

形状とトポロジーの同時最適化の手法検討

Methodological Study of Simultaneous Shape and Topology Optimization

渡邊大貴¹⁾ 下田昌利²⁾
Daiki Watanabe and Masatoshi Shimoda

¹⁾博士 (工学) 豊田工業大学 ポストドクトラル研究員 (〒 468-8511 愛知県名古屋市天白区久方 2-12-1, E-mail: watanabee@toyota-ti.ac.jp)

²⁾博士 (工学) 豊田工業大学 大学院工学研究科 教授 (〒 468-8511 愛知県名古屋市天白区久方 2-12-1)

Topology optimization is a powerful computational technique that maximizes mechanical performance, such as stiffness and strength. Density-based approaches are especially popular in industry fields due to their simplicity. However, a key limitation is that the optimal structure is restricted within a fixed design domain, which can limit the quality of the final solution. Recent research has introduced methods that combine topology optimization with nonparametric shape optimization. This combination allows structural boundaries to evolve based on shape derivatives, effectively expanding the design space and enabling more flexible and improved designs. However, despite the complexity of the sensitivity derivation and discretization processes, there is little research on the validation of their appropriateness. From this background, the sensitivity analysis for simultaneous optimization of shape and topology will be focused on, and some basic numerical investigations will be conducted. Several numerical examples for comparison will be presented, and we will discuss the potential for future prospects and issues in this theme.

Key Words : Topology optimization, Shape optimization, Simltaneous, Adjoint variable method

1. はじめに

トポロジー最適化 [1] は、構造物の剛性や強度などの機械的性能を最大限に高めるための強力な計算手法である。中でも SIMP 法 [2] をはじめとする密度ベースの手法は、そのアルゴリズムの単純さと実装の容易さから、航空宇宙、自動車、建築をはじめとする多くの産業分野において広く活用されている。しかしながら、この手法はあらかじめ定められた設計領域内でのみ構造の最適化を行うため、最適解がその領域に強く依存してしまうという制約が存在する。この制限は、特に設計領域の形状が最適設計に対して非合理的である場合に、性能向上の妨げとなる可能性がある。

このような課題に対処するために、本研究では、Shimoda らが提案したトポロジー最適化とノンパラメトリック形状最適化とを組み合わせた同時最適化手法に着目する [3]。ノンパラメトリック形状最適化とは、形状微分に基づいて構造の外形を連続的に更新していく手法であり、パラメータによらず滑らかに形状を変化させることができる特徴を有している。とりわけ、形状とトポロジーの同時最適化によって、構造の外形（マクロな形状）と内部の物質分布（ミクロな構造）を同時に最適化できる点は大きな利点である。この同時最適化手法を用いることで、従来固定されていた設計領域そのものを柔軟に拡張できるようになり、設計自由度が飛躍的に向上することが山根ら [4] によって主張されている。また、この手法によって、接触や圧力荷重といった構造の境界上に依存する外力に対して、外形形状を能動的に変化させながら最適な内部構造を導出することもできる [5]。

一方で、このような高度な同時最適化手法を実現するためには、感度解析の導出および離散化処理の整理が不可欠であり、その実装もまた、数学的にも数値計算的にも複雑である。形状最適化に関する研究は数多く報告されているが、これらの解析手法の妥当性について系統的に検証した研究は限られている。

このような背景を踏まえ、本研究では形状とトポロジーの同時最適化における感度解析に焦点を当て、いくつかの基本的な数値計算をとおして検証する。また、それらの結果に基づき、この同時最適化手法の今後の技術的課題と展望についてまとめる。

