

HPMの部分領域に対する埋込鉄筋要素の導入

Implementation of embedded rebar element to 3D HPM tetrahedral subdomains

藤原良博¹⁾, 上林厚志²⁾, 井戸裕勇樹³⁾, 塩見忠彦⁴⁾, 竹内則雄⁵⁾

Yoshihiro Fujiwara, Atsushi Kambayashi, Yuki Idosako, Tadahiko Shiomi and Norio Takeuchi

1)工博 (株)マインド (〒274-0825 千葉県船橋市前原西7-17-19-402, E-mail: fujiwara.yoshihiro@3d-lab.jp)

2) 工博 (株)竹中工務店 技術研究所 (〒270-1395 千葉県印西市大塚1-5-1, E-mail: kanbayashi.atsushi@takenaka.co.jp)

3) 工博 (株)竹中工務店 技術研究所 (〒270-1395 千葉県印西市大塚1-5-1, E-mail: idosako.yuuki@takenaka.co.jp)

4) Ph. D. (株)マインド (〒274-0825 千葉県船橋市前原西7-17-19-402, E-mail: shiomi.tadahiko@3d-lab.jp)

5)工博 法政大学名誉教授 (〒162-0843 東京都新宿区市谷田町2-33, E-mail: takeuchi@hosei.ac.jp)

The authors proposed a method for analyzing crack problems in concrete members using hybrid-type penalty method (HPM) with plane and solid elements. We presented a method to model reinforcing bars using layered elements for reinforced concrete structures. However, layered elements are not particularly suitable for three-dimensional problems, and there aren't many studies on such analysis with complex reinforcement modeling. Therefore, in this paper, we propose a method to introduce embedded rebar elements that can be freely inserted into HPM three-dimensional subdomains and verify its effectiveness.

Key Words : Hybrid-type Penalty Method, Discrete Crack, Concrete, Embedded Rebar

1. はじめに

鉄筋コンクリートの破壊性状を把握するために、コンクリートのひび割れの発生とひび割れの進展を精度よく捉える計算手法が必要である。ハイブリット型ペナルティ法 (HPM) [1][2]は変形が許容された離散体を、ペナルティ関数により接続しており、弾性挙動の精度を維持しながら、連続体から不連続体に移行する仮定を表現することができる。要素境界における変形が高精度に求まるため、ひび割れ幅を正しく評価でき、ひび割れ面のエネルギーを正確に評価可能である。

コンクリートを補強する鉄筋は、内部に複雑に配置されており、有限要素法 (FEM) で全ての鉄筋を正確にモデル化するのは困難である。最近では、ソリッド要素内部に節点を共有せずに自由に鉄筋を配置できる埋込鉄筋要素を備えているFEMプログラムもある。

著者らはハイブリット型ペナルティ法 (HPM) [1][2]にひび割れ破壊エネルギーと解放応力を考慮できる解析法を提案した。一方、鉄筋コンクリート構造に関しては、鉄筋を積層要素でモデル化する方法を示した[3][4]。更に HPMにおけるコンクリートのひび割れ計算を3次元に拡張した[5]。しかし、3次元問題の場合、複雑な鉄筋のモデル化を行う上で積層要素はあまり適切とはいえない、鉄筋の積層要素による3次元解析の報告は少ない。

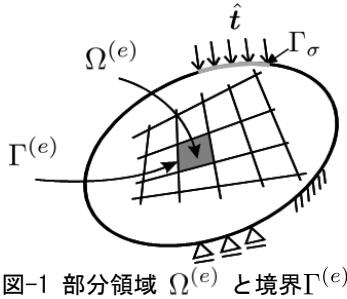
そこで、本論文では、HPMの3次元部分領域内に自由に鉄筋を挿入できる埋込鉄筋要素の導入方法を提案し、妥当性を検証する。

