

# Wasserstein 距離に基づく交叉を組み込んだ 進化的アルゴリズムによるトポロジー最適化

Topology Optimization via Evolutionary Algorithm  
Incorporating Wasserstein Distance-Based Crossover

喜井 大誠<sup>1)</sup>, 寺本 央<sup>2)</sup>, 矢地 謙太郎<sup>3)</sup>, 藤田 喜久雄<sup>4)</sup>  
Taisei Kii, Hiroshi Teramoto, Kentaro Yaji and Kikuo Fujita

<sup>1)</sup>大阪大学 大学院工学研究科 博士後期課程 (〒 565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1, E-mail: kii@syd.mech.eng.osaka-u.ac.jp)

<sup>2)</sup>博 (学) 関西大学 システム理工学部 教授 (〒 564-8680 大阪府吹田市山手町 3-3-35, E-mail: teramoto@kansai-u.ac.jp)

<sup>3)</sup>博 (工) 大阪大学 大学院工学研究科 准教授 (〒 565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1, E-mail: yaji@mech.eng.osaka-u.ac.jp)

<sup>4)</sup>工博 大阪大学 大学院工学研究科 教授 (〒 565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1, E-mail: fujita@mech.eng.osaka-u.ac.jp)

Evolutionary algorithms are effective for solving multimodal problems with multiple local optima. However, their application to topology optimization remains limited due to the poor search performance in high-dimensional problems. In this study, we apply a morphing technique based on the Wasserstein distance and propose a topology optimization framework that incorporates a new crossover operator for high-dimensional material distributions. Through numerical examples, we demonstrate that solutions obtained by the density-based method can be significantly improved by using them as initial solutions for the proposed method.

**Key Words :** *Topology Optimization, Evolutionary Algorithm, Wasserstein Distance*

## 1. 諸言

トポロジー最適化の基本概念は、与えられた設計領域における最適な材料分布を数理最適化により探索することであり、密度法やレベルセット法などの代表的手法の多くは評価関数に対する感度を基に設計変数を逐次更新する。このような感度に基づく手法は、最適解への収束性には優れている一方で、評価関数の多峰性が顕著な最適化問題の場合には性能の劣る局所解に陥る可能性がある。

進化的アルゴリズムは、最適化問題の解候補群を生物の個体群に見立て、交叉や突然変異による変化と、優れた個体の選択による世代交代を繰り返すことで最適解を探索する手法であり、多峰性の最適化問題に対してその創発性が有効とされている。しかし、設計変数の増加に伴い探索性能が著しく低下することから、Sigmundにより指摘されているように[1]、高い設計自由度を確保するために極めて高次元の設計変数を要するトポロジー最適化への応用は限定的となっている。その主な要因としては、高次元の設計空間においては交叉や突然変異が機能しにくく、新たな解候補の生成が困難となることが挙げられる。したがって、高自由度を維持しつつも進化的アルゴリズムによるトポロジー最適化を行うには、独自の解生成手法が必要となる。

そのような先行研究として、データ駆動型トポロジーデザイン[2,3]では、解生成手法として深層生成モデルを採用している。その基本的なコンセプトは、まず、原問題に対する緩和問題を解いて多様な構造を初期解として準備したうえで、原問題の評価関数値に基づいて優秀な解候補を選択し、それらを学習した生成モデルを用いて新たな解候補を生成することを繰り返し、解

集合を反復的に更新するというものである。生成モデルによって構築された低次元の潜在空間において、学習データの中から選ばれた複数の点の間を補間する[4]ことで、親として選ばれた構造間のモーフィングを実現している。図1に示す他のモーフィング手法との比較からわかるように、線形補間と比べると妥当な補間が得られているものの、ノイズを含むグレースケールベースの連続的な変化であり、二値化した際に親同士との掛け合わせに相当する中間的な材料分布は極めて少ないことが確認できる。この問題は、生成モデルの学習に用いるデータ数を増やすことで改善される可能性があるものの、データ駆動型トポロジーデザインの枠組みでは、解集団を学習データとして用いるため、データは数十から数百に限られる。そのため、図1に示すように、形態の大きく異なる構造同士のモーフィングは不完全となり、材料分布に対する交叉手法としては依然として課題が残されている。

