任意のマクロ一般化ひずみ履歴を与えてミクロ解析を行う数値実験（以降、数値材料試験）を、ひずみ履歴を変えて様々な条件で行うことで、あるユニットセルのマクロな変形状態と断面力の対応関係を示すデータセットを作成し、RBF 補間 [4] によって大域補間することで断面力の連続関数を作成する。本研究では、この関数を代理均質化モデル (Surrogate computational homogenization, SCH) [11,12] と呼ぶ。

3. 弾塑性複合梁の代理均質化モデル

先に述べた数値材料試験によって、対応するマクロ一般化ひずみと断面力の組み合わせのデータを n_d 個格納したデータセットがあると仮定する。このとき、 i 番目のデータにおけるマクロ一般化ひずみと断面力をそれぞれ $\mathbf{E}_{(i)}$, $\Sigma_{(i)}$ で表す。このデータセットに含まれるデータを教師データとして RBF 補間を適用し、弾塑性複合梁の SCH を構築する。

本研究では、マクロ一般化応力が RBF 補間によって作成される以下の関数 ϕ で表されると仮定する。

$$\Sigma(\mathbf{E}) = \phi(\mathbf{f}) = \mathbf{W}^\top \mathbf{k}(\mathbf{f}), \quad (10)$$

ここに、 \mathbf{W} は n_d 行 6 列の重み行列であり、 \mathbf{k} はカーネ

ル関数 [13] と呼ばれる次の縦ベクトルである。

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(f) &= \left(k_{(1)}(f) \quad \cdots \quad k_{(n_d)}(f) \right)^T, \\ \text{where } k_{(i)}(f) &= \psi(r_{(i)}(f)) / \bar{\psi}(f), \\ \bar{\psi}(f) &= \sum_{j=1}^{n_d} \psi(r_{(j)}(f)), \\ \mathbf{r}_{(i)}(f) &= \|f - f_{(i)}\|. \end{aligned} \quad (11)$$

また、 ψ は放射基底関数 (Radial Basis Function, RBF) であり、次式で定義した。

$$\begin{aligned} \psi(r_{(i)}(f)) &= \alpha \exp \left\{ -\left(\frac{r_{(i)}(f)}{\beta_1} \right)^2 \right\} \\ &+ (1 - \alpha) \left\{ 1 - \frac{r_{(i)}(f)}{\beta_2} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

さらに、 f は説明変数と呼ばれる SCH の入力変数であり、 $f_{(i)}$ は i 番目の教師データにおける説明変数の値を表している。本研究では、 f を以下の 12 成分を持つ縦ベクトルで定義した。

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^{\text{acc}} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

ここに、 \mathbf{E}^{acc} は弾塑性体の履歴依存性を表現するため導入したマクロ累積一般化ひずみであり、擬似時刻 $s \in [0, t]$ の間で、あるマクロ一般化ひずみ履歴が与えられた時、その第 k 成分 E_k^{acc} は次式で表される。

$$E_k^{\text{acc}} = \int_0^t \dot{E}_k \left\{ H(E_k - E_k^{\max}) + H(E_k^{\min} - E_k) \right\} ds \quad (14)$$

ここに、 t は擬似時間であり、 E_k^{\max} と E_k^{\min} はそれぞれ擬似時刻 $[0, s]$ の間に与えられた E_k の最大値と最小値である。また、 $H(\bullet)$ は Heaviside 関数である。

一方、式 (10) の重み係数 \mathbf{W} は次の連立方程式を解くことで得られる。

$$(\mathbf{K}^\top \mathbf{K} + \eta \mathbf{I})^\top \mathbf{W} = \mathbf{K}^\top \mathbf{P} \quad (15)$$

ここで、 \mathbf{P} はマクロ断面力の教師データ $\Sigma_{(i)}$ を以下のように並べた n_d 行 6 列の行列である。

$$\mathbf{P} = \left\{ \Sigma_{(1)} \cdots \Sigma_{(n_d)} \right\}^\top \quad (16)$$

また、 \mathbf{K} はカーネル行列と呼ばれる n_d 次正方行列であり、以下のように表される。

$$\mathbf{K} = \left\{ \mathbf{k}(f_{(1)}) \cdots \mathbf{k}(f_{(n_d)}) \right\}^\top \quad (17)$$