2. 形状とトポロジーの同時最適化

本研究では、以下のような形状体積 V_s および材料体積 V_t にそれぞれ \bar{V}_s , \bar{V}_t の等式制約を与えた平均コンプライアンス最小化問題を取り扱う。

$$\text{Given } \mathbf{X}_0 \in \partial\Omega_0, \mathbf{s}_0 \in \Omega_0 \quad (1)$$

$$\text{find } \mathbf{X}^* \in \partial\Omega, \mathbf{s}^* \in \Omega \quad (2)$$

$$\text{min. } f(\mathbf{X}, \mathbf{s}, \mathbf{u}(\mathbf{s}, \mathbf{X})) = \mathbf{F}^T \mathbf{u} \quad (3)$$

$$\text{s. t. } V_s(\mathbf{X}) - \bar{V}_s = 0 \quad (4)$$

$$V_t(\mathbf{s}, \mathbf{X}) - \bar{V}_t = 0 \quad (5)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{s}, \mathbf{X})\mathbf{u}(\mathbf{s}, \mathbf{X}) - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (6)$$

$$0 \leq s_i \leq 1, i = 1, \dots, N_s \quad (7)$$

ここで、式 (3) の f は目的関数、 \mathbf{K} は剛性行列、 \mathbf{u} は変位ベクトル、 \mathbf{F} は荷重ベクトルである。式 (7) の s_i は実数の設計変数場 \mathbf{s} を有限要素ごとに離散化したものであり、 N_s は s_i の数である。本研究においては、最