本研究では、Wasserstein 距離に基づく図形モーフィング手法に着目し、材料分布に対する効果的な交叉手法として導入することで、進化的アルゴリズムによるトポロジー最適化枠組みを提案する。Wasserstein 距離は最適輸送理論に基づく確率分布間の距離尺度であり、その特性を利用して最適輸送に基づく図形同士の重心を計算することでモーフィングが可能である。これにより、全く異なる図形、例えば動物と円環状の三次元図形に対しても、それらの中間的な図形が得られることが示されている[5]。本研究では、密度法と同様に仮想的な材料密度を用いて材料分布を表現したうえで、このモーフィング手法をトポロジー最適化における材料分布に対して適用する。具体的には、親として選ばれ

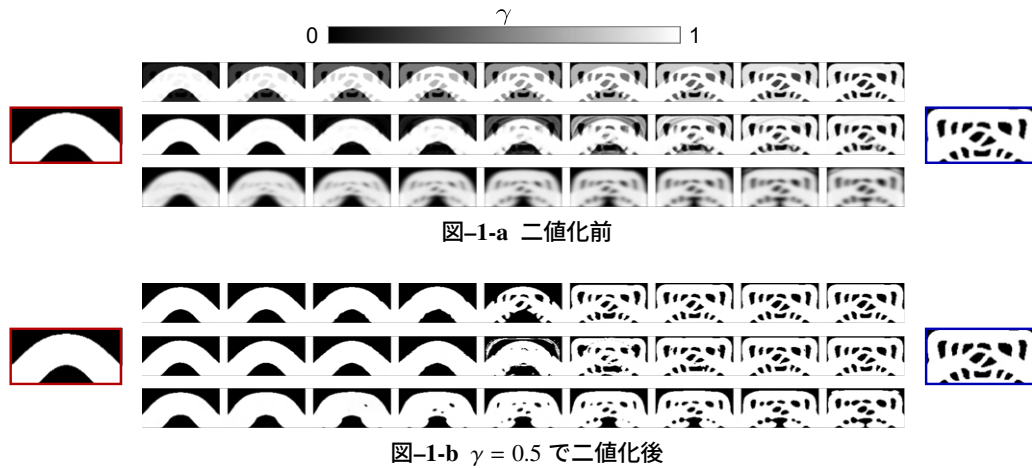


図-1-a 二値化前

図-1-b  $\gamma = 0.5$  で二値化後

図-1 両端のサンプルデータに対するモーフィング方法による比較（上段：線形補間，中段：VAE，下段：Wasserstein 補間）

た2つの材料分布に対して、最適輸送に基づきそれらの中間的な分布を計算し、新たな解候補（子）を生成する交叉手法を提案する。これにより、従来の進化的アルゴリズムにおける交叉方法や深層生成モデルを用いる方法と比べて、数少ないデータ数からより多様な解候補の創成が可能となり、探索性能の向上が期待される。数値例として、構造力学および熱流体における最適化問題を取り上げ、提案手法の有用性と残された課題について考察する。

## 2. 提案手法

### (1) Wasserstein 距離に基づくモーフィング

Wasserstein 距離とは、最適輸送理論に基づく確率分布間の幾何学的な距離を測る指標である。特に  $p$ -Wasserstein 距離は、確率分布  $\mu$  から別の分布  $\nu$  への質量輸送に必要な最小コストとして次式で定義される。

$$W_p(\mu, \nu) = \left( \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} d(x, y)^p \pi(x, y) dx dy \right)^{1/p} \quad (1)$$

ここで、 $\Pi(\mu, \nu)$  は  $\mu$  と  $\nu$  の間の全ての輸送計画の集合、 $d(x, y)$  は  $x$  と  $y$  の間のユークリッド距離を表す。

式(1)は、数値計算上は離散化された確率分布に対しては線形計画問題として定式化され、 $n$  個に離散化された2つの分布間の Wasserstein 距離の計算量は  $O(n^3)$  となり、極めて計算コストが高い。そこで、正則化項を加えた次式のエントロピー正則化付き Wasserstein 距離による近似解がしばしば用いられる。

$$W_p^\varepsilon(\mu, \nu) = \left( \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} d(x, y)^p \pi(x, y) dx dy + \varepsilon H(\pi) \right)^{1/p}, \quad (2)$$

$$H(\pi) = - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \pi(x, y) (\log \pi(x, y) - 1) dx dy$$

ここで、 $H(\pi)$  はエントロピー正則化項であり、 $\varepsilon$  はその正則化係数である。正則化の効果により、式(2)は凸関数となり、収束性が保証されることで式(1)と比較して計算コストが抑えられる。また、エントロピー正則化付き Wasserstein 距離の高速な計算手法として、Sinkhorn アルゴリズム [7] が提案されており、行列演算の反復により計算可能である。