ここで、式 (12) の $\alpha, \beta_i, (i = 1, 2)$ と、式 (15) の η はハイパーパラメータであり、差分進化 [14] を用いて SCH(10) によって予測されるマクロ断面力と教師データの断面力の平均二乗誤差 (Mean Squared Error)[15] を最小化するように最適化する。

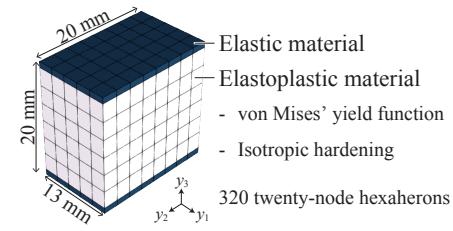


図-4 Analysis mesh of unit cell

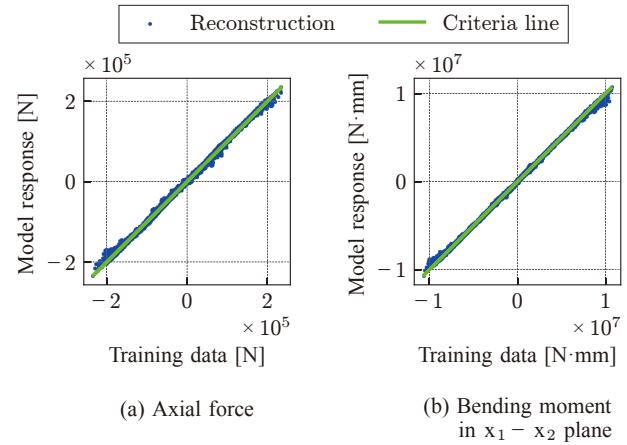


図-5 Reconstruction of training data

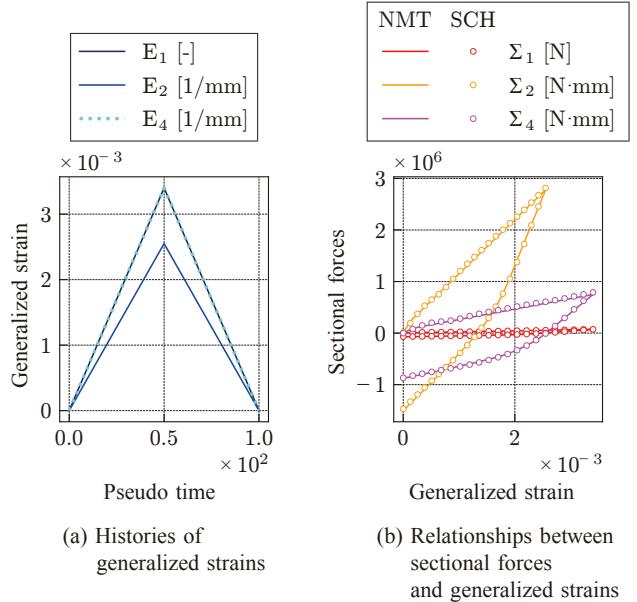


図-6 Prediction of macroscopic sectional force by the surrogate model for an unseen condition

4. 数値計算例

図-4 は、本計算例で用いるユニットセルの解析モデルを示しており、弾塑性材料を中間層に配置し、弾性体で挟み込んだ構造となっている。弾性体・弾塑性体とともに Hooke 則を用いて弾性挙動を表し、中間層の弾塑性構成則には von Mises 降伏関数と voce の非線型等方硬化モデル [16] を採用した。このユニットセルに対して 750 種類の互いに異なるマクロ一般化ひずみ履歴を

与えて数値材料試験を実施し、教師データを作成した。その後、教師データにRBF補間を適用し、差分進化によってハイパーパラメータを最適化することで弾塑性複合梁のSCHを構築した。

図-5(a),(b)はそれぞれ教師データに含まれるすべての軸力と x_1-x_2 面内曲げモーメントを再構築した結果を示している。グラフの横軸は各断面力の教師データの値であり、縦軸はSCHによって再構築された値である。また、青色のマーカーは実際に再構築によって得られた断面力の教師データとSCHの値の関係を示している。グラフに示す緑色の直線は、再構築結果と教師データの値が完全に一致している状態を示す基準線であり、マーカーがこの基準線から大きく離れている場合、再構築の精度が低いことを意味する。図より、すべてのマーカーが基準線付近に分布しており、SCHが教師データの断面力を高精度に再構築していることを確かめられた。