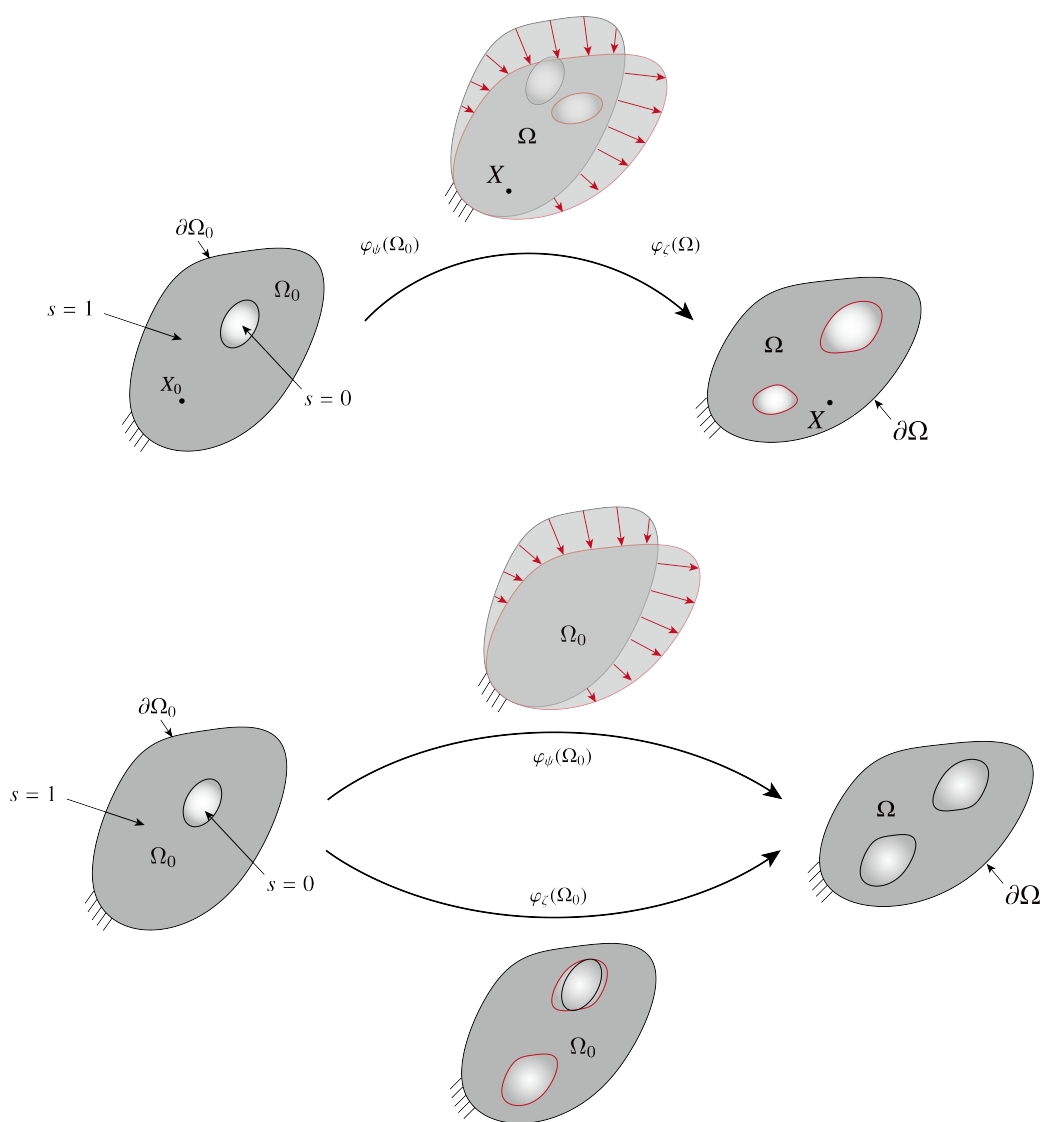


図-1 形状とトポロジーの同時最適化の概念図。(上) 密度変動で形状の変動を考慮する場合。(下) 形状と密度の変動を独立に考える場合

適化計算 1 ステップあたりの変動が小さいと仮定し、形状の変動場（速度場） \mathbf{d} と密度変動場 \mathbf{z} はそれぞれ独立して更新する。

厳密には、速度場 \mathbf{d} と密度変動場 \mathbf{z} は相互に影響を与える。例えば、形状が動くことで体積が変化し、それに伴って、密度変動に用いられるトポロジー密度感度にも変化が生じる。Dalkint らは、トポロジー最適化等でよく使用されるエネルギーベースのフィルターと停留ポテンシャルエネルギーの原理を関連付けることで、次式のようなポテンシャル $\Pi_\psi(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{d})$ および $\Pi_\zeta(\boldsymbol{\zeta}; \mathbf{z}, \boldsymbol{\psi})$ を提案している [4]。

$$\Pi_\psi(\boldsymbol{\psi}; \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} W_\psi(\nabla_o \varphi_\psi) dV + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_0^d} \|\boldsymbol{\psi} - \mathbf{d}\|^2 dS \quad (8)$$

$$\Pi_\zeta(\boldsymbol{\zeta}; \mathbf{z}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega(\boldsymbol{\psi})} l^2 |\nabla \boldsymbol{\zeta}|^2 dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega(\boldsymbol{\psi})} (\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{z})^2 dV \quad (9)$$

ただし、 φ_ψ は $\mathbf{X} = \varphi_\psi(\mathbf{X}_0) = \mathbf{X}_0 + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{X}_0)$ を満たす変形写像である。 W_ψ は仮想的なエネルギー関数であり、 l は

正則化のための定数である。式 (8), (9) を満たすような平滑化された速度場 $\boldsymbol{\psi}$ および密度変動場 $\boldsymbol{\zeta}$ を求めることで、チェッカーボードのような問題を回避しつつ、トポロジー密度感度における形状変動の影響を考慮することも可能となる。なお、この 2 式は、はじめに式 (8) で $\boldsymbol{\psi}$ を求め、その後式 (9) で $\boldsymbol{\zeta}$ を求めることで順次解くことができる。この考え方は、連成問題における弱連成解析の考え方に近いといえる。形状とトポロジーの同時最適化の概念図を図-1 に示す。

3. 感度解析

(1) 形状感度

目的関数 (3) の設計感度は、随伴変数法を用いることで以下のように導出される。なお、導出については既に先行研究が存在するため、ここでは割愛する [6]。

$$\frac{df}{d\mathbf{X}} = \sum_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\phi} \left(-2 \nabla^T \mathbf{u} \mathbb{C} [\nabla \mathbf{u}] + (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbb{C} [\nabla \mathbf{u}]) \mathbf{I} \right) dV \right] \quad (10)$$