複数の確率分布  $\{\mu_i\}_i^N$  の最適輸送に基づく重み付き平均として、Wasserstein 重心  $\mu^*$  が次式により定義される。

$$\mu^* = \operatorname{argmin}_{\mu} \sum_{i=1}^N \lambda_i W_p^\varepsilon(\mu, \mu_i) \quad (3)$$

$\lambda_i$  は各分布に対する重みであり、 $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$  を満たす。Solomon ら [5] は、画像データを確率分布として扱い、重みを連続的に変化させながら Wasserstein 重心を計算することで画像同士の補間を行うモーフィング手法を提案している。本研究では、そのモーフィング手法をトポロジー最適化における材料分布同士に適用し、新たな材料分布を生成するための交叉手法とすることで、進化的アルゴリズムによる最適化枠組みを提案する。

### (2) 深層生成モデルを用いたモーフィングとの比較

上記の Wasserstein 距離に基づくモーフィング手法と、最も簡単な手法として線形補間による方法、および1章で述べた深層生成モデルを用いた手法を比較する。4章の強制対流型ヒートシンク設計の数値例において、初期解として用いるデータの中で形態の異なる2つの流路に対して、各モーフィング手法による比較を図1に示す。深層生成モデルとしては、Variational Autoencoder (VAE)[6]を用いて、初期解として用いる100個の流路データにより学習を行った。図1-aにおいて、3ついずれの方法においてもグレースケールを伴う設計変数  $\gamma$  の分布を得られていることが確認できる。線形補間によるモーフィングでは、二値化後の流路は、1つを除いてサンプルデータと同一となり、唯一異なる分布も流路として不適切であることがわかる。VAEによる方法では、図1-aでは線形補間と比べて滑らかな補間となっているが、二値化後の図1-bでは、サンプルデータ同士の中間的な流路はほとんど得られていない。一方、Wasserstein 距離に基づくモーフィングでは、エントロピー正則化の影響でぼやけが生じているものの、両者とは異なる最適輸送に基づく補間となり、二値化後も流路として妥当な分布が得られている。このように、Wasserstein 距離に基づくモーフィング手法をトポロジー最適化における交叉として導入することで、線形補間や深層生

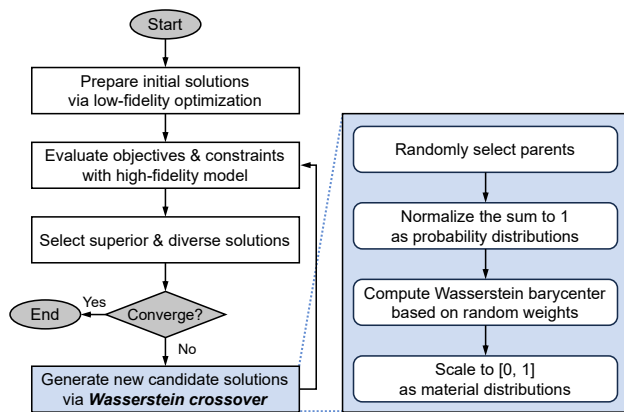


図-2 提案手法のフローチャート

成モデルを用いた手法と比較してより多様な解候補の生成が可能となり，探索性能の向上が期待される。

### (3) 最適化枠組み

本研究で提案するトポロジー最適化枠組みにおける手続きを図2に示し，以下ではその概略を示す．なお，提案手法はデータ駆動型トポロジーデザイン[2,3]に基づいており，先行研究における深層生成モデルによる交叉に代替して Wasserstein 距離に基づくモーフィングによる交叉（以下，Wasserstein 交叉）を導入する．

1. **初期解創成**：従来からの最適化法で容易に解くことのできる緩和問題として定式化される，低フィデリティ最適化問題を様々なパラメータ設定のもとで解き，多様かつ有望な初期解を準備する．
2. **評価**：解候補ごとに適した非構造格子で離散化した高フィデリティモデルを用いて，原問題における目的関数値・制約関数値の評価を行う．
3. **選択**：パーシステントホモロジーを用いた選択方法[8]により，多様かつ優秀な解候補を選択して解集合を構成する．
4. **交叉**：Wasserstein 交叉により新たな解候補を生成する．以下にその具体的な手続きを示す．
  - (a) 解集合の中からランダムに2つの親個体を選び出す．
  - (b) 和が1となるように，選出された材料分布を確率分布として正規化する．
  - (c) ランダムに重みを生成し，2つの確率分布に対する Wasserstein 重心を計算する．
  - (d) Wasserstein 重心として得られた確率分布を  $[0, 1]$  の範囲にスケーリングし，新たな解候補の材料分布とする．
  - (e) 定められた個数の解候補が生成されるまで，(a)–(d)を繰り返す．
5. ハイパーボリュームが収束するか，定められた反復数に達するまで，2–4を繰り返す．