2. HPMの基礎方程式と変位場の仮定

(1) HPMの基礎方程式

HPMでは、図-1に示すように領域 Ω を閉境界 $\Gamma^{(e)} := \partial\Omega^{(e)}$ で囲まれたM個の部分領域 $\Omega^{(e)} \subset \Omega$ に細分化する。この部分領域を離散体と仮定し、それぞれの図心に独立した剛体変位とひずみで表される自由度を設ける。HPMの離散化では、離散体である部分領域間の変位の連続性に関する付帯条件をLagrange未定乗数により導入するハイブリッド型の仮想仕事式を用いる（式(1))。ここに、 $\Omega^{(e)}$ は部分領域、 $\Gamma_{<s>}$ は隣接する部分領域間の境界、 Γ_σ は表面力が与えられる境界を示している。上付きの (e) は、部分領域 e に関する量であり、下付きの $< s >$ は、隣接部分領域境界辺 s に関する量であることを示す。 M は部分領域 $\Omega^{(e)}$ の数、 N は隣接要素の共通の境界 $\Gamma_{<ab>} := \partial\Omega^{(a)} \cap \partial\Omega^{(b)}$ の数であり、 δu は仮想変位、 σ は要素応力、 f は物体力、 $\lambda_{<s>}$ は境界 $\Gamma_{<s>}$ におけるLagrangeの未定乗数、 \hat{t} は表面力である。

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^M \left(\int_{\Omega^{(e)}} \sigma : \text{grad}(\delta u) \, dV - \int_{\Omega^{(e)}} f \cdot \delta u \, dV \right) \\ & - \sum_{s=1}^N \left(\delta \int_{\Gamma_{<s>}} \lambda_{<s>} \cdot (u_{<s>}^{(s_a)} - u_{<s>}^{(s_b)}) \, dS \right) \quad (1) \\ & - \int_{\Gamma_\sigma} \hat{t} \cdot \delta u \, dS = 0 \quad \forall \delta u \end{aligned}$$

図-1 部分領域 $\Omega^{(e)}$ と境界 $\Gamma^{(e)}$

(2) 変位場の仮定

HPMは図-2に示すように、領域内の任意点 (x_0, y_0, z_0) 、通常は重心、に剛体変位やひずみ、ひずみの勾配をパラメーターに設定して、部分領域内の変位場を仮定する。領域内の任意点における変位を

$$\mathbf{u}^{(e)} = [u, v, w]^t \quad (2)$$

とし、自由度を

$$\mathbf{d}_\varepsilon^{(e)} = [u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z]^t \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^t \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)} = [\varepsilon_{x,x}, \varepsilon_{y,x}, \varepsilon_{z,x}, \gamma_{xy,x}, \gamma_{yz,x}, \gamma_{zx,x}]^t \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_y^{(e)} = [\varepsilon_{x,y}, \varepsilon_{y,y}, \varepsilon_{z,y}, \gamma_{xy,y}, \gamma_{yz,y}, \gamma_{zx,y}]^t \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_z^{(e)} = [\varepsilon_{x,z}, \varepsilon_{y,z}, \varepsilon_{z,z}, \gamma_{xy,z}, \gamma_{yz,z}, \gamma_{zx,z}]^t \quad (7)$$

として式(8)のように表す[6]。式(8)において、第1、第2項のみを考慮した場合は1次変位場となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(e)} = & \mathbf{N}_d^{(e)} \mathbf{d}^{(e)} + \mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \\ & + \mathbf{N}_{g_x}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)} + \mathbf{N}_{g_y}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_y^{(e)} + \mathbf{N}_{g_z}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_z^{(e)} \end{aligned} \quad (8)$$