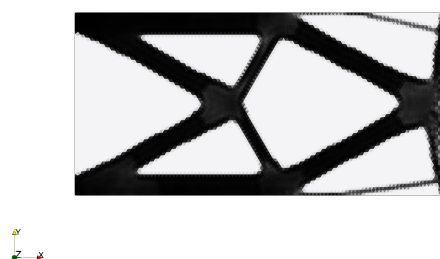


図-2 トポロジー最適化結果，目的関数値=5.45

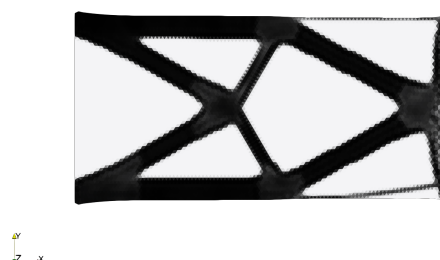


図-3 形状とトポロジーの同時最適化結果，目的関数値=5.34

ただし， \mathbf{B} は有限要素法における \mathbf{B} マトリクス， $\mathbb{C}[\delta \mathbf{u}]$ は 2 階の応力テンソル， ϕ は 2 階のテンソルを Voigt 表記に変換する写像である．式 (10) で導出された感度は，そのまま 2 章で提示した速度場 \mathbf{d} に導入される．また，本研究では，形状最適化特有の波打ち現象を回避しつつ形状を更新するために， H^1 勾配法 [7] を採用している．

(2) トポロジー密度感度

目的関数 (3) の設計感度は，随伴変数法を用いることで以下のように導出される．

$$\frac{df}{ds_i} = -\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_i} \mathbf{u} \quad (11)$$

式 (11) で導出された感度は，そのまま 2 章で提示した密度変動場 \mathbf{z} に導入される．また，本研究では，トポロジー最適化特有のチェッカーボードやメッシュ依存の最適形状を避けるために，拡張 Helmholtz 型偏微分方程式に基づく密度フィルター [8,9] を採用している．

4. 数値計算例

ここでは，平面応力状態を仮定した 2 次元の片持ち梁の構造モデルの最適設計問題を考える．矩形領域において，状態解析は左端面を完全固定，右端面を y 方向負の向きに荷重を与える．速度場解析では，左端面を x

方向に固定し，右端面を完全に固定する．図-2 がトポロジー密度のみについて最適化問題を解いた場合の結果，図-3 が形状とトポロジー密度の同時最適化問題を解いた場合の結果である．両者を比較して，図-3 の結果ではわずかに隅角部が構造の外側に移動していることが伺える．目的関数値である平均コンプライアンス値を比較すると，やはりわずかではあるが目的関数値が低い結果が得られた．本研究では単純な平均コンプライアンス最小化問題を取り扱ったが，接触や圧力荷重を考慮した場合に，このような性能差は顕著になることが見込まれる．

5. 結言

講演当日では，感度解析を中心に説明および数値検討を実施する予定である．

参考文献

- [1] Bendsøe, M.P., Kikuchi, N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71, pp.197-224, 1988.
- [2] Bendsøe, M.P., Sigmund, O., Material interpolation schemes in topology optimization, *Archive of Applied Mechanics*, Vol.69, pp.635-654. 1999.
- [3] Shimoda, M., Nakayama, H., Suzaki, S. and Tsutsumi, R.: A unified simultaneous shape and topology optimization method for multi-material laminated shell structures, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.64, pp.3569-3604, 2021.
- [4] 山根大輝, 下田昌利: ソリッド構造体の形状とトポロジーの同時最適化, 日本機械学会論文集, Vol.90, No.933, p.23-00289, 2024.
- [5] Dalklint, A., Wallin, M. and Tortorelli D.: Simultaneous shape and topology optimization of inflatable soft robots, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.420, 116751, 2024.
- [6] Swartz, K.E., Mittal, K., Schmidt, M. et al. Yet another parameter-free shape optimization method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.66, No.245, 2023, DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-023-03684-9>.
- [7] 畔上秀幸, 呉志強: 線形弾性体問題における領域最適化解析 (力法によるアプローチ), 日本機械学会論文集, Vol.60, No.578, pp. 144-150, 1994.
- [8] Lazarov B.S. and Sigmund O.: Filters in topology optimization based on Helmholtz - type differential equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.86, No.6, pp.765-781, 2011.
- [9] 渡邊 大貴, 干場 大也, 西口 浩司, 加藤 準治: 固体材料および界面物性を考慮したマルチマテリアルトポロジー最適化, 日本計算工学会論文集, v20220017, 2022.