### 3. 数値例：構造力学問題

#### (1) 問題設定

提案手法を構造力学におけるトポロジー最適化問題に適用する．図3に示すように，亀裂を有する平板に

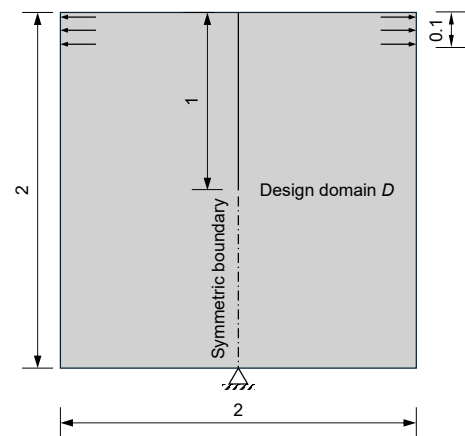


図-3 亀裂を有する平板の問題設定

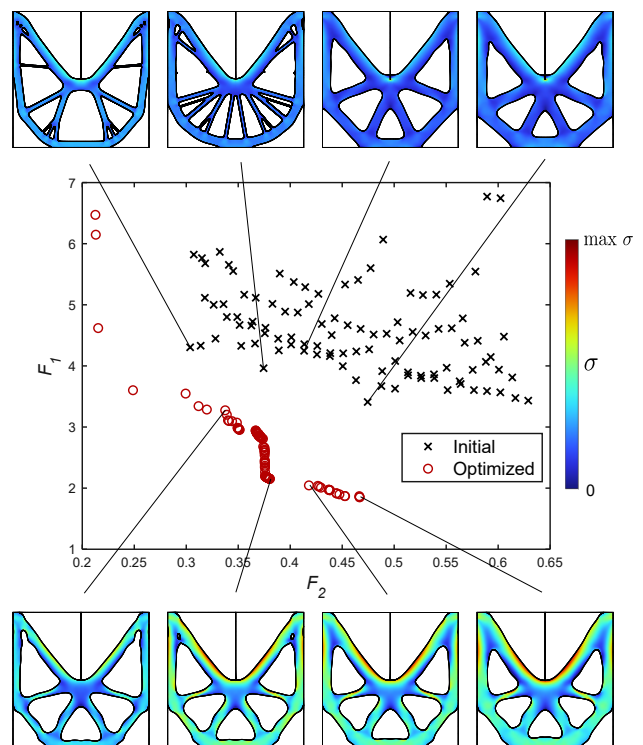


図-4 3章の数値例における目的変数空間と応力分布の比較

おける設計問題を考え，最大応力  $F_1$  と体積  $F_2$  の二目的最小化問題として最適化問題を以下のように定式化する．

$$\begin{aligned}
 &\underset{\rho(\mathbf{x})}{\text{minimize}} && F_1 = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \sigma(\mathbf{x}), \\
 &&& F_2 = \frac{\int_D \rho(\mathbf{x}) \, d\Omega}{\int_D d\Omega} \\
 &\text{subject to} && \rho(\mathbf{x}) \in \{0, 1\}, \quad \mathbf{x} \in D
 \end{aligned} \tag{4}$$

ここで， $\sigma(\mathbf{x})$  は位置  $\mathbf{x}$  におけるフォンミーゼス応力， $D$  は設計領域， $\Omega$  は  $\rho(\mathbf{x}) = 1$  で表される材料領域である．