係数行列は以下のとおりである。

$$\mathbf{N}_d^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & Z & -Y \\ 0 & 1 & 0 & -Z & 0 & X \\ 0 & 0 & 1 & Y & -X & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{(e)} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & \frac{1}{2}Y & 0 & \frac{1}{2}Z \\ 0 & Y & 0 & \frac{1}{2}X & \frac{1}{2}Z & 0 \\ 0 & 0 & Z & 0 & \frac{1}{2}Y & \frac{1}{2}X \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{N}_{g_x}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{X^2}{2} & -\frac{Y^2}{2} & -\frac{Z^2}{2} & 0 & -\frac{YZ}{2} & 0 \\ 0 & XY & 0 & \frac{X^2}{2} & \frac{ZX}{2} & 0 \\ 0 & 0 & ZX & 0 & \frac{XY}{2} & \frac{X^2}{2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{N}_{g_y}^{(e)} = \begin{bmatrix} XY & 0 & 0 & \frac{Y^2}{2} & 0 & \frac{YZ}{2} \\ -\frac{X^2}{2} & \frac{Y^2}{2} & -\frac{Z^2}{2} & 0 & 0 & -\frac{ZX}{2} \\ 0 & 0 & YZ & 0 & \frac{Y^2}{2} & \frac{XY}{2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{N}_{g_z}^{(e)} = \begin{bmatrix} ZX & 0 & 0 & \frac{YZ}{2} & 0 & \frac{Z^2}{2} \\ 0 & YZ & 0 & \frac{ZX}{2} & \frac{Z^2}{2} & 0 \\ -\frac{X^2}{2} & -\frac{Y^2}{2} & \frac{Z^2}{2} & -\frac{XY}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0, \quad Z = z - z_0$$

以降の説明のため、要素内自由度で求められた剛体変位やひずみ、ひずみの勾配をまとめて式(14)で表す。

$$\mathbf{d}_\varepsilon^{(e)} = [\mathbf{d}^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}_x^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}_y^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}_z^{(e)}]^t \quad (14)$$

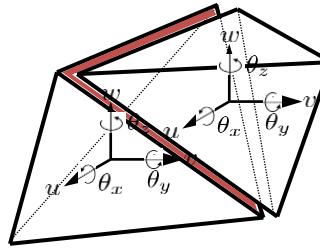


図-2 3次元 HPM の自由度とペナルティ層（褐色部分）

3. 鉄筋要素の導入

(1) 鉄筋要素の定義

HPMに対する鉄筋は、図-3に示すように、2点の座標P1, P2を入力することで定義する。P1-P2間の直線が部分領域を通る場合に部分領域内部に鉄筋要素を定義する。部分領域境界で直線P1-P2と交差する点が $P_1^{(e)}$, $P_2^{(e)}$ の場合の鉄筋要素 b_i のイメージを図-4に示す。鉄筋要素は、2点間の軸ばね要素として組み込む。P1からP2に向かう方向を軸方向とする。

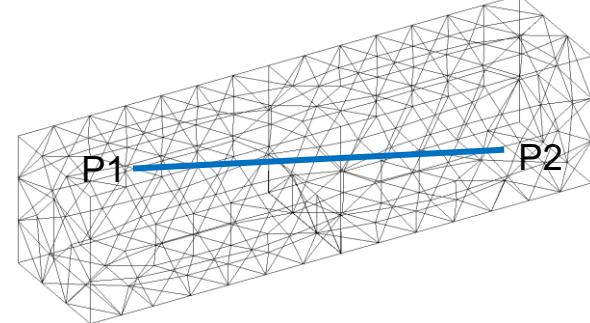
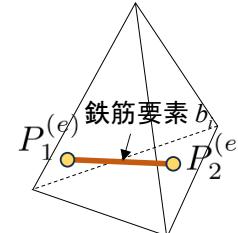


図-3 鉄筋の定義



(2) 鉄筋要素の構成則

$P_1^{(e)}$ 座標と $P_2^{(e)}$ 座標の変位 $\mathbf{u}_{P_1}^{(e)}, \mathbf{u}_{P_2}^{(e)}$ は、鉄筋要素を定義する要素の剛体変位やひずみ、ひずみの勾配（式(14)）を用いて式(8)で求められる。式(8)を要素剛性マトリックスに組み込むと、鉄筋要素に生じるばね力は、式(15)で求められる。

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{K}_{b_i}^{(e)} \mathbf{d}_\varepsilon^{(e)} \quad (15)$$