次に、SCHが教師データとして学習していないマクロ一般化ひずみ履歴に対してマクロ断面力を適切に予測可能であることを検証する。図-6(a)は、教師データに含まれないマクロ一般化ひずみの履歴を成分ごとに示しており、この履歴を用いて数値材料試験(NMT)を実施した。図-6(b)はNMTによって得られた断面力の履歴と、同じマクロ一般化ひずみ履歴をSCHに与えて予測された断面力の履歴を成分ごとに比較している。グラフより明らかに、NMTの結果とSCHの応答は一致しており、提案手法によって構築されたSCHが弾塑性複合梁の断面力を適切に予測可能なことを確認できた。

5. 結論

本研究では、構成材料に弾塑性体を含む複合梁の代理均質化モデルを提案し、数値計算例によって、提案手法が未学習のマクロ一般化ひずみ履歴に対しても適切なマクロ断面力履歴を予測可能なことを示した。今後は得られた代理均質化モデルを用いてマルチスケール解析を実施する。

謝辞: 本研究はJSPS科研費24KJ2035の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Marc G. D. Geers, Varvara G. Kouznetsova, Karel Matouš, and Julien Yvonnet. *Homogenization Methods and Multiscale Modeling: Nonlinear Problems*, Vol. 4, chapter 20, pp. 1–34. American Cancer Society, 2017.
- [2] Patrice Cartraud and Tanguy Messager. Computational homogenization of periodic beam-like structures. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 686–696, 2006.
- [3] Yosuke Yamanaka, Seishiro Matsubara, Norio Hirayama, Shuji Moriguchi, and Kenjiro Terada. Surrogate modeling for the homogenization of elastoplastic composites based on rbf interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 415, p. 116282, 2023.
- [4] MD Buhmann. Multivariate cardinal interpolation with radial-basis functions. *Constructive Approximation*, Vol. 6, No. 3, pp. 225–255, 1990.
- [5] Grégoire Allaire. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 23, No. 6, pp. 1482–1518, 1992.
- [6] Takashi Kyoya and Kenjiro Terada. Application of homogenization method to beam member with periodic structures. 応用力学論文集, Vol. 1, p. 185–194, 1998.
- [7] 斎木功, 鎌一彰, 山田真幸, 濑戸川敦, 岩熊哲夫. 非均質なtimoshenko梁の平均物性評価. 土木学会論文集A2(応用力学), Vol. 68, No. 2, pp. I-161–I-169, 2012.
- [8] J. C. Simo and T. J. R. Hughes. *Computational inelasticity*, Vol. 7. Springer Science & Business Media, New York, 2006.
- [9] K Terada, I Saiki, K Matsui, and Y Yamakawa. Two-scale kinematics and linearization for simultaneous two-scale analysis of periodic heterogeneous solids at finite strain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 31-32, pp. 3531–3563, 2003.
- [10] R. Saito, Y. Yamaguchi, S. Matsubara, S. Moriguchi, Y. Mihara, T. Kobayashi, and K. Terada. Decoupled two-scale viscoelastic analysis of FRP in consideration of dependence of resin properties on degree of cure. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 190, pp. 199–215, 2019.
- [11] Yosuke Yamanaka, Norio Hirayama, and Kenjiro Terada. Surrogate computational homogenization of viscoelastic composites. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 126, No. 6, p. e70008, 2025.
- [12] Akari Nakamura, Yosuke Yamanaka, Reika Nomura, Shuji Moriguchi, and Kenjiro Terada. Radial basis function-based surrogate computational homogenization for elastoplastic composites at finite strain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 436, p. 117708, 2025.
- [13] Christopher M Bishop and Nasser M Nasrabadi. *Pattern recognition and machine learning*, Vol. 4. Springer, 2006.
- [14] Rainer Storn and Kenneth Price. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces. *J. Glob. Optim.*, Vol. 11, No. 4, pp. 341–359, 1997.
- [15] Aryan Jadon, Avinash Patil, and Shruti Jadon. A comprehensive survey of regression based loss functions for time series forecasting, 2022.
- [16] Jacques Besson, Georges Cailletaud, Jean-Louis Chaboche, and Samuel Forest. *Non-linear mechanics of materials*, Vol. 167. Springer Science & Business Media, 2009.