また，初期解創成に用いる低フィデリティ最適化問題は，体積制約下における  $p$  ノルム応力最小化問題と

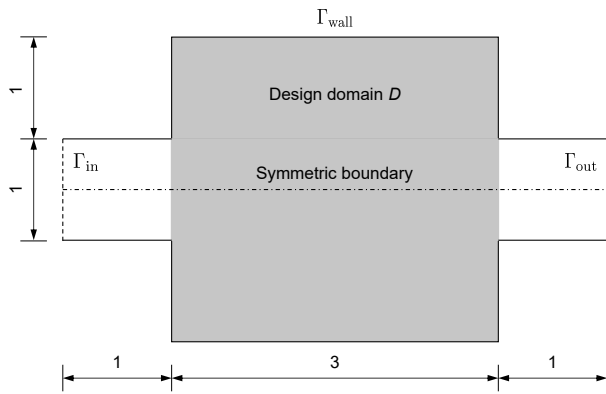


図-5 強制対流型ヒートシンクの問題設定

して以下のように定式化する。

$$\begin{aligned} & \underset{\rho=\{\rho_e\}_e^n}{\text{minimize}} \quad \tilde{F} = \left( \sum_{e=1}^n \sigma_e^p \right)^{1/p} \\ & \text{subject to} \quad \tilde{G} = \frac{\sum_{e=1}^n v_e \rho_e^{(k)}}{\sum_{e=1}^n v_e} - V_f^{\max} \leq 0, \\ & \quad \rho_e \in [0, 1] \quad (e = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $\sigma_e$  は要素  $e$  におけるフォンミーゼス応力、 $v_e$  は要素体積、 $V_f^{\max}$  は体積制約値であり、 $p$  の値については数値安定性の面から  $p = 8$  を用いる。また、フィルター半径と体積制約値  $V_f^{\max}$  をパラメータとして変化させながら、式 (5) を密度法により解くことで多様な初期解を準備する。

低フィデリティ最適化および Wasserstein 重心の計算には正方形要素による離散化を用い、 $n = 20,000$  とする。高フィデリティモデルでは境界適合格子により離散化して有限要素解析を行う。

## (2) 結果と考察

計算結果として、図 4 に目的変数空間と、対応する構造の応力分布の一部を示す。初期解と最適解を比較すると、低フィデリティ最適化により得られた初期解は、最適化問題の多峰性とグレースケールの二値化の影響でばらつきが大きい。一方、200 イタレーション後に得られた最適解は滑らかに整列しており、初期解を完全に支配するパレートフロントを形成していることが確認できる。

構造を比較すると、初期解のほとんどは亀裂の先端部にも材料が存在し、その結果として応力集中が発生している。これに対し、最適解では亀裂を避けるように丸みを帯びた構造が得られ、比較的均一な応力分布となっている。また、亀裂付近だけでなく内部の孔も丸みを帯びた形態となっており、全体として応力集中を避けるような構造が得られたといえる。

低フィデリティ最適化のパラメータとして用いたフィルター半径と体積制約値ごとに異なる材料分布が得られ、初期解は多様な構造となっているのに対して、最適解として得られた構造は、図 4 に示すように、ほとんどが同一のトポロジーとなった。これは、低フィデリティ最適化によって得られた複数の局所解を基に Wasserstein

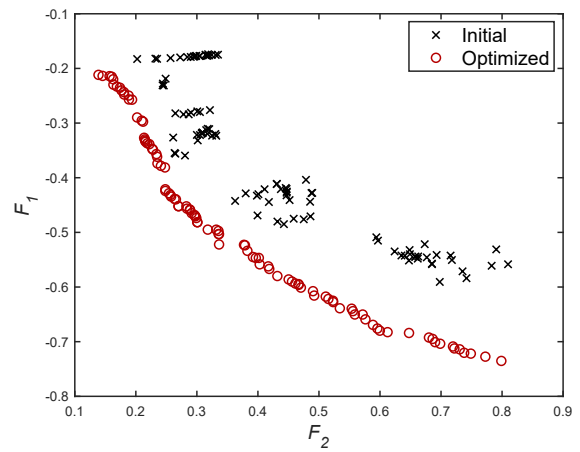


図-6 4章の数値例における目的変数空間

交叉による解候補の生成を繰り返すことで、ある有望な一つの最適解に到達したと考えられ、これらの結果から応力ベースのトポロジー最適化に対する提案手法の有用性が示された。

## 4. 数値例：熱流体問題

### (1) 問題設定（高フィデリティモデル）

提案手法を熱流体におけるトポロジー最適化問題に適用する。図 5 に示す強制対流型ヒートシンクの設計問題における乱流熱伝達を考え、Reynolds averaged Navier-Stokes (RANS) モデルである  $k-\epsilon$  モデルを用いた流速  $\mathbf{u}$ 、圧力  $p$ 、温度  $T$  に関する支配方程式は以下の通りである。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot (2\nu \mathbf{S}) + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (7)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot \left( \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \nabla T \right) \quad (8)$$