ここに、 $\mathbf{K}_{b_i}^{(e)}$ は鉄筋を挿入したことによる付加剛性であり、式(16)で求められる。 $\mathbf{N}_{b_i}^{(e)}$ は変位 $[\mathbf{u}_{P_1}^{(e)}, \mathbf{u}_{P_2}^{(e)}]^t$ を求める形状関数で式(17)で定義され、それぞれの点 $P_1^{(e)}$, $P_2^{(e)}$ に

対する形状関数は式(18)である。 \mathbf{T}_{b_i} はP1からP2方向を要素座標系の軸方向x'方向とする座標変換マトリックスである。 y' 方向は全体座標系のy方向と軸方向の面上に定義する。ただし、 y 方向が軸方向に近いときは全体座標系のx方向と軸方向の面上に y' を定義する。 z' 方向は x' と y' に直交する方向とする。 \mathbf{K}_s は鉄筋の要素剛性マトリックスで式(19)で定義し、 K は軸ばね定数で式(20)で定義する。

$$\mathbf{K}_{b_i}^{(e)} = \mathbf{N}_{b_i}^{(e)t} \mathbf{T}_{b_i}^t \mathbf{K}_s \mathbf{T}_{b_i} \mathbf{N}_{b_i}^{(e)} \quad (16)$$

$$\mathbf{N}_{P_i}^{(e)} = [\mathbf{N}_{P_1}^{(e)}, \mathbf{N}_{P_2}^{(e)}] \quad (17)$$

$$\mathbf{N}_{P_i}^{(e)} = [\mathbf{N}_d^{(e)}, \mathbf{N}_{g_x}^{(e)}, \mathbf{N}_{\varepsilon}^{(e)}, \mathbf{N}_{g_y}^{(e)}, \mathbf{N}_{g_z}^{(e)}]_{P_i} \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & -K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$K = \frac{E_s A}{l_e} \quad (20)$$

E_s : 鉄筋のヤング係数, A : 鉄筋の断面積,
 l_e : 要素長

(3) 鉄筋要素のペナルティ

式(1)に付帯条件として導入したLagrange未定乗数は、物理的には境界の表面力に対応することから、式(21)のようにペナルティ関数を導入することで、離散的な境界の分離などの非線形構成則が導入可能となっている。

$$\lambda_{<s>} = p \cdot \delta_{<s>} \quad (21)$$

ここに、 p はペナルティ係数、 $\delta_{<s>}$ は境界 $\Gamma_{<s>}$ の相対変位である。部分領域間の境界には、ペナルティ関数が定義されており、鉄筋要素に対しても、部分領域間のペナルティ関数が有効である。そのため、鉄筋の連続性を表すペナルティ関数はなくてもよい。

(4) ひび割れた境界に対する鉄筋要素

引張によるひび割れ破壊は、部分領域間のペナルティ関数を消滅させて離散ひび割れを表している。部分領域間の境界に鉄筋がある場合は、予めばね要素を挿入しておく。このばねの剛性については、取り扱いが難しく、今後の課題である。

4. 鉄筋コンクリートモデルによる検証

(1) 解析モデル

埋込鉄筋要素の検証として、コンクリートの3点曲げの梁($100 \times 100 \times 400$ mm)に鉄筋を追加したモデルを用い、HPMとFEMの解析結果と比較した。FEMでは鉄筋をトラス要素で定義した。

解析モデルは192要素の粗いメッシュ分割、4849要素の中位のメッシュ分割、39158要素の細かいメッシュ分割の3種類の解析を行った。粗いメッシュ分割の解析モデルを図-5に示す。鉄筋の配筋は、FEMで埋込鉄筋が使えないため、D10を2本底面に配置した。コンクリートの材料定数を表-1に示し、鉄筋の材料定数を表-2に示す。

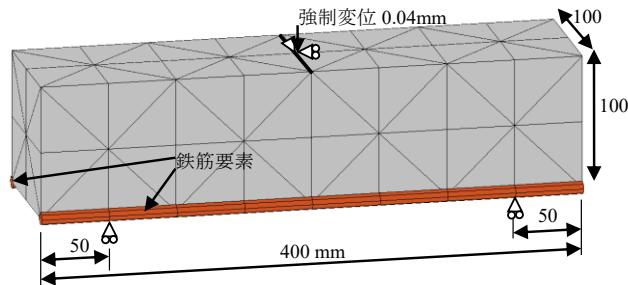


図-5 メッシュ図 (192要素)