ここで、 $\rho$  は流体の密度、 $\nu$  は動粘性係数、 $\nu_t$  は乱流粘性係数、 $Pr$  はプラントル数、 $Pr_t$  は乱流プラントル数である。 $\mathbf{S} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$  は平均ひずみテンソル、 $\mathbf{T} = 2\nu_t \mathbf{S} - 2k\mathbf{I}/3$  はレイノルズ応力テンソルである。また、境界条件は以下の通りである。

$$\mathbf{u} = -\mathbf{n}, \quad T = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\text{in}} \quad (9)$$

$$p = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla T = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\text{out}} \quad (10)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla T = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\text{wall}} \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{n}$  は境界面の外向き単位法線ベクトルである。

上記の支配方程式と境界条件の下で、最適化問題を以下のように定式化する。

$$\begin{aligned} & \underset{\gamma(\mathbf{x})}{\text{minimize}} \quad F_1 = -\frac{\int_{\Gamma_{\text{out}}} T \, d\Gamma}{\int_{\Gamma_{\text{out}}} d\Gamma}, \\ & \quad F_2 = \frac{\int_{\Gamma_{\text{in}}} p \, d\Gamma}{\int_{\Gamma_{\text{in}}} d\Gamma} \\ & \text{subject to} \quad \gamma(\mathbf{x}) \in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (12)$$

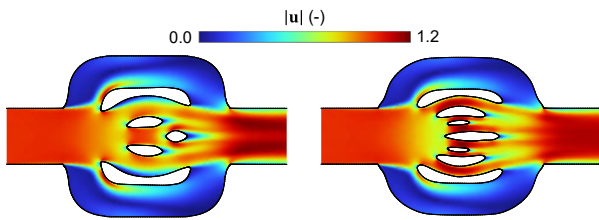


図-7-a 流速分布

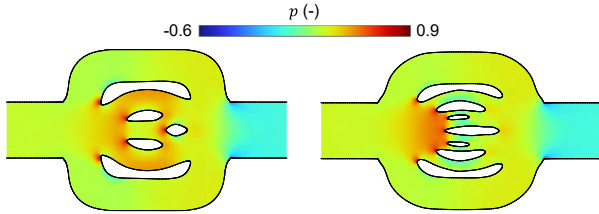


図-7-b 圧力分布

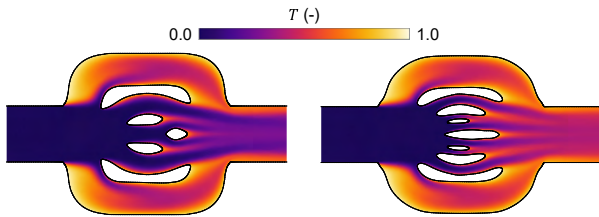


図-7-c 温度分布

図-7  $F_2 = 0.30$  付近の初期解（左）と最適解（右）における物理場の比較（初期解の目的関数値： $F_1 = -0.36, F_2 = 0.28$ ，最適解の目的関数値： $F_1 = -0.48, F_2 = 0.30$ ）

ここで、 $\gamma(\mathbf{x})$  は  $\gamma(\mathbf{x}) = 1$  が流体領域、 $\gamma(\mathbf{x}) = 0$  が固体領域をそれぞれ表す設計変数である。上記の問題設定による高フィデリティモデルを用いた  $F_1, F_2$  の評価には、境界適合格子と境界層格子により離散化し、レイノルズ数  $Re = 5,000$  の乱流条件下で有限要素解析を行う。

## (2) 問題設定（低フィデリティモデル）

低フィデリティモデルとして、Navier-Stokes 方程式を用いた以下の支配方程式を用いる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (13)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} - \alpha(\gamma) \mathbf{u} \quad (14)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot \left( \frac{1}{Re Pr(\gamma)} \nabla T \right) + \beta(\gamma)(1 - T) \quad (15)$$

ここで、 $-\alpha(\gamma) \mathbf{u}$  は固体領域を表すための Brinkman 方程式に基づく仮想的な体積力であり、 $\alpha(\gamma)$  は次式により定義される。

$$\alpha(\gamma) = \alpha_{\max} \frac{1 - \gamma(\mathbf{x})}{1 + q_{\alpha} \gamma(\mathbf{x})} \quad (16)$$

ここで、 $\alpha_{\max}$  は逆透過抵抗係数、 $q_{\alpha}$  は凸性を制御するパラメータである。また、 $\beta(\gamma)(1 - T)$  は固体領域における熱源を表し、 $\beta(\gamma)$  は、 $\beta_{\max}$  を体積熱伝達率として次式により定義される。

$$\beta(\gamma) = \beta_{\max}(1 - \gamma(\mathbf{x})) \quad (17)$$

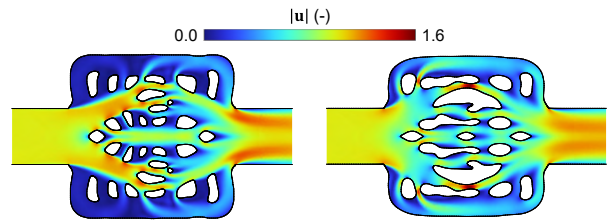


図-8-a 流速分布

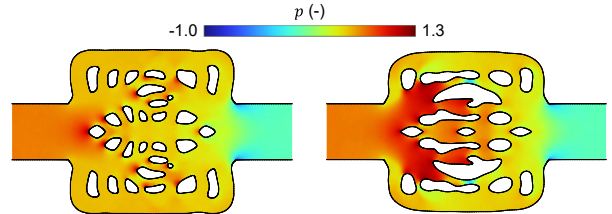


図-8-b 圧力分布

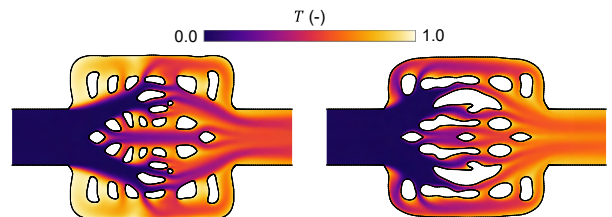


図-8-c 温度分布

図-8  $F_2 = 0.70$  付近の初期解（左）と最適解（右）における物理場の比較（初期解の目的関数値： $F_1 = -0.59, F_2 = 0.70$ ，最適解の目的関数値： $F_1 = -0.70, F_2 = 0.69$ ）

さらに、 $Pr(\gamma)$  は設計変数に依存するプラントル数として次式で定義される。

$$Pr(\gamma) = Pr_f + (Pr_s - Pr_f) \frac{(1 - \gamma(\mathbf{x}))}{1 + q_{Pr} \gamma(\mathbf{x})} \quad (18)$$

ここで、 $Pr_f, Pr_s$  はそれぞれ流体領域と固体領域におけるプラントル数、 $q_{Pr}$  は凸性を制御するパラメータである。また、低フィデリティモデルにおける境界条件は以下のように設定する。

$$p = 1, \quad T = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\text{in}} \quad (19)$$

$$p = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla T = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\text{out}} \quad (20)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla T = 0 \quad \text{on } \Gamma_{\text{wall}} \quad (21)$$

上記の支配方程式と問題設定の下で、低フィデリティ最適化問題を以下のように定式化する。

$$\begin{aligned} & \underset{\gamma = \{\gamma_e\}_{e=1}^n}{\text{minimize}} \quad \tilde{F} = - \int_{\Gamma_{\text{out}}} uT \, d\Gamma \\ & \text{subject to} \quad \gamma_e \in [0, 1] \quad (e = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (22)$$

式(17)における  $\beta_{\max}$  およびレイノルズ数をパラメータとして変化させながら、式(22)を密度法により解くことで多様な初期化を準備する。ただし、レイノルズ数については  $Re \leq 100$  の層流条件下の範囲で設定する。また、低フィデリティ最適化および Wasserstein 重心の計算には正方形要素による離散化を用い、 $n = 10,368$  とする。

### (3) 結果と考察

計算結果として、図 6 に目的変数空間における初期解と最適解の目的関数値のプロットを示す。初期解と最適解を比較すると、3 章に示した結果と同様に、低フィデリティ最適化によって得られた初期解は、原問題との問題設定の差により目的関数値のばらつきが大きい。一方、80 イタレーション後に得られた最適解は滑らかに整列しており、初期解を完全に支配するパレートフロントを形成している。