表-1 コンクリートの材料定数

ヤング率 (MPa)	ポアソン比 ν
2.18×10^4	0.2

表-2 鉄筋の材料定数

ヤング率 (MPa)	断面積 A (mm ²)
2.1×10^5	71.33

(2) 解析結果

上面中央に0.04mmの強制変位を掛けたときの変形図を粗い、中位、細かいメッシュについて、それぞれ図-6～図-8に示す。また、反力と変位関係をそれぞれ図-9～図-11に示し、鉄筋の軸力を図-12～図-14に示す。HPMの結果は、反力および鉄筋の軸力とともに、FEMとほぼ同じ結果が得られ、導入した埋込鉄筋要素の妥当性が確認できた。

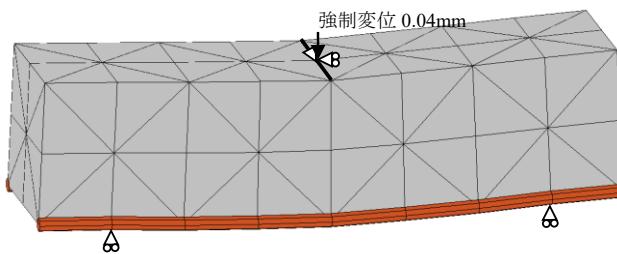


図-6 変形図 (粗い192要素)

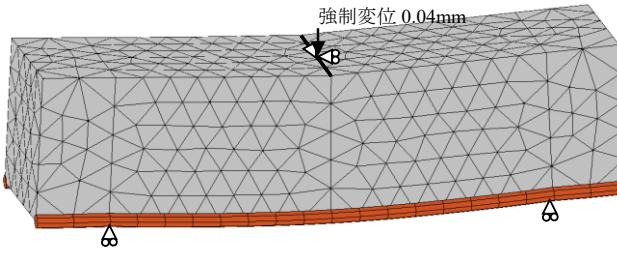


図-7 変形図 (中位4849要素)