初期解と最適解のうち、同程度の圧力損失  $F_2$  となる流路を抜粋し、流速分布、圧力分布、温度分布を比較した結果を図 7 および図 8 に示す。図 7 に示す流路を比較すると、最適解は中央部分にフィンのような形状が密に配置され、より多くの固体領域を持つことが確認できる。図 7-a の流速分布を比較すると、特に中心部において、初期解では固体領域近傍の流速が 0 に近い値となっているのに対し、最適解ではフィンの間を流れる流速が高く、中央部の流体領域全体にわたって均一な分布を示している。さらに、図 7-c の温度分布においても、対応する領域で流体と固体の間で熱交換が促進され、流体温度の上昇が確認できる。また、最適解の方が多くの固体領域を持つにもかかわらず  $F_2$  が同程度の値となっていることから、圧力損失を抑えつつ効率的な熱交換を促すようにフィン形状が配置され、約 1.3 倍の熱交換量  $F_1$  を達成しているといえる。このようなフィン状の形態は、初期解に含まれる全ての流路を確認しても存在せず、最適化過程において Wasserstein 交叉によって新たに生成された特徴であり、ヒートシンクの性能向上に大きく寄与していると考えられる。

また、図 8 における流路を比較すると、固体領域の多さや配置に大きな差はないものの、それらの形状や大きさが異なることが確認できる。図 8-a の流速分布を比較すると、初期解は流れが中央部分に集中し、上端および下端部ではほとんど流速が 0 となっている。一方、最適解では流れが全体的に分散し、比較的均一な流速分布となっている。その結果、図 8-c の温度分布からも確認できるように、熱源として設定した固体領域との間での熱交換が促進され、熱交換量  $F_1$  の値は初期解と比べて約 1.2 倍に向上している。初期解において流れが集中するのは、流れモデルの違いによる影響であり、乱流モデルによる性能解析に基づき解更新を行う提案手法の有効性が示された。最適解の中央部分において境界面が波打ち、滑らかでない領域が確認できるが、これは Wasserstein 交叉におけるエントロピー正則化によるグレースケールの影響と考えられる。この点については、数値安定性や計算コストとのトレードオフ関係を考慮しつつ、パラメータ調整を行うことで改善できる可能性がある。

### 5. 結言

本研究では、Wasserstein 距離に基づく図形モーフィング手法に着目し、材料分布のための Wasserstein 交叉として組み込むことで、進化的アルゴリズムによるトポロジー最適化枠組みを提案した。多峰性の顕著な問題

として知られる 2 つの最適化問題に対して提案手法を適用したところ、従来手法による初期解を Wasserstein 交叉により繰り返し更新することで、従来設計を優越するパレートフロントが最適解として得られ、構造力学と熱流体という異なる物理場におけるトポロジー最適化に対する提案手法の有用性が示された。

今後の展望として、矩形以外の設計領域を持つ問題への適用が挙げられる。2 章で述べた Sinkhorn アルゴリズムにはカーネルによる畳み込み演算が含まれているため、現在のところは矩形領域に限定したモーフィング手法の適用に留まっている。例えば、式 (1) における輸送計画に設計領域の形状に応じた制約条件を設ける、あるいは設計領域を矩形に変換したうえでモーフィングを行うことにより、矩形以外の設計領域を持つトポロジー最適化問題、例えば L 字梁の最大応力最小化問題などへの展開が期待される。また、本研究では 2 次元のトポロジー最適化に取り組んだが、Wasserstein 距離に基づくモーフィングは 3 次元図形に対しても可能である [5]。したがって、3 次元トポロジー最適化問題への展開も、本研究のさらなる有用性を示すための重要な課題である。

**謝辞:** 本研究は JSPS 科研費 23H03799, 24KJ1640 の助成を受けたものです。

### 参考文献

- [1] Sigmund, O.: On the usefulness of non-gradient approaches in topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.43, No. 5, pp.589-596, 2011.
- [2] Yamasaki, S. et al.: Data-driven topology design using a deep generative model, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.64, pp. 1401-1420, 2021.
- [3] Yaji, K. et al.: Data-driven multifidelity topology design using a deep generative model: Application to forced convection heat transfer problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 388, pp. 114284, 2022.
- [4] Kii, T. et al.: Latent crossover for data-driven multifidelity topology design, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 146, No. 5, pp. 1-14, 2024.
- [5] Solomon, J. et al.: Convolutional Wasserstein distances: Efficient optimal transportation on geometric domains, *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 34, No. 4, pp. 1-11, 2015.
- [6] Kingma, D. P. and Welling, M.: Auto-encoding variational bayes, *arXiv*, 2013.
- [7] Cuturi, M.: Sinkhorn distances: Lightspeed computation of optimal transport, *Advances in Neural Information Processing Systems*, Vol. 26, pp. 2292-2300, 2013.
- [8] Kii, T. et al.: Data-driven topology design with persistent homology for enhancing population diversity, *arXiv*, 2024.