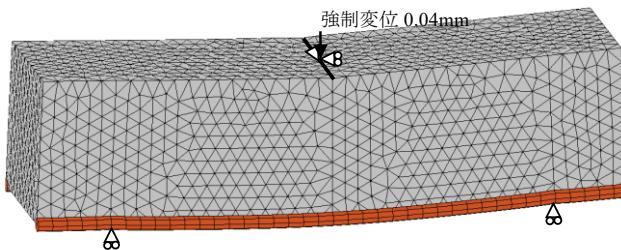


図-8 変形図（細かい39158要素）

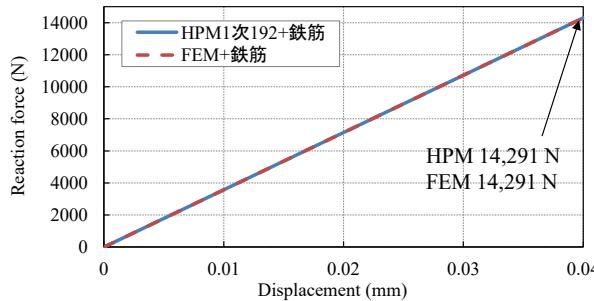


図-9 荷重変形関係（粗い要素）

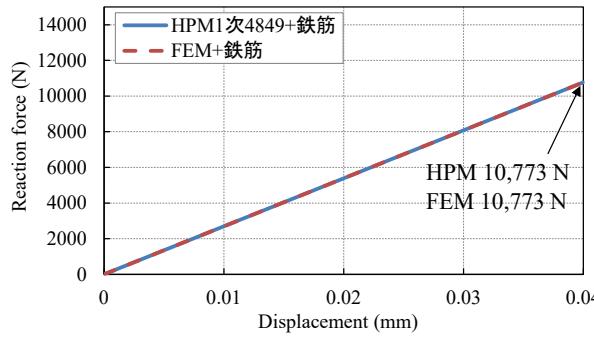


図-10 荷重変形関係（中位4849要素）

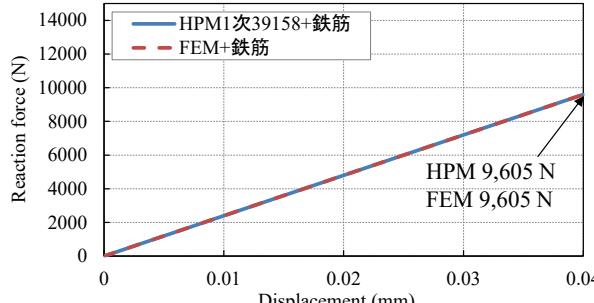


図-11 荷重変形関係（細かい39158要素）

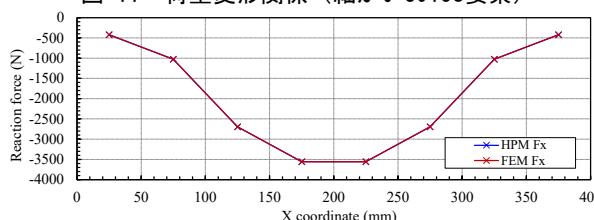


図-12 鉄筋の軸力（粗い要素）

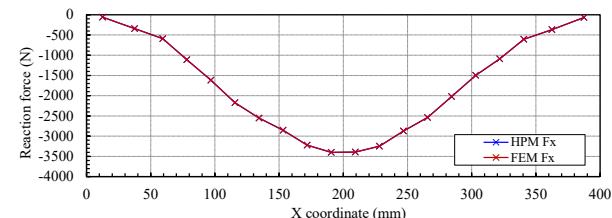


図-13 鉄筋の軸力（中位4849要素）

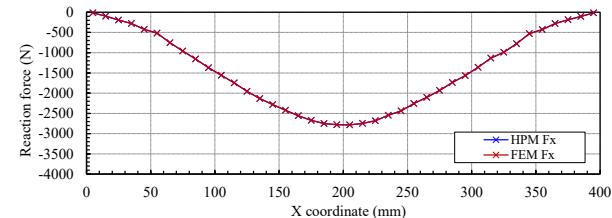


図-14 鉄筋の軸力（細かい39158要素）

5. まとめ

3次元HPM解析プログラムを拡張し、部分領域に対する埋込鉄筋要素を導入した。このプログラムを用いてコンクリートに鉄筋を挿入した弾性解析を行い、結果をFEMと比較し、荷重変位関係および鉄筋の軸力が同じになることを確認した。

今後は、ひび割れたコンクリートに対する埋込鉄筋要素の適用性について検討を進めていきたい。

参考文献

- [1] 竹内則雄, 草深守人, 武田洋, 佐藤一雄, 川井忠彦: ペナルティを用いたハイブリッド型モデルによる離散化極限解析, 土木学会構造工学論文集, Vol.46A, pp261-270, 2000.
- [2] 竹内則雄, 大木裕久, 上林厚志, 草深守人: ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適用した離散化モデルによる材料非線形解析, 日本計算工学会論文集, 2001.
- [3] 竹内則雄, 上田眞穂, 上林厚志, 鬼頭宏明ほか: 鉄筋コンクリート構造の離散化極限解析法, 丸善, 2005.
- [4] Fujiwara, Y., Takeuchi, N., Shiomi, T. and Kambayashi, A.: Discrete crack modeling of RC structure using hybrid-type penalty method, International Journal of Aerospace and Lightweight Structures (IJALS), Vol.3, No.2, pp263-275, 2013
- [5] 上林厚志: 三次元HPM四面体要素の導入とコンクリートのひび割れ解析への適用性検討, 計算工学講演会論文集, 2023.
- [6] 山村和人, Anna Vardanyan, 竹内則雄: ハイブリッド型ペナルティ法におけるピラミッド要素の開発法政大学情報メディア教育研究センター研究報告, Vol.35, 2020.